Ampliación de Matemáticas - 2^0 Curso, 2020/21

Grado en Ingeniería Civil (Mención en Construcciones Civiles)

HOJA 8 - Tema 6: Ecuaciones en Derivadas Parciales

Problemas de valores iniciales / contorno / mixtos (procesos estacionarios /ondas / calor / vibraciones)

1. Resolver los problemas de Cauchy para una EDP de primer orden, relacionados con modelos de propagación de ondas (tomar $c = \pm 2$)

$$\begin{cases} u_t - cu_x = 0\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) = (x^2+1)^{-1}\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - cu_x = e^x\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) = (x^2+1)^{-1}\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t + 4u_x + u = x\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) = exp(-x^2)\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

2. Resolver los problemas de Cauchy para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x)\,, & x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) = 0\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

a). Tomar $f(x) = sin(x)$ en ambos ejercicios.

b). Tomar el dato inicial $f(x)$ definida como: $f(x) = x+1$ para $x \in [-1, 0]$, $\quad f(x) = 1 - x$ para $x \in [0, 1]$, $\quad f(x) = 0$ si $x \notin [-1, 1]$

3. Resolver los problemas de Cauchy para la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = g(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

a). Tomar $c = 3$, y los datos inciales

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad \text{si} \quad x \in [-1, 1], \\ 0 & , \quad \text{si} \quad x \notin [-1, 1]\,. \end{cases} \quad , \qquad g(x) = 0$$

Encontrar el instante de tiempo t_0^* en el que el punto $x = 100$ de la cuerda empieza a vibrar y el instante t_f^* en el que deja de vibrar.

b). Tomar $c = 5$, $f = sin(x)$, $g = 0$,

c). Tomar $c = 2$, $f = sin(x)$, $g = cos(x)$

4. Se considera un modelo de vibraciones transversas de una viga, con extremos simplemente soportados,

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} &= 0\,, \quad x \in (0,\pi), t > 0\,, \\ u(x,0) &= \sin 2x\,, \quad x \in [0,\pi]\,, \\ u_t(x,0) &= 3\sin 2x\,, \quad x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0\,, \quad t \geq 0\,, \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) &= 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{cases}$$

Utilizar el método de separación de variables para demostrar que la solución es: $u(x,t) = sin(2x)(\cos(4t) + \frac{3}{4}\sin(4t))$

5. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas

$$a). \begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} &= 0\,, \quad x \in (0,1),\, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in [0,1]\,, \\ u_t(x,0) &= 0, \quad x \in [0,1]\,, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0\,, \quad t \geq 0\,, \end{cases}$$

con los distintos datos inciales:

$$f(x) = \sin(2\pi x)/2$$

$$f(x) = \frac{\sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x - (\frac{1}{2}))^2 - \frac{1}{4^2}, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 0, & \text{si } x \in [0,1],\ x \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \end{cases}$$

Complemento prácticas (relacionado con los ejercicios 1–5): crear funciones MATLAB que permitan simular propagación de ondas / difusión del calor/ vibraciones de cuerdas / vibraciones de vigas .

6. Intentar aplicar el método de separación de variables para resolver las ecuaciones

$$u_{\xi\eta} = 0, \quad (5/4)u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = 0.$$

Reducirlas a una del tipo calor, ondas o Laplace mediante un cambio de variables.

7. Resolver los problemas mixtos para la ecuación del calor

$$a). \begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0\,, \quad x \in (0,1),\, t > 0 \\ u(x,0) &= x^2(x-1), \quad x \in [0,1]\,, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} u_t - 4u_{xx} &= 0\,, \quad x \in (0,1),\, t > 0 \\ u(x,0) &= x^2(x-1), \quad x \in [0,1] \\ u_x(0,t) = u(1,t) &= 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{cases}$$

8. Resolver los problemas mixtos para la ecuación de ondas

$$
a). \left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} & = & 0\,, \quad x \in (0,\pi),\, t>0 \\ u(x,0) & = & \sin(x), \quad x \in [0,\pi]\,, \\ u_t(x,0) & = & x^2 - \pi x, \quad x \in [0,\pi]\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) & = & 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{array} \right.
$$

$$
b). \left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - 9u_{xx} & = & 0\,, \quad x \in (0,2),\, t>0 \\ u(x,0) & = & x(x-2), \quad x \in (0,2)\,, \\ u_t(x,0) & = & 1, \quad x \in (0,2)\,, \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) & = & 0\,, \quad t > 0\,. \end{array} \right.
$$

