ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (EDP)
con 2 / 3 /m variables independientes *

▶ **EDP de primer orden** con dos variables independ.

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0\,.$$

x, y **variables independientes;**

$u = u(x, y)$ **función incógnita**.

Resolver la ecuación: encontrar una función u definida en algún dominio $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$, tal que sea continua y admita derivadas parciales primeras en $\mathbf{D}$, y que verifique:

$$F(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) = 0\,, \forall (x, y) \in \mathbf{D}\,.$$

Notaciones:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$F(x, t, u, u_x, u_t) = 0, \qquad t \equiv y, \qquad t - \textit{variable temporal}$$

Ejemplos:

▷ **Ecuación de ondas:** $\quad u_t - c u_x = 0\,, \quad u(x, 0) = f(x)$

Solución: $\quad u(x, t) = f(x + ct)$ $\quad$ *onda*

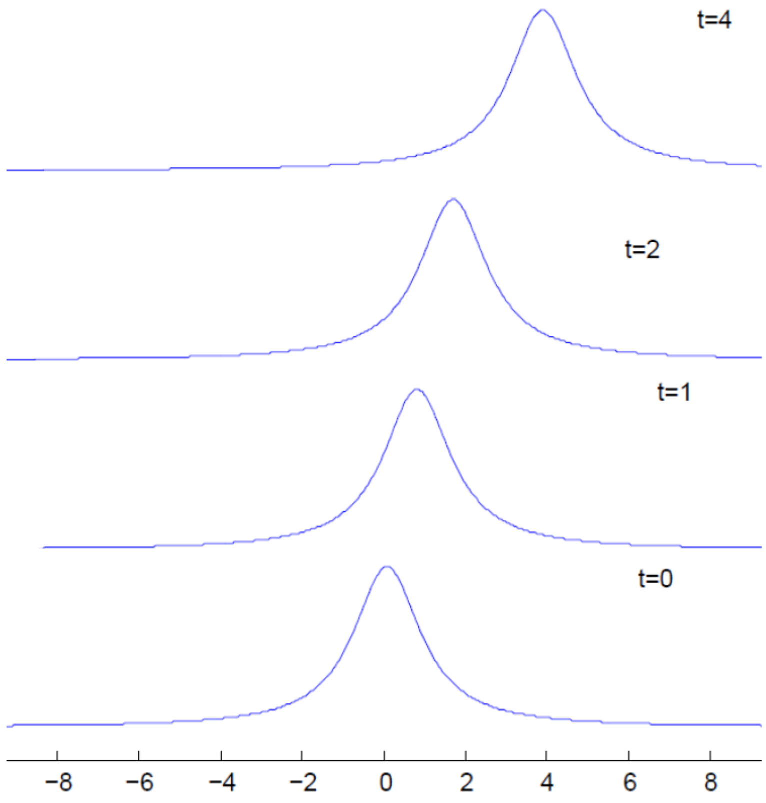
que viaja hacia la derecha (izquierda) si $c < 0$ ($c > 0$)

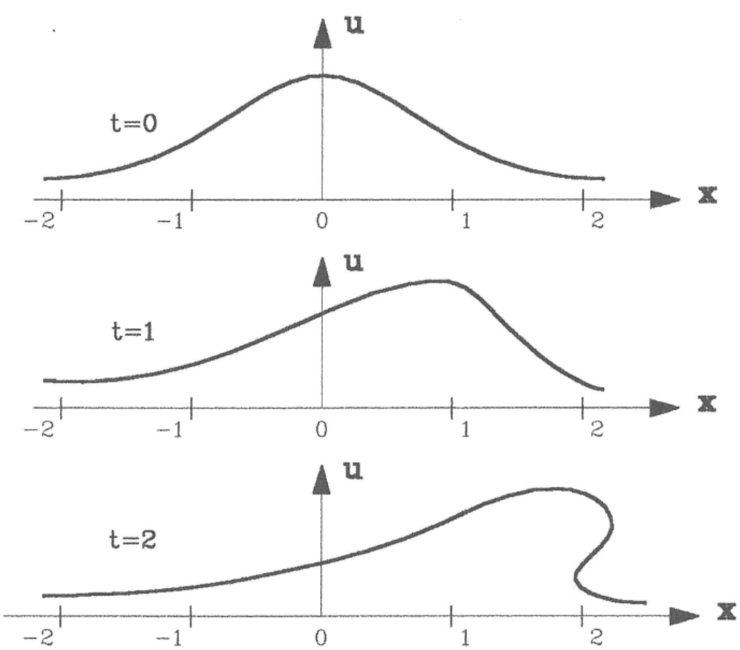
▷ **Ecuación de Burgers:** $u_t + u u_x = 0\,, u(x, 0) = f(x)$

