

SISTEMAS DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN CON n ECUACIONES y n INCÓGNITAS *

Sistema con n ecuaciones en forma normal:

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots & \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

x variable independiente,

$\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ funciones incógnita

Reducción de una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

a un sistema: Hacer

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)} \Rightarrow \begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ \dots & \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Si $f_i = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \dots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$ se tiene un **sistema diferencial lineal**:

$$(\text{SLNH}) \begin{cases} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \dots & \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x). \end{cases}$$

Un problema de Cauchy asociado: Resolver (SLNH) con los datos iniciales dados:

$$(\text{DI}) \quad y_1(x_0) = y_0^1, y_2(x_0) = y_0^2, \dots, y_n(x_0) = y_0^n.$$

Teorema 1 Cuando todas las funciones $a_{ij}, b_j, i, j = 1, 2, \dots, n$, de (SLNH) son continuas en el intervalo (α, β) , $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $y, (y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^n)$ es cualquier punto de \mathbf{R}^n , entonces, existe una única solución de (SLNH)-(DI) definida en (α, β) .

Sistemas diferenciales lineales con n ecuaciones.

Sistema no homogéneo:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x) \quad (\text{SLNH})$$

en **notación vectorial**, donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

\bar{y}, \bar{b} son los vectores columna:

$$\bar{y}(x) = (y^1(x), y^2(x), \dots, y^n(x))^T, \text{ y } \bar{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x))^T,$$

$$a_{i,j}, b_j : I = (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ funciones continuas}$$

Problema de Cauchy: dados $x_0 \in I, \bar{y}_0 \in \mathbf{R}^n$.

$$(PC) \begin{cases} \bar{y}' & = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x), \\ \bar{y}(x_0) & = \bar{y}_0, \end{cases}$$

Solución general de (SLNH):

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_{GH}(x) + \bar{y}_p(x),$$

$\bar{y}_p(x)$ es una solución particular de **(SLNH)**
 $\bar{y}_{GH}(x)$ es la solución general del **sistema homogéneo** asociado:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} \quad (\text{SLH})$$

Si $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$ son n soluciones de **(SLH)**, se denomina **matriz solución** del sistema homogéneo:

$$\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)).$$

$$\text{Se verifica: } \Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x)$$

$\Phi(x)$ es una **matriz fundamental** de **(SLH)** si $\det(\Phi(x)) \neq 0$

El **Wronskiano** de $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)$ es la función:

$$W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x) = |\Phi(x)| = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ y_1^2(x) & y_2^2(x) & \cdots & y_n^2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{vmatrix}$$

Definición: k funciones vectoriales $\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \dots, \bar{\varphi}_k(x)$ son **linealmente independientes** en el intervalo $I = (\alpha, \beta)$ cuando

$$\alpha_1 \bar{\varphi}_1(x) + \alpha_2 \bar{\varphi}_2(x) + \dots + \alpha_k \bar{\varphi}_k(x) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$:

1. Si $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_k(x)$ son soluciones de **(SLH)** en I , entonces cualquier combinación lineal de ellas $\alpha_1 \bar{y}_1(x) + \alpha_2 \bar{y}_2(x) + \dots + \alpha_k \bar{y}_k(x)$ es también solución de **(SLH)** en I .
2. n soluciones $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)$ de **(SLH)** son linealmente independientes en I si y sólo si para cualquier punto $x_0 \in I$ se verifica $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x_0) \neq 0$.
3. n soluciones $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)$ de **(SLH)** son linealmente independientes en I si y sólo si para cualquier punto $x_0 \in I$, los vectores $\bar{y}_1(x_0), \bar{y}_2(x_0), \dots, \bar{y}_n(x_0)$ son linealmente independientes en \mathbf{R}^n .
4. Dadas n soluciones $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)$ de **(SLH)** linealmente independientes en I , cualquier otra solución $\bar{y}(x)$ es:

$$\bar{y}(x) = \alpha_1 \bar{y}_1(x) + \alpha_2 \bar{y}_2(x) + \dots + \alpha_n \bar{y}_n(x), \quad \forall x \in I,$$

para algunas constantes α_i .

