

Ampliación de Matemáticas:  
Bloque: Ecuaciones Diferenciales  
Sobre prácticas de ED: P3-P4

M<sup>a</sup> Eugenia Pérez Martínez  
meperez@unican.es

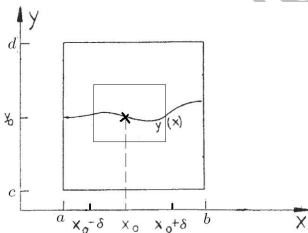
2<sup>o</sup> Curso, Grado Ingeniería Civil  
ETSI Caminos, Universidad de Cantabria

Curso 2014–2015

## El problema de Cauchy: Ecuaciones no lineales

**Teorema:** Sea  $D$  el rectángulo abierto  $D = \{(x, y) / a < x < b, c < y < d\}$  y  $f : D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continuas en  $D$ . Entonces,  $\forall (x_0, y_0) \in D$ ,  $\exists$  un intervalo,  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$ , en el cual existe una única solución  $y = \varphi(x)$  del problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



### Observaciones

- $D$  puede ser cualquier dominio abierto de  $\mathbf{R}^2$ .
- El  $\delta$  máximo en general no es fácil de determinar.

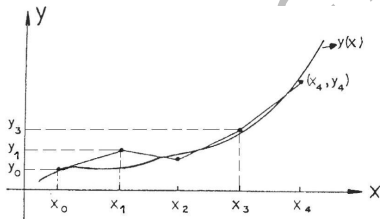
Una primera estimación de  $\delta$ :

$$D_1 = \{(x, y) / |x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\} \subset D, \quad y, \quad M = \max_{(x, y) \in D_1} |f(x, y)|$$
$$\delta = \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right), \quad \alpha, \beta /$$

## Solución numérica: Método de Euler

Sean  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  continuas en  $D$ , y  $(x_0, y_0) \in D$ . Sea  $y = \varphi(x)$  la única solución de

$$(PC) \text{ e en } [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad (PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Se conoce la recta tangente a  $\varphi(x)$  en  $(x_0, y_0)$

Para  $h$  muy pequeño, en  $[x_0, x_0 + h]$ ,  $\varphi(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$

Sea  $x_1 = x_0 + h$ ,  $\varphi(x) \approx \varphi(x_1) + f(x_1, \varphi(x_1))(x - x_1)$  en  $[x_1, x_1 + h]$ ,

pero  $\varphi(x_1) \approx y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$

$\Rightarrow$  en  $[x_1, x_1 + h]$ ,  $\varphi(x) \approx y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$ .

## Método de Euler (continua)

Así, construimos **una aproximación de la solución de (PC)** en  $[x_0, x_0 + \delta]$

Dados  $(x_0, y_0)$ ,  $N = \delta h^{-1}$ , se calcula recursivamente

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

**Solución numérica** de (PC) en  $[x_0, x_0 + \delta]$ :  $\{y_i\}_{i=0}^N$

**Aproximación de la solución** en  $[x_0, x_0 + \delta]$ :

$$\varphi_h(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

$h$ =tamaño del paso=  $\frac{\delta}{N}$ ,  $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow N \rightarrow \infty$

Para la aproximación en  $[x_0 - \delta, x_0]$ : cambiar  $h$  por  $-h$

Método de orden 1: error acotado por  $Cte \cdot h$

Sobre convergencia: el método converge en  $x$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0$ .

**Teorema** Sea  $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  continuas en  $[a, b] \times \mathbf{R}$  y  $f$  acotada:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\varphi(x) - \varphi_h(x)| = 0, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta] \subset [a, b].$$

## Sobre errores del método

En la iteración  $i$ , el método de Euler nos da un valor  $y_i$  aproximado de la solución  $\varphi(x_i)$ ; el ordenador nos da  $\tilde{y}_i$

$$E_i = \varphi(x_i) - \tilde{y}_i = \varphi(x_i) - y_i + y_i - \tilde{y}_i.$$

$y_i - \tilde{y}_i$  es el **error de redondeo** /  $e_i = \varphi(x_i) - y_i$ , **error del método**,

**Definición:** el método es de orden  $p$  si  $|e_i| \leq Cte \cdot h^p$

**error local de truncatura:** El error en la iteración  $i$  supuesto que  $y_{i-1}$  es exacto ( $y_{i-1} = \varphi(x_{i-1})$ ).

