Ampliación de Matemáticas

2º Curso, Grado en Ingeniería Civil
(Mención en Construcciones Civiles)

ETSI Caminos, Canales y Puertos,
Universidad de Cantabria

Mª Eugenia Pérez Martínez
meperez@unican.es

Curso 2020–21

Sobre la Transformada de Laplace.

- Herramienta útil para la resolución de ecuaciones diferenciales / integrales / integro-diferenciales, y de sistemas diferenciales lineales.
- Transforma ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas.
- **Definiciones:**
  -Se dice que la función f es continua por segmentos en $[0, \infty)$, cuando lo es en cada intervalo $[0, N]$ para cualquier $N > 0$.
  -La función f, $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, es de orden exponencial α si existen constantes positivas T y M tales que:
  $$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t \geq T.$$
  -Para $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, la **transformada de Laplace de** *f en el punto λ* es:
  $$\mathcal{L}[f](\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt\,,$$
  si $\exists \ \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-\lambda t} f(t)\, dt$
- Si la función f es continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α, la integral converge para $\lambda > \alpha$ (también para $Re(\lambda) > \alpha$.)

Algunas propiedades de la T. de Laplace para su aplicación en ED

1. Sean f y g funciones tales que su transformada de Laplace existe para $\lambda > \alpha$, y c_1, c_2 constantes cualesquiera. Entonces,

$$\mathcal{L}[c_1 f + c_2 g](\lambda) = c_1 \mathcal{L}[f](\lambda) + c_2 \mathcal{L}[g](\lambda)\,, \quad \forall \lambda > \alpha.$$

2. Si f es continua en $[0, \infty)$ y f' es continua a trozos en $[0, \infty)$, y ambas son de orden exponencial α, entonces:

$$\mathcal{L}[f'](\lambda) = \lambda \mathcal{L}[f](\lambda) - f(0), \quad \forall \lambda > \alpha.$$

3. Si $f, f', \cdots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y $f^{(n)}$ es continua a trozos en $[0, \infty)$, y todas ellas son de orden exponencial α, entonces, $\forall \lambda > \alpha$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](\lambda) = \lambda^n \mathcal{L}[f](\lambda) - \lambda^{n-1} f(0) - \lambda^{n-2} f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)$$

4. **Teorema de inversión**: *Sean f y g dos funciones continuas a trozos en $[0, \infty)$, de orden exponencial α, y tales que $\mathcal{L}[f](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda)$, $\forall \lambda > \alpha$. Entonces: $f(t) = g(t)$ salvo, a lo sumo, en los puntos de discontinuidad de f y g.*

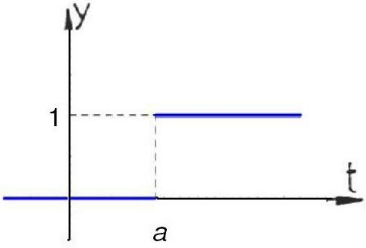
• Se llama **transformada inversa de Laplace** de una función $F(\lambda)$, a la función $f(t)$ continua a trozos en $[0, \infty)$ que verifica:

$$\mathcal{L}[f](\lambda) = F(\lambda).$$

• **De utilidad en ED, por ejemplo, cuando aparecen funciones continuas a trozos, de Heaviside, Deltas de Dirac,...:funciones útiles en Ingeniería!**

- FUNCIÓN "escalón" ("escalón unitario", "de Heaviside"): continua a trozos/

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$



- A partir de u se define $\quad s_N(t-a) = -\frac{N}{2}\left(u\left(t-a-\frac{1}{N}\right) - u\left(t-a+\frac{1}{N}\right)\right)$

y, $\quad \delta(t-a) = \lim_{N\to\infty} s_N(t-a)$ en el sentido...

- DELTA de DIRAC: "función" $\delta(t-a)$, tal que:

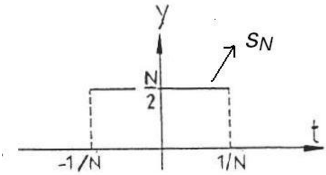
$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases}$$

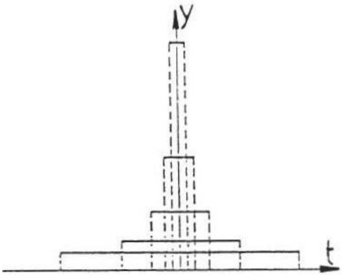
y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\phi(t)dt = \phi(a),$$

para cualquier función ϕ continua en $\mathbf{R}$,

donde $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\phi(t)dt = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_N(t-a)\phi(t)dt \ (\equiv \phi(a))$$





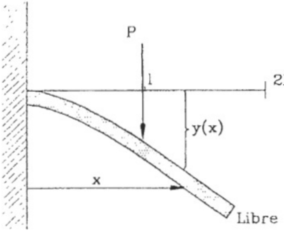
EJEMPLO: APLICACIÓN A UN PROBLEMA DE CONTORNO

Modelo de viga de longitud $2l$, empotrada en un soporte del lado izquierdo y libre en el derecho, y sometida a una carga $p(x)$:

$$\mathrm{EI}y^{(4)} = p(x), \quad x \in (0, l)$$
$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(2l) = y'''(2l) = 0,$$

donde E e I son constantes. E es el módulo de Young; I es un momento de inercia. Se supone que los esfuerzos horizontales son nulos y que la viga tiene una carga concentrada P que actua sobre su centro $x = l$.

$$\mathrm{EI}y^{(4)} = P\delta(x - l), \quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(2l) = y'''(2l) = 0$$



Sobre la Transformada de Fourier: esquema

Para f continua a trozos en $(-\infty, \infty)$ y tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty\,,$$

la transformada de Fourier de f en ζ es la integral

$$\mathcal{F}[f](\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\zeta} f(x)\, dx\,.$$

Denotando pr $F(\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta)$, F es una función de la variable $\zeta \in \mathbf{R}$, con valores en $\mathbf{C}$.
La transformada inversa de Fourier de F se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\zeta} F(\zeta)\, d\zeta\,,$$

Resultado de inversión: $\mathcal{F}^{-1}[F](x) = f(x)$.

Algunas propiedades de la T. de Fourier para su aplicación en EDP

1. $\mathcal{F}[c_1 f + c_2 g](\zeta) = c_1 \mathcal{F}[f](\zeta) + c_2 \mathcal{F}[g](\zeta)\,,$
2. $\mathcal{F}[f'](\zeta) = -i\zeta \mathcal{F}[f](\zeta)$, $\mathcal{F}[f^{(n)}](\zeta) = (-i\zeta)^n \mathcal{F}[f](\zeta)$,
3. $\mathcal{F}[f * g](\zeta) = \mathcal{F}[f](\zeta)\, \mathcal{F}[g](\zeta)$,

Prácticas con MATLAB: Transformadas Integrales

Algunas "funciones" especiales: *Dirac*; *Heaviside*

Comandos útiles para T. de Laplace:

$laplace(f)$, $ilaplace(F)$,
$laplace(sym('Heaviside(t)'))$, $laplace(sym('Dirac(t)'))$,
o $laplace(heaviside(t))$, $laplace(dirac(t))$

Para f una función de la variable simbólica t, $F = laplace(f)$ es una función dada en términos de la variable simbólica s.

Comandos útiles para T. de Fourier:

$fourier(f)$, $ifourier(F)$,
$fourier(sym('Heaviside(x)'))$, $fourier(sym('Dirac(x)'))$,
o $fourier(heaviside(x))$, $fourier(dirac(x))$.

Para f una función de la variable simbólica x, $F = fourier(f)$ es una función dada en términos de la variable simbólica w.