$\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$ son un **conjunto fundamental de soluciones de (SLH) en I** .

$\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x))$ es una **matriz fundamental de (SLH)**, y $\bar{y}(x) = \Phi(x)\bar{\alpha}$, donde $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$

5. **Identidad de Abel:** dado un punto cualquiera $x_0 \in I$, y n soluciones de **(SLH)**, se verifica

$$W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x) = e^{\int_{x_0}^x \text{Traza}(A(s)) ds} W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x_0)$$

6. Sean $\{\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x)\}$ n soluciones de **(SLH)** en I , son linealmente independientes si y sólo si $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x) \neq 0, \forall x \in I$ (evidentemente, basta con comprobar que el Wronskiano es no nulo en un punto fijo cualquiera x_0 de I).
7. Hay n soluciones linealmente independientes de **(SLH)** y no más: $\exists n$ vectores linealmente independientes en \mathbf{R}^n .

SOLUCION DEL SISTEMA NO HOMOGENEO:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x) \quad (\text{SLNH})$$

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} \quad (\text{SLH})$$

Si se conocen n soluciones de **(SLH)**, $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n\}$, linealmente independientes en I ($\Leftrightarrow W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x) \neq 0, \forall x \in I \Leftrightarrow \exists x_0 \in I / W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n](x_0) \neq 0$) la solución general de **(SLNH)** es:

$$\bar{y}_{GNH}(x) = \alpha_1 \bar{y}_1(x) + \alpha_2 \bar{y}_2(x) + \dots + \alpha_n \bar{y}_n(x) + \bar{y}_p(x),$$

donde los α_i son constantes y $\bar{y}_p(x)$ es una solución particular de **(SLNH)**.

En notación vectorial: $\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \dots, \bar{y}_n(x))$ es la matriz fundamental de **(SLH)**, y la solución general del sistema **(SLH)**:

$$\bar{y}_{GH}(x) = \Phi(x) \cdot \bar{k} \quad \text{con } \bar{k} \text{ vector constante.}$$

La solución general del sistema **(SLNH)**:

$$\bar{y}_{GNH}(x) = \Phi(x) \cdot \bar{k} + \bar{y}_p(x)$$

BÚSQUEDA de SOLUCIÓN PARTICULAR de (SLNH) $\bar{y}_p(x)$, por el **método de variación de parámetros**:

$$\bar{y}_p(x) = \Phi(x) \cdot \bar{c}(x) = c_1(x)\bar{y}_1(x) + c_2(x)\bar{y}_2(x) + \dots + c_n(x)\bar{y}_n(x),$$

$$\text{donde } \bar{c}(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x))^T.$$

$\bar{c}(x)$ se determina derivando y substituyendo en **(SLNH)**

$$\Phi(x) \cdot \bar{c}'(x) = \bar{b}(x).$$

$$\bar{y}_p(x) = \Phi(x) \cdot \int \Phi(x)^{-1} \cdot \bar{b}(x) dx,$$

y la solución general del sistema **(SLNH)** es

$$\bar{y}_{GNH}(x) = \Phi(x) \cdot (\bar{k} + \int \Phi(x)^{-1} \cdot \bar{b}(x) dx).$$

Sistema homogéneo con coeficientes constantes.

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

donde A es una matriz constante $n \times n$

Se busca $\bar{y} = e^{\lambda x} \bar{c} \Rightarrow \lambda$ debe ser un valor propio de A
 \bar{c} un vector propio asociado.

