NOMBRE.. **Número**.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2020/21
Ampliación de Matemáticas (EDO)
Examen parcial: 27- Noviembre - 2020

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1
Resolver la ecuación diferencial

$$y' + \sin(x)y = \sin(x).$$

Encontrar la solución que pasa por $(0,0)$, indicando el intervalo de definición de dicha solución. Hacer un dibujo aproximado en el campo de direcciones asociado.
Encontrar las curvas isoclinas para la pendiente 0, dibujarlas en el campo de direcciones dado en $[-2\pi, 2\pi] \times [-4, 4]$ y rayar las regiones de crecimiento de las soluciones, razonando la respuesta.

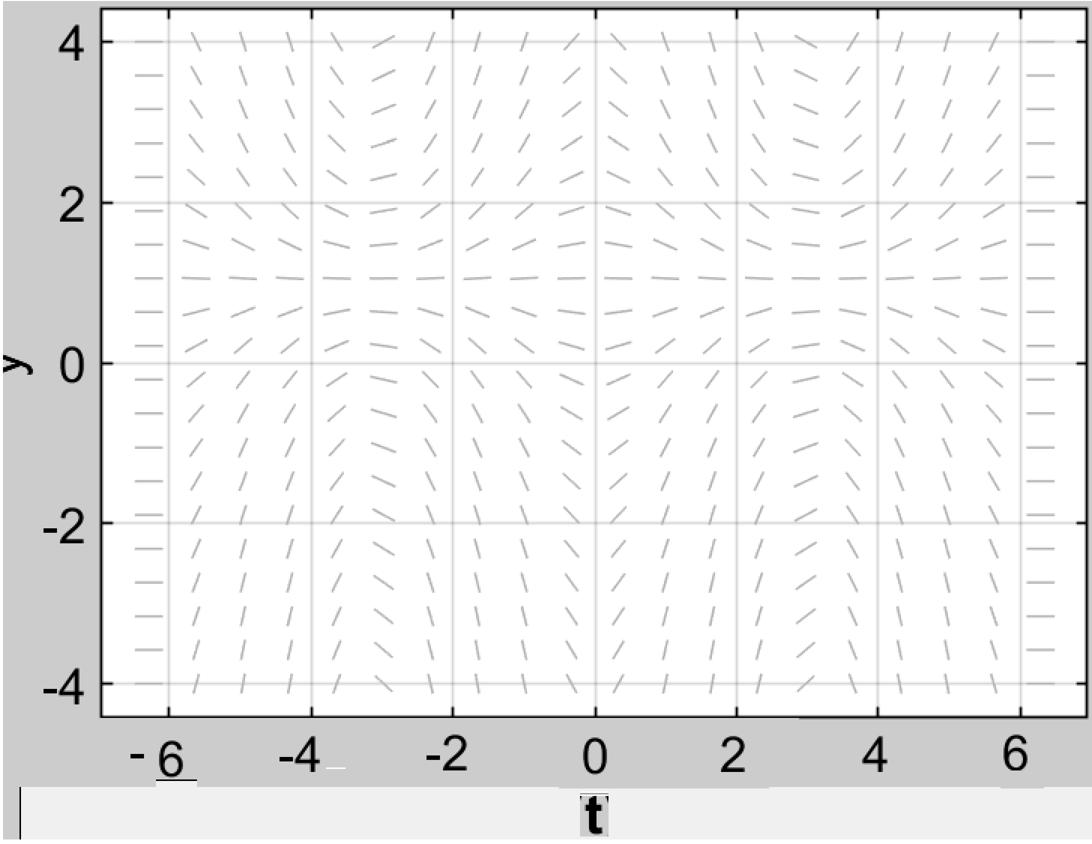
SOLUCIÓN GENERAL

SOLUCIÓN/ y(0)=0..INTERVALO.......................

