Ecuaciones lineales de tercer orden

Ecuación lineal **homogénea** de orden 3:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0, \quad \textbf{(LH)}$$

Ecuación lineal **no homogénea** de orden 3:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = r(x), \quad \textbf{(LNH)}$$

donde los coeficientes a_i, $i = 1, 2, 3$, y r son funciones reales definidas en $I = (a, b)$ y continuas

Solución general de **(LNH)**:

$$y_{GNH}(x) = y_{GH}(x) + y_p(x)$$

$y_{GH}(x)$ denota la solución general de **(LH)**
$y_p(x)$ denota una solución particular de **(LNH)**.

Si $\{y_1, y_2, y_3\}$ son 3 soluciones de **(LH)** linealmente independientes en I:

$$y_{GH}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$$

$$y_{GNH}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) + y_p(x)$$

Definición: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ son **linealmente independientes** en I cuando

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\alpha_3\varphi_3(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Supuesto que las funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ son continuas y dos veces derivables en I se define la función **Wronskiano** de $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \varphi_3(x)$:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \varphi_3''(x) \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE **(LH)**

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0 \quad \textbf{(LH)}$$

- Combinación lineal de soluciones es solución:

  Si $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ son soluciones de **(LH)** en I entonces cualquier combinación lineal de ellas $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x)$ es también solución de **(LH)** en I (α_i son constantes cualesquiera).

- TEOREMA: *Sean* $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ *tres soluciones de* **(LH)** *en* I*; son linealmente independientes*
  $\Longleftrightarrow W[y_1, y_2, y_3](x) \neq 0, \ \forall x \in I$
  $\Longleftrightarrow W[y_1, y_2, y_3](x_0) \neq 0$ *para algún* $x_0 \in I$.

  Bajo estas condiciones, cualquier otra solución de **(LH)** *es combinación lineal de* $\{y_1, y_2, y_3\}$.

- Siempre existen tres soluciones $\{y_1, y_2, y_3\}$ linealmente independientes de **(LH)** en I. Se dice que $\{y_1, y_2, y_3\}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

- Dadas tres soluciones $\{y_1, y_2, y_3\}$ de **(LH)**, linealmente independientes en I la **solución general** es:

  $$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x), \quad c_1, c_2, c_3 \text{ constantes.}$$

▶ Ecuaciones lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

a_i constantes $i = 1, 2, \cdots, n$. Se resuelven en $(-\infty, \infty)$. Se busca: $y = e^{\lambda x}$ $\Longrightarrow$ λ debe ser raíz del **polinomio característico**:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ las raices de este polinomio en el cuerpo de los complejos.

Posibilidades

a). Todas las raices son reales distintas. El conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}\}.$$

b). Todas las raices son reales y algunas de ellas coincidentes. Entonces, por cada raíz λ_k, de multiplicidad n_k, hay n_k soluciones de la ecuación linealmente independientes asociadas a esta raíz:

$$\{e^{\lambda_k x},\ x e^{\lambda_k x},\ x^2 e^{\lambda_k x}, \cdots, x^{n_k - 1} e^{\lambda_k x}\}$$

c). Hay al menos una raíz compleja $\lambda_k = p + qi$ de multiplicidad n_k (el conjugado de λ_k, $p - qi$, es también una raíz de multiplicidad n_k). Entonces, hay $2n_k$ soluciones linealmente independientes de la ecuación asociadas a ambas raices:

$$\{e^{px}\cos(qx),\ e^{px}\sin(qx),\ xe^{px}\cos(qx),\ xe^{px}\sin(qx),\ x^2 e^{px}\cos(qx),$$
$$x^2 e^{px}\sin(qx), \cdots\cdots, x^{n_k-1} e^{px}\cos(qx), x^{n_k-1} e^{px}\sin(qx)\}.$$

▶ La ecuación de Euler de orden n:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

Hacer $x = e^t$ para $x > 0$ $\rightarrow$ coeficientes constantes

Ecuaciones lineales de orden n, $n > 2$.

La *ecuación lineal homogénea de orden n* tiene la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad \textbf{(LH)}$$

donde los coeficientes a_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ son funciones reales definidas y continuas en un intervalo $I \equiv (a, b)$. La teoría general para ecuaciones lineales de orden 2 se extiende a las de orden $n > 2$.

La *ecuación lineal no homogénea de orden n* tiene la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = r(x) \qquad \textbf{(LNH)}$$

donde $r : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$. La solución general de **(LNH)** es:

$$y(x) = y_{GH}(x) + y_p(x),$$

donde $y_{GH}(x)$ es la solución general de **(LH)** e $y_p(x)$ es una solución particular de **(LNH)**. Más concretamente podemos escribir

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

donde $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ son n soluciones de **(LH)** linealmente independientes.