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (A - \lambda I)\bar{c} = 0$$

Posibilidades para $n = 2$:

1. Hay dos valores propios reales distintos λ_1, λ_2 .

\bar{c}_i un vector propio asociado a λ_i , $i = 1, 2$ - El conjunto fundamental de soluciones:

$$\{e^{\lambda_1 x} \bar{c}_1, e^{\lambda_2 x} \bar{c}_2\}$$

2. Hay un valor propio de A real, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Si hay dos vectores propios lineal. independ., \bar{c}_1 y \bar{c}_2 , asociados a λ_1 , el conjunto fundamental de soluciones:

$$\{e^{\lambda_1 x} \bar{c}_1, e^{\lambda_1 x} \bar{c}_2\}$$

Si sólo hay un vector propio, \bar{c}_1 , una solución es $e^{\lambda_1 x} \bar{c}_1$. Se busca la otra lineal. indep. de la forma

$$\bar{y}_2 = (\bar{a}_1 x + \bar{a}_2) e^{\lambda_1 x} \Rightarrow$$

$$(A - \lambda_1 I)\bar{a}_1 = 0 \quad \text{y} \quad (A - \lambda_1 I)\bar{a}_2 = \bar{a}_1.$$

El conjunto fundamental de soluciones:

$$\{\bar{c}_1 e^{\lambda_1 x}, (\bar{a}_1 x + \bar{a}_2) e^{\lambda_1 x}\}$$

3. Los valores propios de A son complejos conjugados.

Sea \bar{c} el vector propio asociado a uno de ellos λ .
Conjunto fundamental de soluciones:

$$\{\text{Re}(e^{\lambda x} \bar{c}), \text{Im}(e^{\lambda x} \bar{c})\}.$$

► Sistema homogéneo con coeficientes constantes

$$\bar{y}' = A\bar{y}, \quad An \times n, \quad \geq 2$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz A en el cuerpo de los complejos.

Posibilidades:

1. Se trata de n valores propios reales distintos. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, sea \bar{c}_i el vector propio asociado a λ_i . El conjunto fundamental de soluciones:

$$\{e^{\lambda_1 x} \bar{c}_1, e^{\lambda_2 x} \bar{c}_2, \dots, e^{\lambda_n x} \bar{c}_n\}.$$

2. Hay algún valor propio complejo λ_i simple. Entonces su conjugado $\bar{\lambda}_i$ también es valor propio y los vectores propios asociados son conjugados uno del otro. Para este valor propio hay dos soluciones reales linealmente independientes asociadas:

$$\{Re(e^{\lambda_i x} \bar{c}_i), Im(e^{\lambda_i x} \bar{c}_i)\}$$

3. Hay un valor propio λ_i real o complejo de multiplicidad k . Supongamos primero que es real y que hay l vectores propios linealmente independientes con $l \leq k$. $\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, \dots, \bar{c}_{i_l}$. Entonces,

$$\{e^{\lambda_i x} \bar{c}_{i_1}, e^{\lambda_i x} \bar{c}_{i_2}, \dots, e^{\lambda_i x} \bar{c}_{i_l}\}$$

son k soluciones linealmente independientes asociadas a λ_i . Si $k = l$, éstas son todas las que buscamos.

Si $l < k$, obtenemos las $k - l$ soluciones restantes linealmente independientes buscando soluciones de la forma:

$$(\bar{a}_1 x + \bar{a}_2) e^{\lambda_i x}, (\bar{d}_0 x^2 + \bar{d}_1 x + \bar{d}_2) e^{\lambda_i x}, \dots, \\ (\bar{f}_0 x^{k-l-1} + \dots + \bar{f}_{k-l-1} x + \bar{f}_{k-l}) e^{\lambda_i x}$$

4. En el caso de que λ_i sea complejo de multiplicidad $k > 1$, se procede como en 2 y 3

► Sistemas homogéneos de tipo Euler: $x\bar{y}' = A\bar{y}$

Hacer $x = e^t$ para $x > 0 \rightarrow$ coeficientes ctes. $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$