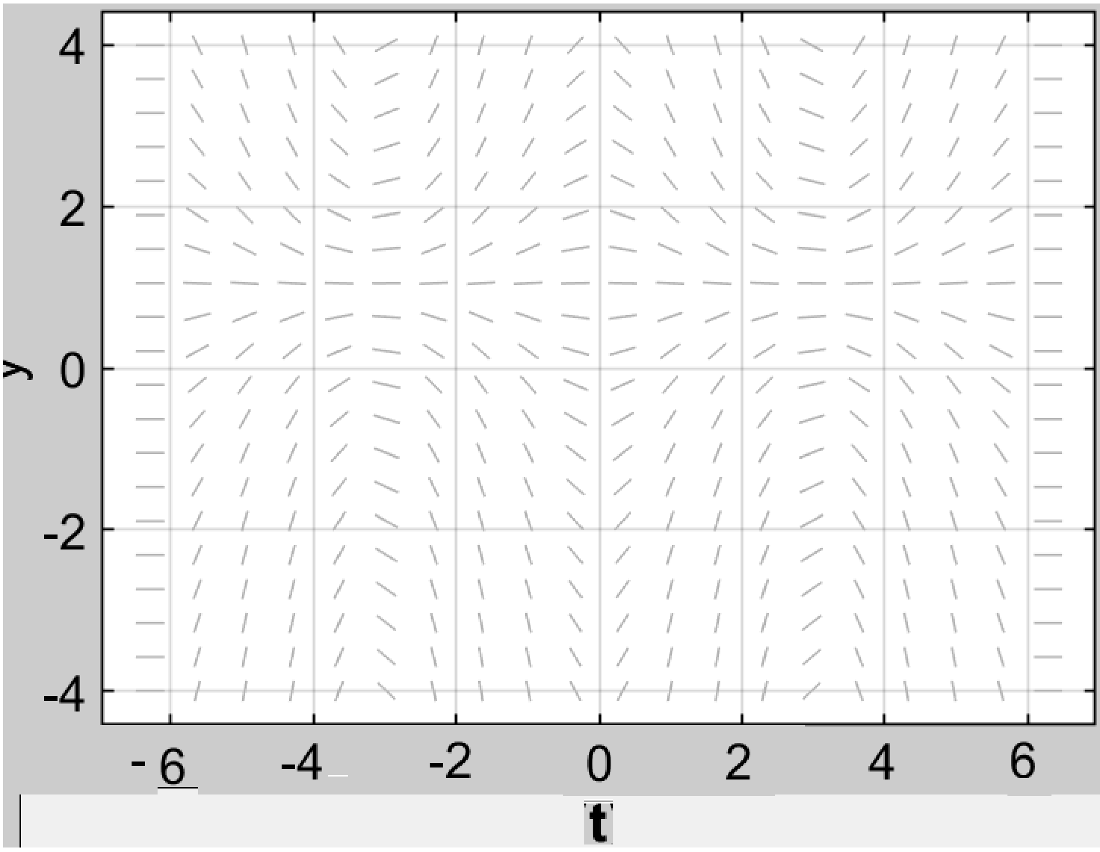
ISOCLINAS para la pendiente 0

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

Dibujar la solución /y(0)=0



Dibujar isóclinas y regiones de crecimiento de las soluciones



RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 2
Resolver el problema de Cauchy

$$y' = 2y - \cos(x)e^{-2x}y^2$$

$$y(0) = 1$$

Encontrar la solución explícita y el intervalo de definición de dicha solución. Dar la aproximación de dicha solución mediante los 3 primeros términos del desarrollo en serie de Taylor. Encontrar la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto $(0, 0)$ y el intervalo de definición de esta.
Razonar cual de los dos campos de direcciones es el asociado a la ED.
En caso de no saber resolver la ED estudiar la existencia y unicidad de solución pasando por cada punto del plano.

