

Ampliación de Matemáticas

2º Curso, Grado en Ingeniería Civil
(Mención en Construcciones Civiles)

ETSI Caminos, Canales y Puertos,
Universidad de Cantabria

M^a Eugenia Pérez Martínez
meperez@unican.es

Curso 2021–22

Modelos con ED de primer orden: crecimientos de poblaciones, descomposición de materia radioactiva, reacciones químicas....
“problemas de Cauchy o valor inicial”

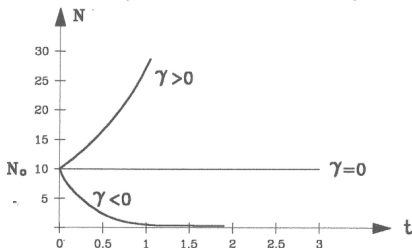
- Modelo de Malthus (hacia 1790):

Los nacimientos y las muertes, en un intervalo de tiempo pequeño, son proporcionales al tamaño de la población y al intervalo de tiempo. Es decir, nacimientos = $\alpha\Delta tN(t)$, muertes = $\beta\Delta tN(t)$, siendo $N(t)$ el tamaño de la población en el tiempo t . La variación de la población en un intervalo de tiempo Δt es $\Delta N(t) = \gamma N(t)\Delta t$ con $\gamma = \alpha - \beta$. Tomando límites cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se tiene el modelo matemático:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N$$

$$N(0) = N_0$$

la constante γ se obtiene del recuento de la población



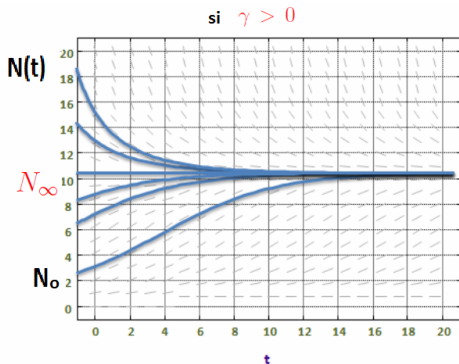
•Modelo de Verhulst (hacia 1837)

modificaciones al modelo de Malthus: *la población no puede crecer ilimitadamente, sino que tiende a estabilizarse en un límite N_∞ y la variación de la población es proporcional a la población N y al factor $(1 - \frac{N}{N_\infty})$* . Es

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)$$

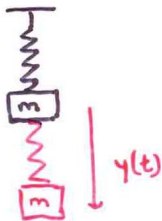
las constantes
se obtienen del
recuento de la
población!!

$$N(t) = \frac{N_0 N_\infty}{N_0 + (N_\infty - N_0) \exp(-\gamma t)}$$



Modelos con ED de segundo orden: caída libre de cuerpos, circuitos eléctricos, péndulos, resortes, vigas...

Modelo resorte - masa ($t \equiv x$)



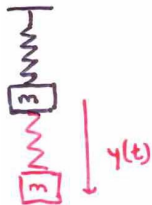
Fuerza = masa * aceleración

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \text{Fuerzas} =$$

$$\begin{aligned} -c y' & \quad \text{Fuerza de recuperación} \\ -k y & \quad + \text{Fuerza de amortiguación} \\ p(t) & \quad + \text{Fuerzas externas} \end{aligned}$$

$$m y'' + k y + c y' = p(t)$$

Problema de Cauchy o valores iniciales



$$m y'' + k y' + c y = p(t)$$
$$y(0) = y_0$$
$$y'(0) = z_0$$

y_0, z_0 alargamiento inicial y velocidad inicial: condiciones iniciales!

- Si no hay condiciones iniciales ni fuerzas externas actuando sobre el sistema, el resorte no se mueve!! ($p(t)=0, y_0=0, z_0=0 \rightarrow y(t)=0$)

- **Teorema de existencia y unicidad de solución:** existe una única solución $y(t)$ definida en el intervalo $(0, T)$ donde $p(t)$ es una función continua

Problema de contorno: e.g.

$$\begin{cases} EI y'' + T y = m(x), & x \in (0, l) \\ y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

C. CONTORNO

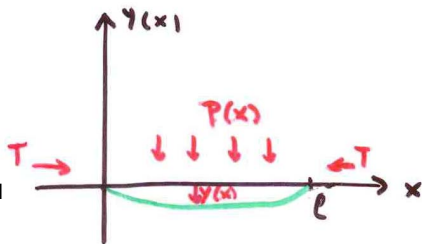
$$m'' = p$$

-Teorema de existencia y unicidad de solución: para cualquier $m(x)$ dada ($m(x)$ función continua en $[0, l]$)

existe una solución $y(x)$ y es única si y sólo el problema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial

si y sólo si T/EI no es una carga de pandeo (no es un valor propio...)

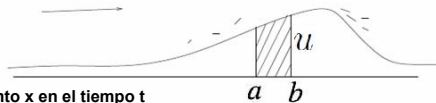
Resultado general: teorema de la alternativa de Fredholm!



Expresión matemática de una ley de conservación:

supuesto que no hay fuentes que creen / destruyan materia dentro de S

$$Q = \int_a^b u(x, t) dx$$



$u(x, t)$ la densidad o concentración de Q en el punto x en el tiempo t
 $\Phi(x, t)$ el flujo de Q en el punto x en el tiempo t

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \Phi(a, t) - \Phi(b, t)$$

$$\int_a^b u_t(x, t) + \Phi_x(x, t) dx \quad \text{EDP que relaciona el flujo y la densidad!!} \quad u_t + \Phi_x = 0$$

Densidad y flujo se relacionan por leyes constitutivas: $\Phi(x, t) = \Phi(u)$

$$u_t + \phi'(u)u_x = 0$$