Ampliación de Matemáticas

2º Curso, Grado en Ingeniería Civil
(Mención en Construcciones Civiles)

ETSI Caminos, Canales y Puertos,
Universidad de Cantabria

Mª Eugenia Pérez Martínez
meperez@unican.es

Curso 2020–21

Modelos con ED de primer orden: *crecimientos de poblaciones, descomposición de materia radioactiva, reacciones químicas….*

"problemas de Cauchy o valor inicial"

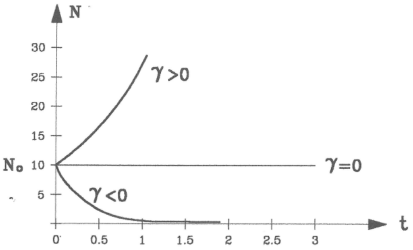
- Modelo de Malthus (hacia 1790):

Los nacimientos y las muertes, en un intervalo de tiempo pequeño, son proporcionales al tamaño de la población y al intervalo de tiempo. Es decir, *nacimientos* $= \alpha \Delta t N(t)$, *muertes* $= \beta \Delta t N(t)$, siendo $N(t)$ el tamaño de la población en el tiempo t. La variación de la población en un intervalo de tiempo Δt es $\Delta N(t) = \gamma N(t) \Delta t$ con $\gamma = \alpha - \beta$. Tomando límites cuando $\Delta t \to 0$ se tiene el modelo matemático:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N$$

$$N(0) = N_0$$

la constante γ se obtiene del recuento de la población

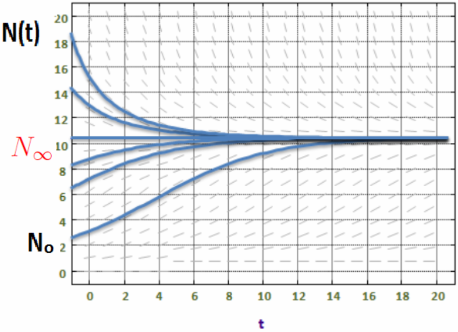


•Modelo de Verhulst (hacia 1837)

modificaciones al modelo de Malthus: *la población no puede crecer ilimitadamente, sino que tiende a estabilizarse en un límite* N_∞ *y la variación de la problación es proporcional a la población* N *y al factor* $(1-\frac{N}{N_\infty})$. Es

$$\frac{dN}{dt}=\gamma N(1-\frac{N}{N_\infty})$$

si $\gamma > 0$

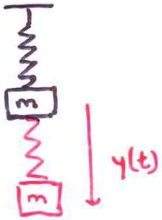


las constantes se obtienen del recuento de la población!!

$$N(t)=\frac{N_0N_\infty}{N_0+(N_\infty-N_0)\exp(-\gamma t)}.$$

Modelos con ED de segundo orden: *caída libre de cuerpos, circuitos eléctricos, péndulos, resortes, vigas…*

Modelo resorte - masa $(t \equiv x)$



Fuerza = masa * aceleración

$m \dfrac{d^2y}{dt^2}$ = Fuerzas =

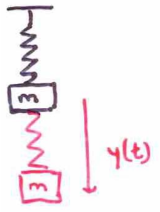
$-c\,y$ Fuerza de recuperación

$-k\,y'$ + Fuerza de amortiguación

$p(t)$ + Fuerzas externas

$$m\,y'' + k\,y' + c\,y = p(t)$$

Problema de Cauchy o valores iniciales



$$m y'' + k y' + c y = p(t)$$
$$y(0) = y_0$$
$$y'(0) = z_0$$

y0, z0 alargamiento inicial y velocidad inicial: condiciones iniciales!

- Si no hay condiciones iniciales ni fuerzas externas actuando sobre el sistema, el resorte no se mueve!! (p(t)=0, y0=0,z0=0 → y(t)=0)

- Teorema de existencia y unicidad de solución: existe una única solución y(t) definida en el intervalo (0,T) donde p(t) es una función continua

Problema de contorno: e.g.

$$\begin{cases} EI\, y'' + T\, y = m(x), & x \in (0,\ell) \\ y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{cases}$$

C. CONTORNO

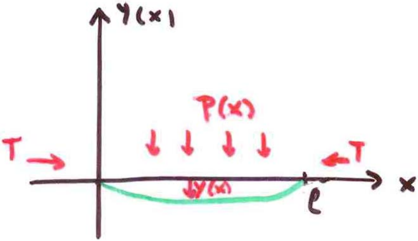
$m'' = P$

-Teorema de existencia y unicidad de solución: **para cualquier m(x) dada** (m(x) función continua en [0,l])

existe una solución y(x) y es única
si y sólo el problema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial

si y sólo sí T/EI no es una carga de pandeo (no es un valor propio…)

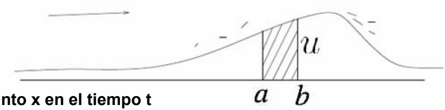
Resultado general: *teorema de la alternativa de Fredholm!*



Expresión matemática de una ley de conservación:

supuesto que no hay fuentes que creen /destruyan materia dentro de S

$$Q = \int_a^b u(x,t)dx$$



u(x,t) la densidad o concentración de Q en el punto x en el tiempo t
Φ(x,t) el flujo de Q en el punto x en el tiempo t

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = \Phi(a,t) - \Phi(b,t)$$

$$\int_a^b u_t(x,t) + \Phi_x(x,t)\,dx$$

EDP que relaciona el flujo y la densidad!!

$$u_t + \Phi_x = 0$$

Densidad y flujo se relacionan por leyes constitutivas: Φ(x,t)= Φ(u)

$$\boxed{u_t + \phi'(u)u_x = 0}$$