SOLUCIÓN GENERAL

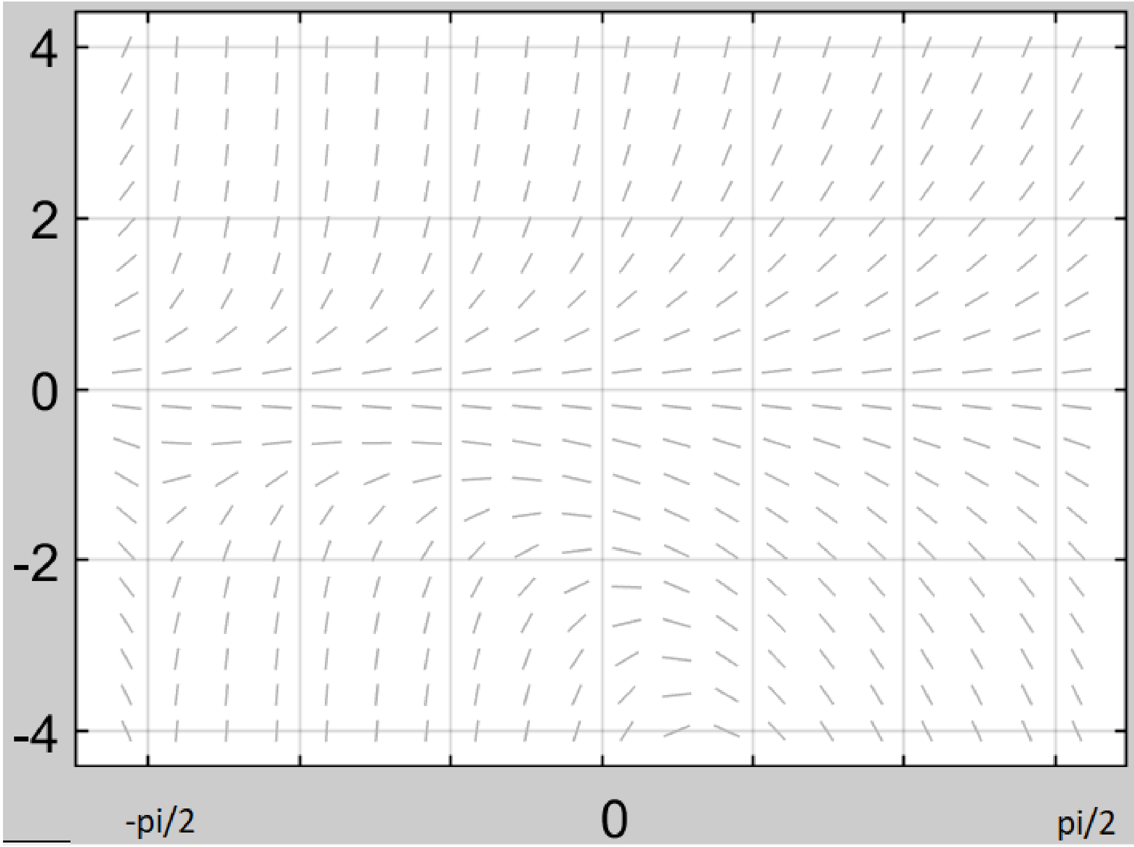
SOLUCIÓN Explícita/$y(0) = 1$ ....INTERVALO.......................

Aproximación..