Solución: $u = f(\xi), \quad x = f(\xi)\tau + \xi, \quad t = \tau$

* **Resúmenes / Capítulo 6 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

Distintos aspectos de la propagación de ondas: EDP de primer orden





▶ **EDP de segundo orden** con dos variables independ.

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})=0\,.$$

Se pide a la solución u que admita derivadas parciales segundas en $\mathbf{D}$, y "que verifique la ecuación".

▶ **EDP parciales, de orden k, con** m variables indep.

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_m},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\cdots$$

$$\cdots,\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3},\cdots,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k},\cdots,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{r_1}\partial x_2^{r_2}\cdots\partial x_k^{r_k}},\cdots,\frac{\partial^k u}{\partial^k x_m})=0\,.$$

▶ **EDP Lineal,** de segundo orden, con 2 variables indep.

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=p(x,y)\,,\quad \mathbf{(LNH)}$$

los coeficientes A,B,C,D,E y F pueden ser funciones dependientes de (x,y) o constantes: *ecuación lineal con coeficientes constantes*.

Si $p(x,y)=0$: *ecuación lineal homogénea*:

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=0,\quad \mathbf{(LH)}$$

Propiedades de las soluciones de (LH)-(LNH)

- Si $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ soluciones de (LH) $\Rightarrow$ cualquier combinación lineal de ellas, $c_1u_1(x,y)+c_2u_2(x,y)$, es solución de (LH)

- Si $u(x,y)$ y $u_p(x,y)$ soluciones de (LNH) $\Rightarrow$ $u(x,y)-u_p(x,y)$ es solución de (LH)

A=B=C=0 $\Rightarrow$ (LH)-(LNH) EDP lineales de 1er orden

Clasificación de las EDP lineales de 2^0 orden.

▶ **EDP semilineal** con dos variables independientes

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = \widetilde{F}(x, y, u, u_x, u_y)$$

Fara ecuaciones lineales: $\widetilde{F} \equiv Du_x + Eu_y + Fu + p(x, y)$

Posibilidad de reducción a una *forma canónica*, según que el *discriminante* $AC - B^2$ sea positivo, nulo o negativo, mediante un cambio de variables

$\zeta = \alpha x + \beta y\,, \quad \eta = \delta x + \gamma y \quad$ / Jacobiano: $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0\,,$

para ciertas constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

1. Si $AC - B^2 > 0$, ecuación de **tipo elíptico** $\longmapsto$
$$u_{\zeta\zeta} + u_{\eta\eta} = G(\zeta, \eta, u, u_\zeta, u_\eta)$$

2. Si $AC - B^2 = 0$, ecuación de **tipo parabólico** $\longmapsto$
$$u_\eta - u_{\zeta\zeta} = G(\zeta, \eta, u, u_\zeta, u_\eta)$$

3. Si $AC - B^2 < 0$, ecuación de **tipo hiperbólico** $\longmapsto$
$$u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = G(\zeta, \eta, u, u_\zeta, u_\eta)$$

Definición: *rectas o curvas características* (si $A \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Observaciones:

- Necesidad de añadir condiciones adicionales a las ecuaciones para la descripción de fenómenos físicos.

