NOMBRE.. **Número**.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2020/21
Ampliación de Matemáticas (EDO)
Examen extraordinario, 1^{er} parcial: 18-Febrero-2021

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1 (2.5p)
Resolver el problema de Cauchy

$$y' = -\frac{xy-1}{x^2-xy}, \qquad y(1) = 2$$

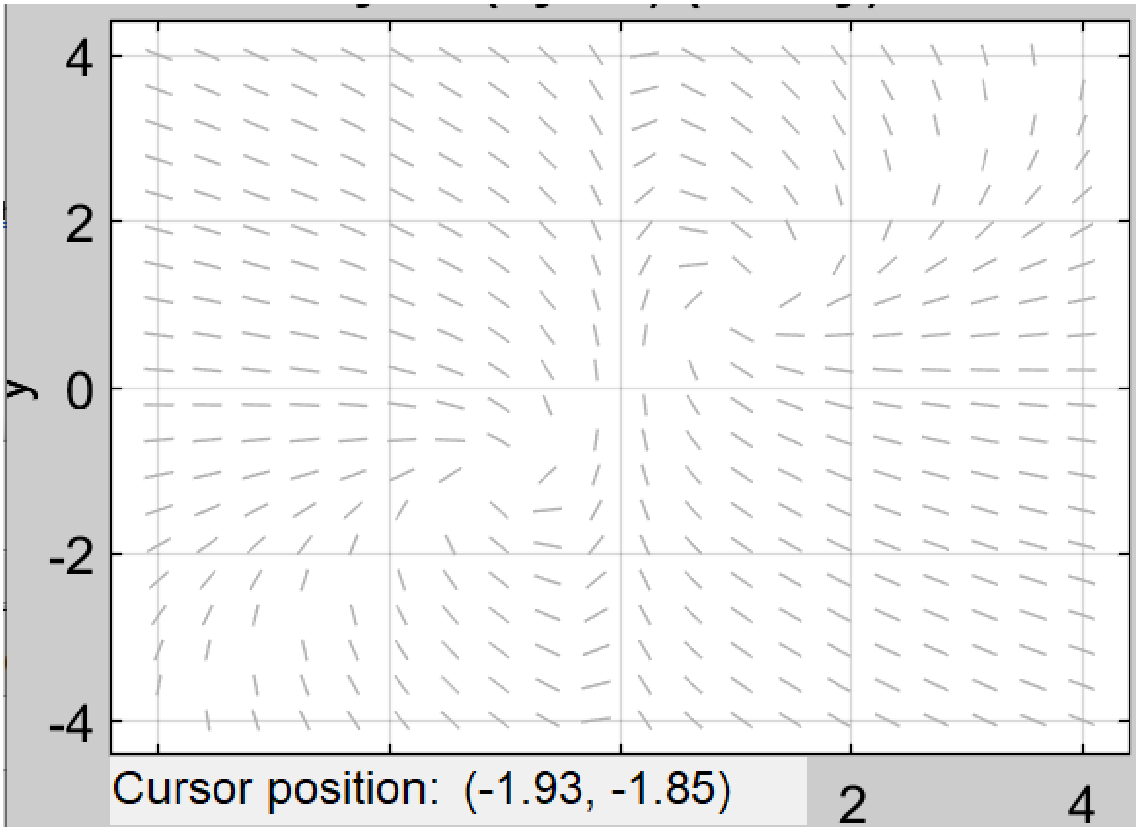
(buscar un factor integrante de x o de y).
Calcular $y'(1)$ y hacer un dibujo aproximado de la solución en el campo de direcciones asociado; razonar la respuesta. Encontrar las curvas isoclinas para las pendientes 0 e ∞, dibujarlas en el campo de direcciones dado en $[-4,4]\times[-4,4]$ (o hacer un gráfico aparte). Rayar las regiones de crecimiento de las soluciones, razonando la respuesta.