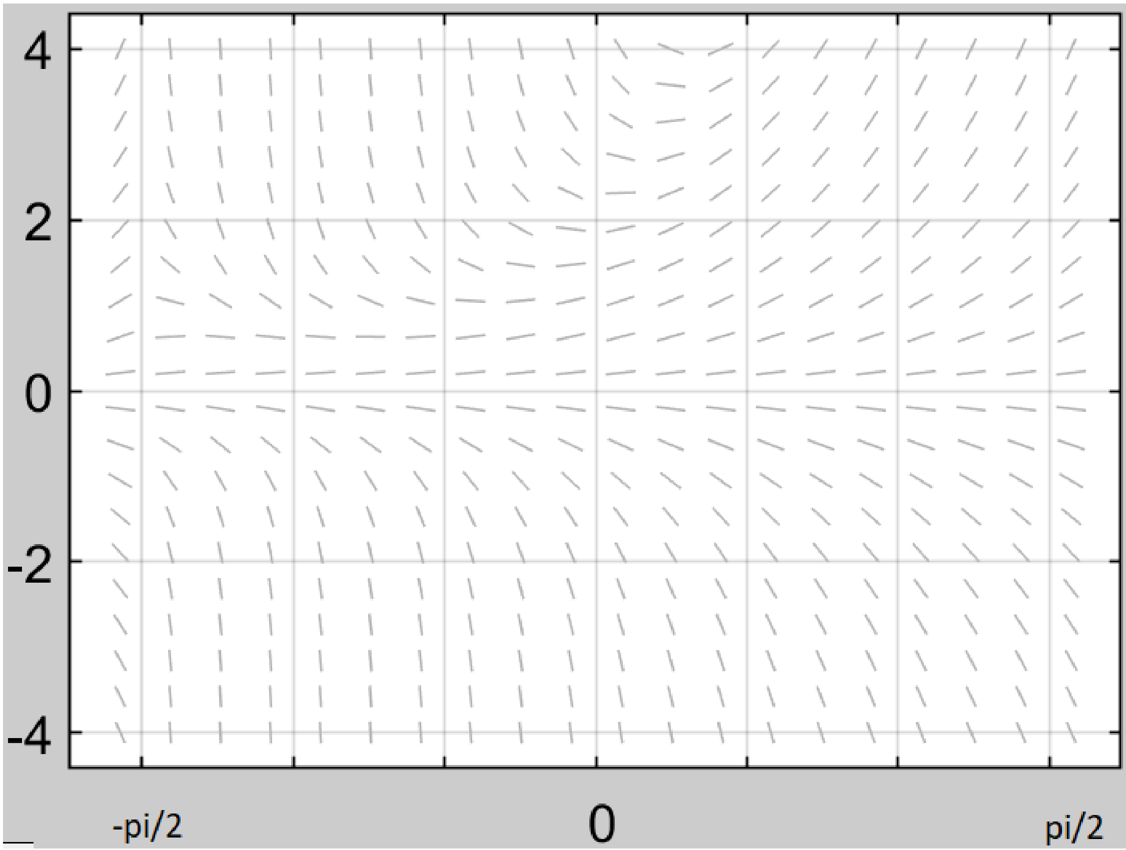
SOLUCIÓN Explícita/$y(0) = 0$ ....INTERVALO.......................

CAMPO I o II
tachar lo que no proceda
razonamiento

I)



II)



RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden indicando el intervalo de definición de la solución

1. $y'' + 4y' - 5y = \cos(x)$

SOLUCIÓN PARTICULAR

SOLUCIÓN GENERAL

INTERVALO

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

2. $$y'' + 4y' + 5y = \frac{e^{-2x}}{\cos(x)}$$

SOLUCIÓN PARTICULAR

SOLUCIÓN GENERAL

INTERVALO.

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4

Se considera la ecuación de tipo Schrodinger

$$y'' + (3 - x^2)y = 0$$

1. Buscar la solución en forma de serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

   Escribir los los 7 primeros términos en función de a_0 y a_1, y encontrar el término general a_n en función de los anteriores. Indicar el intervalo de convergencia de la serie.

2. Dar la aproximación de la solución del problema de Cauchy

$$y'' + (3 - x^2)y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

   mediante los 7 primeros términos del desarrollo en serie de potencias.

3. Demostrar que una solución del problema de Cauchy es $y_1(x) = (ax + b)e^{-x^2/2}$ para algunos valores de a y b. Encontrar dichos valores, y utilizando el método de reducción de orden, escribir otra solución de la ecuación diferencial (dejar las integrales indicadas). Escribir la ED de primer orden a la que se llega y relacionar $y_1(x)$ con la solución aproximada en el apartado anterior.

1.- TERMINOS a_i, $i = 2, 3, 4, 5, 6$

TERMINO GENERAL a_n......... .... para $n \geq$........?

2.-DESARROLLO
en serie de la solución

3.- $y_1(x) =$.............................

$y_2(x) =$..............................

ED de primer orden.
Posible relación

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden :

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$