El resultado de existencia y unicidad de solución satisfaciendo unas condiciones iniciales nos lo da el teorema siguiente:

Teorema 3 *Sean a_i, r funciones reales continuas en (a, b). Sea $x_0 \in (a, b)$, $y_0^1, y_0^2 \cdots, y_0^n \in \mathbf{R}$. Entonces, existe una única solución del problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y & = & r(x) \\ y(x_0) = y_0^1, y'(x_0) = y_0^2, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) & = & y_0^n, \end{cases}$$

definida en todo el intervalo (a, b).

Definición: Se dice que n funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ son *linealmente independientes* en el intervalo I cuando

Si $\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\cdots+\alpha_n\varphi_n(x) = 0\,, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots \alpha_n = 0.$

Se dice que las funciones son *linealmente dependientes* cuando no son linealmente independientes: una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las otras $(n-1)$.

Definición: Wronskiano de n funciones $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n\}$:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Propiedades de la solución de ecuación lineal homogéna

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad \textbf{(LH)}$$

1. Si $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_k(x)$ son soluciones de **(LH)** en I entonces cualquier combinación lineal de ellas $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_k y_k(x)$ es también solución de **(LH)** en I (α_i son constantes cualesquiera).

2. n soluciones $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ de **(LH)** son linealmente independientes en I cuando, para cualquier punto $x_0 \in I$, se verifica $W[y_1, y_2, \cdots, y_n](x_0) \neq 0$.

3. Dadas n soluciones $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ de **(LH)** linealmente independientes en I, cualquier otra solución $y(x)$ se escribe de la forma:

   $$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x)\,, \forall x \in I\,,$$

   para algunas constantes α_i. Se dice que $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ forman un *sistema fundamental de soluciones de* **(LH)** en I.

   La solución general de **(LH)** es:

   $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \quad c_1, c_2, \cdots, c_n$ constantes

4. El Wronskiano de n soluciones de **(LH)** en I, o bien, es identicamente cero en I, o bien, no se anula en ningún punto de I (esta propiedad es una consecuencia de la fórmula de Abel para sistemas)

5. Sean $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ n soluciones de **(LH)** en I, son linealmente independientes si y sólo si $W[y_1, y_2, \cdots, y_n](x) \neq 0, \forall x \in I$ (evidentemente, basta con comprobar que el Wronskiano es no nulo en un punto fijo cualquiera x_0 de I). Esta propiedad es consecuencia de las propiedades 2 y 4.

6. Hay n soluciones linealmente independientes de **(LH)**.

Resolución de ecuaciones lineales de n, $\forall n \geq 2$

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \qquad \textbf{(LH)}$$

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = r(x) \qquad \textbf{(LNH)}$$

REDUCCIÓN DEL ORDEN para **(LH)**:

Método de variación de parámetros: Si se conoce una solución $y_1(x)$ de **(LH)**, se reduce a una ecuación lineal de orden $(n-1)$ haciendo: $y(x) = c(x) y_1(x)$
($c(x)$ es la función incógnita en la nueva ecuación).

BÚSQUEDA DE SOLUCIÓN PARTICULAR de **(LNH)**:

- **Método de variación de parámetros** para cualquier ecuación lineal con a_i constantes o no y $\forall r(x) \neq 0$.
Se busca

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \cdots + c_n(x) y_n(x),$$

con $c_i(x)$ a determinar substituyendo en **(LNH)**.

- **Método de coeficientes indeterminados** para a_i constantes y con *determinados términos* $r(x) \neq 0$:

- Si $r(x) = p_k(x) e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x) e^{\alpha x}$
  $s = 0$ si α no es raíz del polinomio característico
  $s = n_i$ si α es raíz de multiplicidad n_i
  $$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

- Si $r(x) = p_k(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ o $r(x) = p_k(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, se busca
  $$y_p(x) = x^s P_k(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + x^s Q_k(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$
  $s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico
  $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz de multiplicidad n_i.

$p_k(x)$, $P_k(x)$ y $Q_k(x)$ denotan polinomios de grado k:

$P_k(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k$, $Q_k(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$

con los coeficientes b_i y c_i a determinar substituyendo en **(LNH)**.

La Transformada de Laplace.

-Transforma ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas,

-Transforma determinadas ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes polinómicos en ecuaciones diferenciales, en ocasiones más simples de resolver

- Herramienta útil para la resolución de:

– Ecuaciones integrales – Ecuaciones integro-diferenciales
– Sistemas diferenciales lineales.

Definiciones

-Se dice que la función f es continua por segmentos en $[0, \infty)$, cuando lo es en cada intervalo $[0, N]$ para cualquier $N > 0$.

