Ampliación de Matemáticas - 2^0 Curso, 2020/21

Grado en Ingeniería Civil (Mención en Construcciones Civiles)

HOJA 7 - Tema 5: Problemas de contorno en EDO

Valores propios y desarrollos en serie de Fourier

1. Se considera el modelo de deformaciones de una viga de longitud l, sujeta en los extremos $x = 0$ y $x = l$, y sometidas a fuerzas externas que generan un momento:

$$EIy'' + Ty = p(x), \quad x \in (0, l)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

Tomando $l = \pi$ y $p(x) = e^x$ ($p(x) = \sin(2x)$, respectivamente) calcular la deformación $y(x)$ supuesto que la relación entre las constantes rigidez a flexión EI y esfuerzo axil T es tal que $T/EI = 1$. Hacer lo mismo para $T/EI = -1$. Razonar a qué se deben los resultados.

1.a.-Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = \pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

1.b.- Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = -\pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

2. Resolver los problemas de contorno que se pueda de los que se dan a continuación, determinando si tienen solución única.

$$a). \qquad y'' + 4y = \sin(x), \quad x \in (0, \pi)$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

$$b). \qquad y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

$$c). \qquad \left(\frac{y'}{cos(x)}\right)' = 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{4})$$
$$y(0) + y'(0) = 3, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0$$

$$d). \qquad (x-1)^3 y'' + 3(x-1)^2 y' + (x-1)y = (x-1)^2, \quad x \in (2, 3)$$
$$y(2) = 5, \quad y(3) + 2y'(3) = 0$$

Complemento de prácticas: utilizar MATLAB para resolver con *dsolve* los ejercicios 1-2

3. Encontrar las relaciones entre T y EI en el ejercicio 1, de manera que la viga se deforme para $p(x) = 0$. Tomar $l = 1$ y $l = \pi$.

4. Encontrar los valores propios y las funciones propias de los siguientes problemas de Sturm-Liouville

$a).\begin{cases} y''+\lambda y=0, & x\in(0,1) \\ y(0)=0, & y(1)=0 \end{cases}$ $\qquad b).\begin{cases} y''+\lambda y=0, & x\in(-1,1) \\ y(-1)=0, & y(1)=0 \end{cases}$

$c).\begin{cases} y''+\lambda y=0, & x\in(0,\pi) \\ y'(0)=0, & y(\pi)=0 \end{cases}$ $\qquad d).\begin{cases} y''+\lambda y=0, & x\in(0,\pi) \\ y(0)=0, & y'(\pi)=0 \end{cases}$

$e).\begin{cases} y''+\lambda y=0, & x\in(0,2) \\ y'(0)=0, & y'(2)=0 \end{cases}$ $\qquad f).\begin{cases} (x+1)^2y''+2(x+1)y'+\lambda y=0, & x\in(0,1) \\ y(0)=0, & y(1)=0 \end{cases}$

Desarrollar las funciones $f(x)=1$, $f(x)=e^x$ y $f(x)=x$ en serie de Fourier de las funciones propias de los problemas (a)–(e).

Complemento de prácticas: Crear una función MATLAB que lea n y nos de los n primeros términos del desarrollo en serie de Fourier, relativa a las funciones propias de (a), de una función f continua a trozos en [0,1]. Hacer la gráfica de la función f y de las sumas parciales de la serie comparando la aproximación. Tomar para esto $f(x)=x(x-1)$, $f(x)=x$ y f definida como:

$$f(x)=x \text{ si } x\in[0,1/2], \quad f(x)=0 \text{ si } x\in(1/2,1].$$

5. Encontrar los valores propios y las funciones propias asociadas del problema con condiciones de contorno periódicas:

$$y''+\lambda y=0, \quad x\in(-\pi,\pi)$$

$$y(-\pi)=y(\pi), \quad y'(-\pi)=y'(\pi)$$

4.1.- Desarrollar en serie de Fourier de las funciones propias del problema dado, las siguientes funciones:

$$(a) \qquad f(x)=x, \text{ si } x\in[-\pi,0], \quad f(x)=0, \text{ si } x\in[0,\pi]$$

$$(b) \qquad f(x)=-1, \text{ si } x\in[-\pi,0], \quad f(x)=1, \text{ si } x\in(0,\pi]$$

$$(c) \qquad f(x)=x^2-\pi^2, \text{ si } x\in[-\pi,\pi]$$

4.2.- Expresar la función $f(x)=x+\pi$ definida en $[-\pi,\pi]$ en serie de Fourier de las funciones propias de dicho problema.

4.3.- Expresar la función $g(t)=(t-2)\pi$ definida en $[2,4]$ en serie de las funciones propias obtenidas (para ello, hacer un cambio de variable $x=\alpha t+\beta$, para constantes α y β a determinar, que transforme el intervalo $[2,4]$ en $[-\pi,\pi]$).

6. Encontrar los valores propios y funciones propias de los problemas

   (a)
$$y'' + y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, \ln(2))$$
$$y(0) = 0, \quad y(\ln(2)) = 0$$

   (b)
$$x^2 y'' + xy' + y + \lambda y = 0, \quad x \in (1, 2)$$
$$y(1) = 0, \quad y(2) = 0$$

   Escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = 1$ en términos de las funciones propias de (b) en el intervalo $[1, 2]$. (nota: se puede utilizar (a) para obtener dicho desarrollo).

7. Encontrar los valores propios y las funciones propias del problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\frac{dy}{dr}) + \lambda r y = 0\,, \quad r \in (0, R), \\ y(R) = 0 \quad , \quad y, \frac{dy}{dr} \text{ acotadas cuando } r \to 0\,. \end{cases}$$

8. Escribir en forma autoadjunta las siguientes ecuaciones:
   Ecuación de Legendre: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$
   Ecuación de Bessel: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$
   Ecuación de Laguerre: $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$
   Ecuación de Hermite: $y'' - 2xy' + 2ny = 0\,,$
   n (ν) denota un número natural (real). ¿Qué ecuación aparece en el ejercicio 6?.

   Nota: estas ecuaciones aparecen de manera natural al utilizar la separación de variables para resolver distintos modelos de ingeniería gobernados por EDP