- Importancia de las rectas características para añadir condiciones adicionales.

- Extensión a más variables independientes: con restricciones!

▶ Ecuaciones elípticas $\longleftrightarrow$ ***procesos estacionarios***

▶ Ecuaciones parabólicas o hiperbólicas $\longleftrightarrow$ ***procesos de propagación o de difusión***

▶ **Ejemplos de ecuaciones en forma Canónica:**

- La ecuación de Laplace (*elíptica*):

$$u_{xx} + u_{yy} = p(x, y)$$

  No tiene rectas características reales

- La ecuación del calor (*parabólica*):

$$u_t - a^2 u_{xx} = p(x, t), \quad t \equiv y, \quad a \text{ contante}$$

  Rectas características: $t = cte$

- La ecuación de ondas (*hiperbólica*):

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = p(x, t), \quad t \equiv y, \quad a \text{ contante}$$

  Rectas características $x + at = cte$; $x - at = cte$

▶ **Interesan** problemas bien planteados: existe solución, es única y a pequeñas variaciones de los datos le corresponden pequeñas variaciones de la solución

▶ **Tipos de problemas:**

- Problemas de Cauchy o de valor inicial $\longleftrightarrow$ datos conocidos sobre una curva no característica (*condiciones iniciales*)

- Problemas de contorno $\longleftrightarrow$ ecuación planteada en un dominio conocido $\mathbf{D}$ y datos conocidos sobre la frontera de $\partial\mathbf{D}$ (*condiciones de contorno*).

- Problemas mixtos: *condiciones iniciales* y *condiciones de contorno*

Galería de EDP:

- ecuaciones de 2^o orden, 2 variables independientes
  - Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$
  - difusión del calor: $u_t - a^2 u_{xx} = f(t, x)$
  - propagación de ondas: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t, x)$
  - de ondas amortiguadas: $u_{tt} + c u_t = a^2 u_{xx}$
  - ecuación del telegrafista: $u_{tt} + c u_t + b u = a^2 u_{xx}$

- ecuaciones de 2^o orden, 3 / más variables indep.
  - Laplace: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$
  - calor: $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(t, x, y)$
  - ondas: $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(t, x, y)$

$$\Delta u = f \quad / \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad / \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

- ecuaciones de 4^o orden, 2 variables independientes
  - vibraciones de vigas: $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = f(t, x)$
  - deformaciones de placas: $\Delta^2 u = f(x, y)$

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

- sistema de la elasticidad lineal: $i = 1, 2, 3$

$$-\mu \Delta u_i - (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(div(\bar{u})) = f_i(x_1, x_2, x_3)$$

3 variables independientes, 3 funciones incógnitas:
$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ desplazamientos del punto x en las direcciones de los ejes x_i

λ, μ coef. de Lamé, f_i componentes de una fuerza

$div(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$

Problemas planteados con EDP Lineales

Problemas de Contorno: EDP de tipo elíptico

Dado el dominio $\mathbf{D}$ de $\mathbf{R}^2$ y las funciones $p(x,y)$ en $\mathbf{D}$ y $f(x,y)$ y $g(x,y)$ conocidas en la frontera $\mathbf{D}$: $\quad \Gamma \equiv \partial\mathbf{D}$,

se plantea encontrar la solución de la ecuación (con coeficientes no necesariamente constantes)

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=p(x,y)\,, \quad (x,y)\in\mathbf{D}$$

verificando una condición de contorno sobre la frontera:

c. Dirichlet $\quad u(x,y)=f(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma$

c. Neumann $\quad \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y)=g(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma$

para $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, c. de contorno mixtas

$$u(x,y)=f(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma_1\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)=g(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma_2$$

SOLUCIÓN: Buscar $u(x,y)$ que admita derivadas parciales segundas “verificando” la ecuación EDP en $\mathbf{D}$ y las condiciones de contorno sobre Γ.