-La función f, $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ es de orden exponencial α si existen constantes positivas T y M tales que:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t \geq T.$$

-Dada una función f, $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, se denomina **Transformada de Laplace de** *f en el punto* λ al valor:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt \qquad (1)$$

-La definición de la transformada de Laplace está ligada a que la integral impropia de (1):

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-\lambda t} f(t)\, dt$$

sea convergente.

-Si la función f es continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α, la integral converge para $\lambda > \alpha$ o más exactamente para $Re(\lambda) > \alpha$.

Funciones útiles en Matemáticas, Físicas e Ingeniería

- FUNCIÓN "Heaviside" o "escalón"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

- FUNCIÓN DELTA: "función" $\delta(t-a)$, es tal que:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\delta(t-a)dt = \Phi(a),$$

para cualquier función Φ continua en $\mathbf{R}$.

Propiedades de la transformada de Laplace.

1. Sean f y g funciones tales que su transformada de Laplace existe para $\lambda > \alpha$, y c_1, c_2 constantes cualesquiera. Entonces,

$$\mathcal{L}[c_1 f + c_2 g](\lambda) = c_1 \mathcal{L}[f](\lambda) + c_2 \mathcal{L}[g](\lambda), \forall \lambda > \alpha.$$

2. Si la transformada de Laplace de f existe para $\lambda > \alpha$, entonces:

$$\mathcal{L}[e^{at} f](\lambda) = \mathcal{L}[f](\lambda - a), \forall \lambda > \alpha + a.$$

3. Si f es continua en $[0, \infty)$ y f' es continua a trozos en $[0, \infty)$, y ambas son de orden exponencial α, entonces:

$$\mathcal{L}[f'](\lambda) = \lambda \mathcal{L}[f](\lambda) - f(0), \forall \lambda > \alpha.$$

4. Si $f, f', \cdots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y $f^{(n)}$ es continua a trozos en $[0, \infty)$, y todas ellas son de orden exponencial α, entonces, $\forall \lambda > \alpha$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](\lambda) = \lambda^n \mathcal{L}[f](\lambda) - \lambda^{n-1} f(0) - \lambda^{n-2} f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)$$

5. Sea f continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α. Entonces: $\int_0^t f(u)du$ es continua y de orden exponencial, y

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(u)du](\lambda) = \frac{\mathcal{L}[f](\lambda)}{\lambda}, \, \forall \lambda > \alpha.$$

6. Sea f continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α. Entonces:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](\lambda) = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}[f]}{d^n \lambda}(\lambda), \, \forall \lambda > \alpha.$$

7. Sean f y g funciones tales que su transformada de Laplace existe para $\lambda > \alpha$. Entonces:

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(t-u)g(u)du](\lambda) = \mathcal{L}[f](\lambda).\mathcal{L}[g](\lambda) \, , \forall \lambda > \alpha.$$

La función $f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$ se denomina *convolución de f y g*.

8. Si la transformada de Laplace de f existe para $\lambda > \alpha$, entonces:

$$\mathcal{L}[u(t-a)f](\lambda) = e^{-\lambda a}\mathcal{L}[f(t+a)](\lambda), \, \forall \lambda > \alpha \, ,$$

o lo que es equivalente

$$\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)](\lambda) = e^{-\lambda a}\mathcal{L}[f(t)](\lambda), \, \forall \lambda > \alpha.$$

9. Sea f continua a trozos en $[0, \infty)$ y periódica de periodo T (es decir, $f(t) = f(nT + t), \forall t \in [nT, (n+1)T]$). Entonces,

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \frac{\int_0^T e^{-\lambda t} dt}{1 - e^{-\lambda T}}, \, \forall \lambda > 0 \, .$$

10. Sea f continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial. Entonces,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{L}[f](\lambda) = 0$$

Se llama **transformada inversa de Laplace** de una función $F(\lambda)$, a la función $f(t)$ continua a trozos en $[0,\infty)$ que verifica:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = F(\lambda).$$

Teorema de inversión.
Sean f y g dos funciones continuas a trozos en $[0,\infty)$, de orden exponencial α, y tales que

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda), \forall\lambda > \alpha.$$

Entonces:

$$f(t) = g(t)$$

salvo a lo sumo en los puntos de discontinuidad de f y g.

APLICACIÓN A UN PROBLEMA DE CONTORNO: modelo de vigas con cargas puntuales:

$$EIy^{(4)} = p(x), \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad y''(2l) = y'''(2l) = 0,$$

donde E e I son constantes. E es el módulo de elasticidad e I es el momento de inercia, y la constante EI se denomina constante de rigidez de curvatura. Los esfuerzos horizontales se suponen nulos. Se trata de un problema de contorno Supongamos que la viga tiene una carga concentrada P que actua sobre su centro $x = l$. El problema entonces es:

$$EIy^{(4)} = P\delta(x-l), \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(2l) = y'''(2l) = 0$$