

# Ampliación de Matemáticas

2º Curso, Grado en Ingeniería Civil  
(Mención en Construcciones Civiles)

ETSI Caminos, Canales y Puertos,  
Universidad de Cantabria

M<sup>a</sup> Eugenia Pérez Martínez  
meperez@unican.es

Curso 2021–22

# Sobre la Transformada de Laplace.

- Herramienta útil para la resolución de ecuaciones diferenciales / integrales / integro-diferenciales, y de sistemas diferenciales lineales.
- Transforma ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas.
- **Definiciones:**
  - Se dice que la función  $f$  es **continua por segmentos en  $[0, \infty)$** , cuando lo es en cada intervalo  $[0, N]$  para cualquier  $N > 0$ .
  - La función  $f, f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , es **de orden exponencial  $\alpha$**  si existen constantes positivas  $T$  y  $M$  tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t \geq T.$$

-Para  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , la **transformada de Laplace de  $f$  en el punto  $\lambda$**  es:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

$$\text{si } \exists \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\lambda t} f(t) dt$$

- Si la función  $f$  es continua a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial  $\alpha$ , la integral converge para  $\lambda > \alpha$  (también para  $\text{Re}(\lambda) > \alpha$ ).

## Algunas propiedades de la T. de Laplace para su aplicación en ED

- 1 Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que su transformada de Laplace existe para  $\lambda > \alpha$ , y  $c_1, c_2$  constantes cualesquiera. Entonces,

$$\mathcal{L}[c_1 f + c_2 g](\lambda) = c_1 \mathcal{L}[f](\lambda) + c_2 \mathcal{L}[g](\lambda), \quad \forall \lambda > \alpha.$$

- 2 Si  $f$  es continua en  $[0, \infty)$  y  $f'$  es continua a trozos en  $[0, \infty)$ , y ambas son de orden exponencial  $\alpha$ , entonces:

$$\mathcal{L}[f'](\lambda) = \lambda \mathcal{L}[f](\lambda) - f(0), \quad \forall \lambda > \alpha.$$

- 3 Si  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  son continuas en  $[0, \infty)$  y  $f^{(n)}$  es continua a trozos en  $[0, \infty)$ , y todas ellas son de orden exponencial  $\alpha$ , entonces,  $\forall \lambda > \alpha$ :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](\lambda) = \lambda^n \mathcal{L}[f](\lambda) - \lambda^{n-1} f(0) - \lambda^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

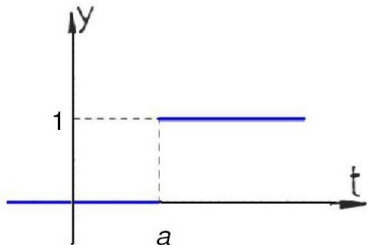
- 4 **Teorema de inversión:** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas a trozos en  $[0, \infty)$ , de orden exponencial  $\alpha$ , y tales que  $\mathcal{L}[f](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda)$ ,  $\forall \lambda > \alpha$ .  
*Entonces:*  $f(t) = g(t)$  salvo, a lo sumo, en los puntos de discontinuidad de  $f$  y  $g$ .

- Se llama **transformada inversa de Laplace** de una función  $F(\lambda)$ , a la función  $f(t)$  continua a trozos en  $[0, \infty)$  que verifica:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = F(\lambda).$$

- **De utilidad en ED**, por ejemplo, cuando aparecen funciones continuas a trozos, de Heaviside, Deltas de Dirac,...:funciones útiles en Ingeniería!
- **FUNCIÓN “escalón”** (“escalón unitario”, “de Heaviside”): continua a trozos/

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$



- A partir de  $u$  se define  $s_N(t-a) = -\frac{N}{2}(u(t-a-\frac{1}{N}) - u(t-a+\frac{1}{N}))$   
y,  $\delta(t-a) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(t-a)$  en el sentido...