SEPARACIÓN DE VARIABLES:

Buscar $u(x,y) = X(x).Y(y)$ y llegar a una ecuación diferencial ordinaria en la variable independiente x y otra en la variable independiente y

En general, nos lleva al cálculo de valores propios y funciones propias para problemas de contorno en EDO, y a los desarrollos en serie de Fourier de funciones

Problemas de contorno planteados para la Ecuación de Laplace:

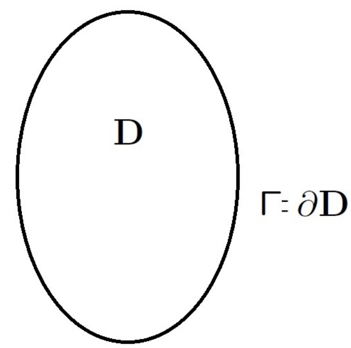
Sea $\mathbf{D}$ un dominio del plano y $\partial\mathbf{D}$ su frontera

e.g.: $\mathbf{D} = \{(x,y)/x^2+y^2 < 1\}$; $\partial\mathbf{D} = \{(x,y)/x^2+y^2 = 1\}$

Dadas las funciones $F(x,y)$, $f(x,y)$, $g(x,y)$

▶ **Problema de Dirichlet**:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x,y)\,, & (x,y) \in \mathbf{D}\,, \\ u(x,y) = f(x,y)\,, & (x,y) \in \partial\mathbf{D}\,. \end{cases}$$



u conocida sobre la frontera

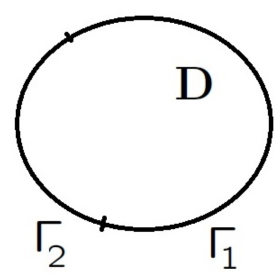
▶ **Problema de Neumann**

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x,y)\,, & (x,y) \in \mathbf{D}\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = f(x,y)\,, & (x,y) \in \partial\mathbf{D}\,. \end{cases}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ conocida sobre la frontera

▶ **Problema de Contorno Mixto:**

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = F(x,y)\,, & (x,y) \in \mathbf{D}\,, \\ u(x,y) = f(x,y)\,, & (x,y) \in \Gamma_1\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = f(x,y)\,, & (x,y) \in \Gamma_2\,. \end{cases}$$



Condición de Dirichlet sobre una parte de la frontera Γ_1 y Neumann sobre la otra parte Γ_2: $\partial\mathbf{D} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

Resolución:

- Separación de variables si $\mathbf{D}$ rectángulo, círculo,....

- Métodos numéricos para dominios más generales

Problemas planteados para la ecuación de Ondas

-Problema de Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt}-a^2u_{xx} &=& 0\,, \quad x\in(-\infty,\infty),\ t>0 \\ u(x,0) &=& f(x)\,, \quad x\in(-\infty,\infty) \\ u_t(x,0) &=& g(x)\,, \quad x\in(-\infty,\infty)\,. \end{array}\right.$$

Solución: *fórmula de d' Alembert*

$$u(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds$$

Demostración: $\zeta=x+at,\ \eta=x-at \longleftrightarrow u_{\zeta\eta}=0.$

-Problema Mixto:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt}-a^2u_{xx} &=& 0\,, \quad x\in(0,l),\ t>0 \\ u(x,0) &=& f(x)\,, \quad x\in(0,l) \\ u_t(x,0) &=& g(x)\,, \quad x\in(0,l) \\ u(0,t) &=& 0\,, \quad t\geq 0 \\ u(l,t) &=& 0\,, \quad t\geq 0 \end{array}\right.$$

Resolución: separación de variables (buscar $u(x,t)=X(x)T(t)$ y llegar a un problema de valores propios en la variable espacial)

Extensiones:

- EDP no homogénea: $u_{tt}-a^2u_{xx}=F(x,t)$.
- c.contorno no homogéneas: dadas $l_1(t)$ y $l_2(t)$,
  $u(0,t)=l_1(t), \quad u(l,t)=l_2(t)$.
- condiciones sobre las derivadas en los extremos:
  $u_x(l,t)=0, \quad$ o $\quad u_x(l,t)=l_2(t), \quad$ o
  $u_x(l,t)+\beta u(l,t)=l_2(t), \quad \beta$ una constante dada.

