PROBLEMAS DE CONTORNO[*]

La forma más general de un problema de contorno para una ecuación de segundo orden es:

$$
\textbf{(PC)}\left\{\begin{array}{rcl}
a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = h(x) & , & x\in(a,b),\\
\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)+\alpha_3 y(b)+\alpha_4 y'(b) & = & \gamma_1\,,\\
\beta_1 y(a)+\beta_2 y'(a)+\beta_3 y(b)+\beta_4 y'(b) & = & \gamma_2\,,
\end{array}\right.
$$

$a_0(x)\neq 0$ en $[a,b]$ y las constantes α_i, β_i afectando a a (b respectivamente) no todas nulas. γ_i constantes

Definiciones:

- En el caso $h(x) = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ se dice que el problema (**PC**) es **un problema de contorno homogéneo**.

- Si en las condiciones de contorno $\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, se dice que las **condiciones** son **de tipo separado**.

- Si $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ se dice que las **condiciones de contorno** son **periódicas**.

- (**PC**) es un **problema de contorno regular** si:

$$
\textbf{(PC}R\textbf{)}\left\{\begin{array}{rcl}
(\widetilde{p}(x)y')'+q(x)y & = & h(x)\,, \quad x\in(a,b),\\
\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a) & = & \gamma_1\,,\\
\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b) & = & \gamma_2\,,
\end{array}\right.
$$

  $\widetilde{p}(x), \widetilde{p}'(x), q(x), h(x)$ funciones continuas en $[a,b]$, $\widetilde{p}(x) > 0\,,\ \forall x\in[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, y $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

- Es un problema de contorno **singular** si no es regular.

[*] **Resúmenes / Capítulo 5 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

- **Ecuación en forma autoadjunta**:

$$(\widetilde{p}(x)y')' + q(x)y = h(x)$$

REDUCCION A FORMA AUTOADJUNTA:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = h \longrightarrow (py')' + qy = \tilde{h}$$

multimplicando por

$$r(x) = \frac{\text{exp}(\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx)}{a_0(x)},$$

$\widetilde{p}(x) = \text{exp} \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx,\ q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}\text{exp} \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx,$
$\tilde{h}(x) = \frac{h(x)}{a_0(x)}\text{exp} \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx.$

*De manera general, el problema de contorno homogéneo asociado a (**PC**R) o (**PC**) tiene especial interés: la alternativa de Fredholm!*

$$(\mathbf{PC}R) \left\{ \begin{array}{rcll} (\widetilde{p}(x)y')' + q(x)y & = & h(x)\,, & x \in (a,b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) & = & \gamma_1\,, & \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) & = & \gamma_2\,, & \end{array} \right.$$

$$(\mathbf{PC}H) \left\{ \begin{array}{rcll} (\widetilde{p}(x)y')' + q(x)y & = & 0\,, & x \in (a,b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) & = & 0\,, & \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) & = & 0\,. & \end{array} \right.$$

Teorema 1 *El problema de contorno (**PC**R) admite solución y ésta es única para cualesquiera valores de las constantes γ_1, γ_2 y para cualquier función $h(x)$ si y sólo si el problema homogéneo asociado (**PCH**) admite sólo la solución trivial $y \equiv 0$.*

Definición: problemas de valores propios regulares

Encontrar los valores λ (*valores propios*) tales que existe una solución no nula $y(x)$ (*función propia*) de:

$$
\textbf{(PVP)} \left\{ \begin{array}{rcll} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda s(x)y & = & 0\,, & x \in (a,b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) & = & 0\,, & \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) & = & 0\,, & \end{array} \right.
$$

$p(x), p'(x), q(x), s(x)$ funciones continuas en $[a,b]$,
$s(x), p(x) > 0\,,\ \forall x \in [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$,
y $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

Teorema

1. *Existe una infinidad numerable de valores propios que convergen a infinito:*
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to \infty\,, k \to \infty.$$

2. *Para cada valor propio, λ_k, hay una única función propia asociada, $\phi_k(x)$, linealmente independiente.*

3. *Funciones propias asociadas a distintos valores propios son ortogonales entre sí en el intervalo (a,b), para el peso s; es decir:*
$$\int_a^b \phi_k(x)\phi_j(x)s(x)\,dx = \delta_{kj} Cte.\,, \forall k, j = 1, 2, 3, \cdots\,.$$

4. *Para cada función $f(x)$ continua a trozos en $[a,b]$ admite un* desarrollo en serie de Fourier de las funciones propias *$\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:*
$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x)\,,$$
donde las constantes c_n son los llamados coeficientes de Fourier *y están dados por la fórmula:*
$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}\,.$$
La convergencia de la serie en hacia la función f tiene lugar en el sentido de la media cuadrática*; es decir:*
$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k(x)|^2 s(x)\,dx \to 0 \text{ *cuando* } N \to \infty\,.$$

Extensiones: sobre convergencia serie / sobre c.c. periódicas

Observación:

- Si las condiciones de contorno son periódicas ($y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$), se tienen los resultados del teorema: ahora para cada valor propio $\lambda_k > \lambda_1$ puede haber dos funciones propias linealmente independientes asociadas.

- El sumatorio del desarrollo en serie se extiende a todas las funciones propias.

Desarrollo clásico de Fourier en $[-\pi, \pi]$ en término de las funciones $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$:

Dada $f(x)$ continua a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$,

$$f(x) \approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)\,,$$

donde

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\,,$$

$\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$ son funciones propias del PVP:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0\,, & x \in (-\pi, \pi), \\ y(-\pi) = y(\pi)\,, & y'(-\pi) = y'(\pi)\,. \end{cases}$$

$\phi_{0,0}(x) = 1$ asociada al valor propio $\lambda_0 = 0$

$\phi_{k,1}(x) = \cos(kx)$, $\phi_{k,2}(x) = \sin(kx)$ f.p. linealmente independientes asociadas al valor propio $\lambda_k = (k\pi)^2$.

Ortogonales!: para $k, j = 0, 1, 2\cdots$, $m, n = 0, 1, 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{k,m}(x)\phi_{j,n}(x)\,dx = 0, \qquad \text{si } (k,m) \neq (j,n)$$

Otras propiedades de los coeficientes de Fourier

$$\textbf{(PVP)} \left\{ \begin{array}{rcll} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda s(x)y & = & 0\,, & x \in (a,b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) & = & 0\,, & \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) & = & 0\,, & \end{array} \right.$$

$f(x)$ continua a trozos en $[a,b]$ su *desarrollo en serie de Fourier de las funciones propias* $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x)\,,$$

c_n son *coeficientes de Fourier*:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}\,.$$

La convergencia es *media cuadrática*; es decir:

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k(x)|^2 s(x)\,dx \to 0 \text{ cuando } N \to \infty\,.$$

Los c_n son tales que hacen que la convergencia es en media sea la más rápida: minimizan el funcional

$$F(c_1, c_2, \cdots, c_N) = \int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k(x)|^2 s(x)\,dx\,.$$

Teorema.

Sea $f(x)$ una función continua a trozos en $[a,b]$ tal que su derivada también lo es. Entonces, la serie de Fourier de las funciones propias del problema PVP, converge en cada punto $x \in (a,b)$ hacia el valor $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. Si además f satisface las condiciones de contorno de PVP, entonces la serie también converge en los extremos del intervalo.