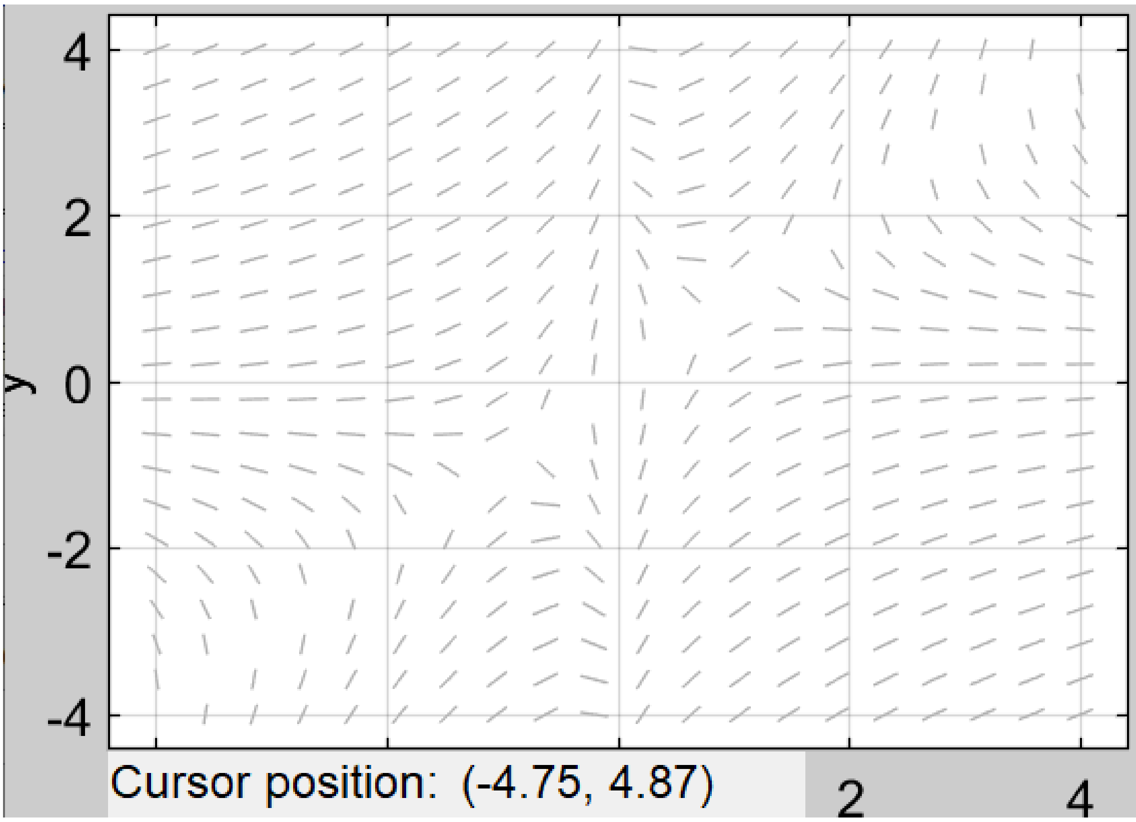
FACTOR INTEGRANTE

SOLUCIÓN GENERAL

SOLUCIÓN/ y(1)=2

y'(1).. CAMPO I o II
.
ISOCLINAS para las pendientes 0 e ∞


4
2
y
0
-2
-4
Cursor position: (-1.93, -1.85)
2
4


4
2
y
0
-2
-4
Cursor position: (-4.75, 4.87)
2
4

EJERCICIO 2

Resolver el problema de Cauchy

$$y' = -\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy}, \qquad y(1) = 2.$$

Indicar el intervalo de definición de la solución explícita razonando la respuesta.

SOLUCIÓN GENERAL

SOLUCIÓN Explícita/$y(1) = 2$ ....INTERVALO.......................

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3

Resolver la ecuación diferencial $\qquad 4y^{iv)} + 4y'' = \sin(2x)$

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA

SOLUCIÓN GENERAL

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4
Resolver la ecuación diferencial $\qquad 4y^{iv)} - 4y'' = x$

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA

SOLUCIÓN GENERAL

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5
Resolver

$$x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x}$$

Indicar el intervalo de definición de las soluciones. Razonar la respuesta.

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA

SOLUCIÓN GENERAL

INTERVALO

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 6
Se considera la ecuación de tipo Schrödinger

$$y'' + (2 - x^2)y = 0$$

a). Buscar la solución en forma de serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Escribir los 5 primeros términos en función de a_0 y a_1, y el término general a_n en función de los anteriores.

b). Dar la aproximación de la solución del problema de Cauchy

$$y'' + (2 - x^2)y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

mediante los 7 primeros términos del desarrollo en serie de potencias.

TERMINOS a_i, $i = 2, 3, 4$

TERMINO GENERAL a_n......... .... para $n \geq$........?

2.-DESARROLLO
en serie de la solución

Ecuaciones Diferenciales: Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden $y' + p(x)y = q(x)$: $\quad k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)\, dx)\, dx$
- E.D.O. de segundo orden $\;y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}\, dx.$$

- Sistemas de E.D.O. $\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x)$: $\quad \bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)\, dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)\, dx)}{(y_1(x))^2}\, dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\;\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

-Coeficientes de Fourier:

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\, dx}{\int_a^b (\phi_k(x))^2 s(x)\, dx}$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}, \quad (\cos a)^2 = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$