Problemas planteados para la Ecuación del Calor

-**Problema de Cauchy:**

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0\,, & x \in (-\infty, \infty),\, t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

Solución: *fórmula de Poisson*

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4ta^2}}\, d\zeta\,.$$

Demostración: Transformación de Fourier

-**Problema Mixto**:

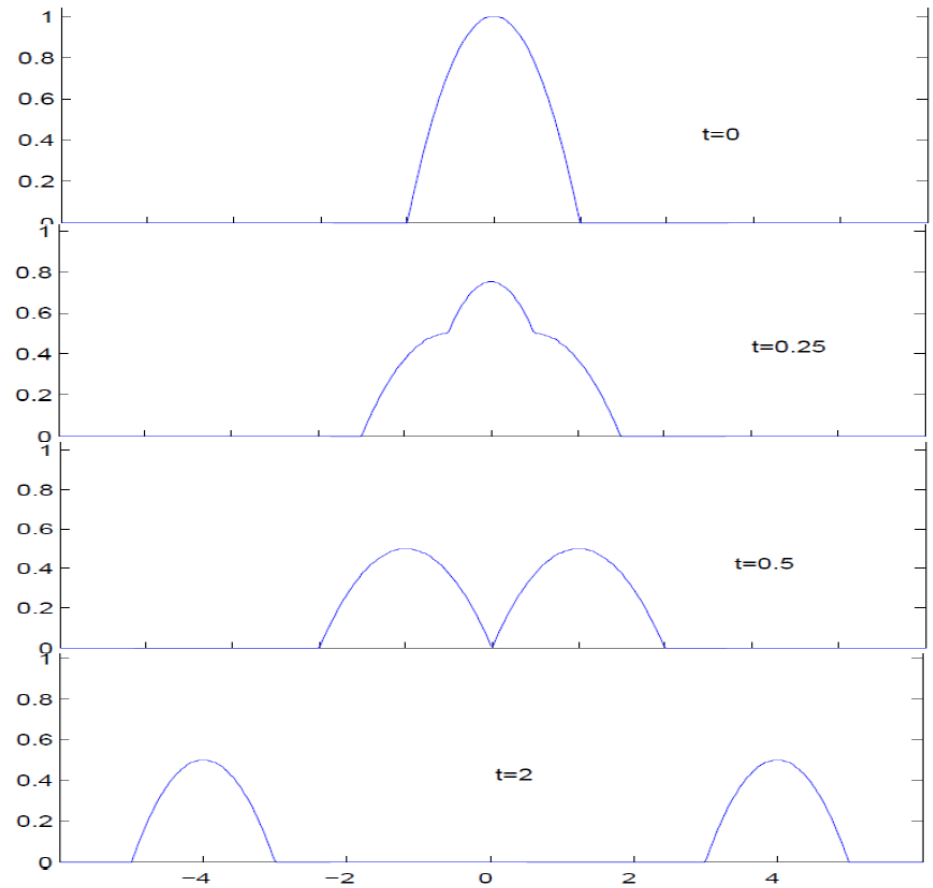
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0\,, & x \in (0,l),\, t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\,, & x \in (0,l)\,, \\ u(0,t) = 0\,, & t \geq 0 \\ u(l,t) = 0\,, & t \geq 0 \end{cases}$$