9. Resolver el problema mixto para la ecuación del telegrafista:

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u & = & 0\,, \quad x \in (0,1), t>0\,, \\ u(x,0) & = & \sin(x\pi/2), \quad x \in [0,1]\,, \\ u_t(x,0) & = & 0, \quad x \in [0,1]\,, \\ u(0,t) = u_x(1,t) & = & 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{array} \right.
$$

10. Resolver el problema mixto con condiciones de contorno no homogéneas:

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} u_t - 4u_{xx} - u & = & 0\,, \quad x \in (0,1),\, t>0 \\ u(x,0) & = & x^2, \quad x \in (0,1)\,, \\ u(0,t) & = & 0\,, \quad t > 0\,. \\ u(1,t) & = & e^t\,, \quad t > 0\,. \end{array} \right.
$$

teniendo en cuenta que $u_p(x,t) = xe^t$ es una solución particular de

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} u_t - 4u_{xx} - u & = & 0\,, \quad x \in (0,1),\, t>0 \\ u(0,t) & = & 0\,, \quad t > 0\,. \\ u(1,t) & = & e^t\,, \quad t > 0\,. \end{array} \right.
$$

Encontrar u_p aplicando el método de separación de variables

11. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} & = & x\,, \quad x \in (0,1),\, t>0 \\ u(x,0) & = & 0, \quad x \in (0,1)\,, \\ u_t(x,0) & = & 0, \quad x \in (0,1)\,, \\ u(0,t) = u(1,t) & = & 0\,, \quad t > 0\,. \end{array} \right.
$$

teniendo en cuenta que $u_p(x,t) = x(1-x^2)/6$ es una solución particular de

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} & = & x\,, \quad x \in (0,1),\, t>0 \\ u(0,t) = u(1,t) & = & 0\,, \quad t > 0\,. \end{array} \right.
$$

Encontrar u_p aplicando el método de separación de variables

12. Resolver los siguientes problemas de contorno:

a) Problema de Dirichlet en el cuadrado $(0,1) \times (0,1)$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, \quad x, \in (0,1)\ , y \in (0,1)\,, \\ u(0,y) = y(y-1) &, \quad u(1,y) = 0\,, \quad y \in [0,1]\,, \\ u(x,0) = 0 &, \quad u(x,1) = 0\,, \quad x \in [0,1]\,, \end{cases}$$

b). Problema de Neumann en el cuadrado $(0,\pi) \times (0,\pi)$.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, \quad x, y \in (0,\pi)\,, \\ u_x(0,y) = 0 &, \quad u_x(\pi,y) = 0 \quad , y \in [0,\pi]\,, \\ u_y(x,0) = \cos x &, \quad u_y(x,\pi) = 0\,,\ x \in [0,\pi]\,, \end{cases}$$

c). Problema de contorno de tipo mixto en el rectángulo $(0,\pi) \times (0,1)$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, \quad x \in (0,\pi)\ , y \in (0,1)\,, \\ u_x(0,y) = 0 &, \quad u(\pi,y) = 0\,, \quad y \in [0,1]\,, \\ u_y(x,0) = \cos x &, \quad u_y(x,1) = 0\,, \quad x \in [0,\pi]\,, \end{cases}$$

13. Resolver el problema de Dirichlet para una ecuación asociada a la de Laplace, en coordenadas polares (r,θ): $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}u &= 0\,, \quad r \in (1,2),\ \theta \in (0,\frac{\pi}{2})\,, \\ u(r,0) = 0 &, \quad u(r,\frac{\pi}{2}) = 1\,, \quad r \in (1,2)\,, \\ u(1,\theta) &= u(2,\theta) = 0\,, \quad \theta \in (0,\frac{\pi}{2})\,. \end{cases}$$

Dibujar la región del plano xy en que está planteado el problema.

14. Resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace:

$$(a) \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= 0\,, \quad r \in (0,1),\ \theta \in (0,\pi/2)\,, \\ u(r,0) = u(r,\pi/2) &= 0\,, \quad r \in [0,1]\,, \\ u(1,\theta) &= g(\theta)\,, \quad \theta \in [0,\pi/2]\,. \end{cases}$$

r y θ son las coordenadas polares. Dibujar la región del plano xy en que está planteado el problema. Tomar por ejemplo, $g = \sin(2\theta)$ y $g = \theta(\theta - \pi/2)$