- DELTA de DIRAC: "función"  $\delta(t - a)$ , tal que:

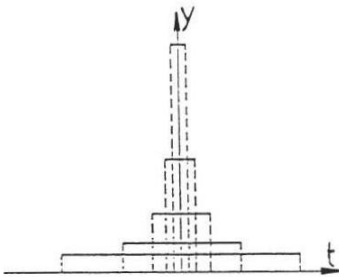
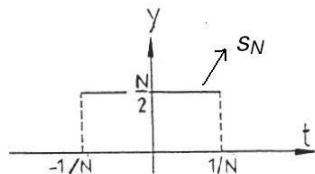
$$\delta(t - a) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) \phi(t) dt = \phi(a),$$

para cualquier función  $\phi$  continua en  $\mathbf{R}$ ,

donde 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) \phi(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_N(t - a) \phi(t) dt (\equiv \phi(a))$$



## EJEMPLO: APLICACIÓN A UN PROBLEMA DE CONTORNO

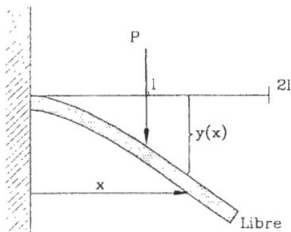
Modelo de viga de longitud  $2l$ , empotrada en un soporte del lado izquierdo y libre en el derecho, y sometida a una carga  $p(x)$ :

$$EIy^{(4)} = p(x), \quad x \in (0, l)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(2l) = y'''(2l) = 0,$$

donde  $E$  e  $I$  son constantes.  $E$  es el módulo de Young;  $I$  es un momento de inercia. Se supone que los esfuerzos horizontales son nulos y que la viga tiene una carga concentrada  $P$  que actúa sobre su centro  $x = l$ .

$$EIy^{(4)} = P\delta(x - l), \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(2l) = y'''(2l) = 0$$



# Sobre la Transformada de Fourier: esquema

Para  $f$  continua a trozos en  $(-\infty, \infty)$  y tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

la transformada de Fourier de  $f$  en  $\zeta$  es la integral

$$\mathcal{F}[f](\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\zeta} f(x) dx.$$

Denotando por  $F(\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta)$ ,  $F$  es una función de la variable  $\zeta \in \mathbf{R}$ , con valores en  $\mathbf{C}$ .

*La transformada inversa de Fourier de  $F$*  se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\zeta} F(\zeta) d\zeta,$$

**Resultado de inversión:**  $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}](x) = f(x)$ .

## Algunas propiedades de la T. de Fourier para su aplicación en EDP

- 1  $\mathcal{F}[c_1 f + c_2 g](\zeta) = c_1 \mathcal{F}[f](\zeta) + c_2 \mathcal{F}[g](\zeta),$
- 2  $\mathcal{F}[f'](\zeta) = -i\zeta \mathcal{F}[f](\zeta), \mathcal{F}[f^{(n)}](\zeta) = (-i\zeta)^n \mathcal{F}[f](\zeta),$
- 3  $\mathcal{F}[f * g](\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta) \mathcal{F}[g](\zeta),$

# Prácticas con MATLAB: Transformadas Integrales

Algunas “funciones” especiales: *Dirac*; *Heaviside*

Comandos útiles para T. de Laplace:

*laplace(f)*, *ilaplace(F)*,  
*laplace(sym('Heaviside(t)'))*, *laplace(sym('Dirac(t)'))*,  
o *laplace(heaviside(t))*, *laplace(dirac(t))*

Para  $f$  una función de la variable simbólica  $t$ ,  $F = \text{laplace}(f)$  es una función dada en términos de la variable simbólica  $s$ .

Comandos útiles para T. de Fourier:

*fourier(f)*, *ifourier(F)*,  
*fourier(sym('Heaviside(x)'))*, *fourier(sym('Dirac(x)'))*,  
o *fourier(heaviside(x))*, *fourier(dirac(x))*.

Para  $f$  una función de la variable simbólica  $x$ ,  $F = \text{fourier}(f)$  es una función dada en términos de la variable simbólica  $w$ .