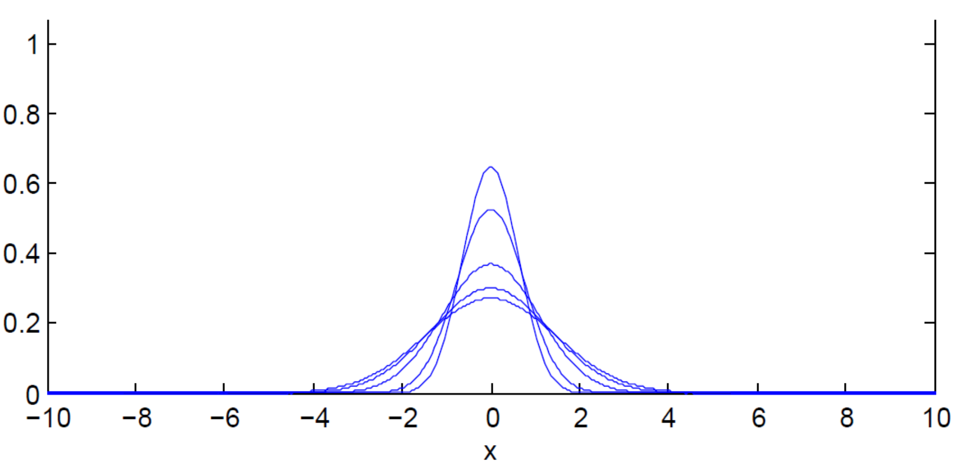
Resolución: separación de variables (buscar $u(x,t) = X(x)T(t)$ y llegar a un problema de valores propios en la variable espacial)

Extensiones:

- EDP no homogénea: $u_t - a^2 u_{xx} = F(x,t)$.
- c.contorno no homogéneas: dadas $l_1(t)$ y $l_2(t)$,
  $u(0,t) = l_1(t), \quad u(l,t) = l_2(t)$.
- condiciones sobre las derivadas en los extremos:
  $u_x(0,t) = 0, \quad$ o $\quad u_x(0,t) = l_2(t), \quad$ o
  $u_x(0,t) + \beta u(0,t) = l_2(t), \quad \beta$ una constante dada.

Distintos aspectos de la propagación de ondas y difusión del calor





La Transformada de Fourier

Para f continua a trozos en $(-\infty, \infty)$ y tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty\,,$$

la transformada de Fourier de f en ζ es la integral

$$\mathcal{F}[f](\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\zeta} f(x)\, dx\,.$$

Denotando pr $F(\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta)$, F es una función de la variable $\zeta \in \mathbf{R}$, con valores en $\mathbf{C}$. *La transformada inversa de Fourier de F* se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\zeta} F(\zeta)\, d\zeta\,,$$

Resultado de inversión: $\mathcal{F}^{-1}[F](x) = f(x)$.

Algunas propiedades de la transformada de Fourier

1. $\mathcal{F}[c_1 f + c_2 g](\zeta) = c_1 \mathcal{F}[f](\zeta) + c_2 \mathcal{F}[g](\zeta)\,,$

   supuesto que $\mathcal{F}[f](\zeta), \mathcal{F}[g](\zeta)$ existan, y c_1 y c_2 son constantes cualesquiera.

2. $\mathcal{F}[f'](\zeta) = -i\zeta \mathcal{F}[f](\zeta)$, $\mathcal{F}[f^{(n)}](\zeta) = (-i\zeta)^n \mathcal{F}[f](\zeta)$,

   supuesto que $f, f', \cdots, f^{(n)}$ existan, sean absolutamente integrables, $f^{(n)}$ continua a trozos en $(-\infty, \infty)$ y las $(n-1)$ primeras derivadas de f converjan a 0 cuando $x \to \pm\infty$.

3. $\mathcal{F}[f * g](\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta)\, \mathcal{F}[g](\zeta)$,

   supuesto que f y g son funciones continuas a trozos en $(-\infty, \infty)$ y absolutamente integrables, y una de ellas, f ó g, es continua y acotada en $(-\infty, \infty)$. $f * g$ es la función definida por: $f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\, dt\,.$