**error global:** suma de todos los errores locales ( $e_N$ )  $|e_N| \leq \frac{Ch}{2L}(e^{\delta L} - 1)$

donde  $C = \max_{(x,y) \in D_1} |f \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}|$ ,  $L = \max_{(x,y) \in D_1} |\frac{\partial f}{\partial y}|$ , siendo  $D_1$  el rectángulo cerrado en el que  $f$  y sus derivadas parciales primeras son continuas,  $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$ .

- El error en el método de Euler es de orden 1
- El error aumenta al aumentar el intervalo ( $\delta$ )
- La aproximación es mejor para  $h$  pequeño
- Al disminuir  $h$  puede aumentar el error de redondeo.

## Sobre mejoras del Método de Euler

Considerar:

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s)) ds, \quad \circ$$

$$\varphi(x_i + h) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_i) + \dots$$

- **El método de Euler mejorado** para aproximar numéricamente la solución de (PC): Se calcula  $y_{i+1}$  por el método de Euler y se mejora aproximando la integral  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s)) ds$  por el valor medio:

$$\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

Para  $i = 0, 1, \dots, N-1$

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))}{2}$$

Método de orden 2.

## Sobre mejoras del Método de Euler (continua)

- **El método Taylor de orden  $n$**  para la aproximación numérica de la solución de (PC): se utilizan en cada iteración los  $n$  primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución en  $x_i$ .

Para  $n = 3$  (método de orden 2):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i)f(x_i, y_i))\frac{h^2}{2}$$

- **El método de Runge-Kutta**, para aproximar la solución de (PC):

Para  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ :  $x_{i+1} = x_i + h$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(L_{i,1} + 2L_{i,2} + 2L_{i,3} + L_{i,4})$$

donde

$$L_{i,1} = f(x_i, y_i), \quad L_{i,2} = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,1}\right),$$

$$L_{i,3} = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hL_{i,2}\right), \quad L_{i,4} = f(x_i + h, y_i + hL_{i,3}).$$

Método de orden 4.

## Extensión a ED de segundo orden y a sistemas diferenciales

Dada  $f : D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , con  $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$  continuas en  $D$ , y dado  $(x_0, y_0^1, y_0^2) \in D$ , problema de valores iniciales o **Problema de Cauchy**:

$$(PC) \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0^1, \quad y'(x_0) = y_0^2. \end{cases}$$

Haciendo  $y' = z$  en la ecuación  $y'' = f(x, y, y') \rightarrow$  **sistema diferencial de 1<sup>er</sup> orden** con dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z). \end{cases}$$

$x$  **variable independiente**  $y = y(x), z = z(x)$  **incógnitas**

Para aproximación de la solución numéricamente: utilizar fórmulas con notaciones vectoriales:

$$(PC) \begin{cases} \bar{y}' = \bar{F}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$



## Ejemplo: método de Euler

Dada la función  $\bar{F}$  y el punto  $(x_0, \bar{y}_0)$ , calcular

$$x_i = x_0 + ih, \quad \bar{y}_i = \bar{y}_{i-1} + h\bar{F}(x_{i-1}, \bar{y}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

**Para un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas:**

$$(PC) \begin{cases} y' = r(x, y, z) \\ z' = s(x, y, z), \\ y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \end{cases}$$

$\forall (x_0, y_0, z_0) \in D, \exists \delta$  / la solución del problema de Cauchy (PC) está definida en  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , y es única.

**La aproximación numérica** de la solución  $(y(x), z(x))$  en  $x_i = x_0 + ih$ , **para el tamaño del paso  $h$** , es:

$$y_i = y_{i-1} + hr(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$$

$$z_i = z_{i-1} + hs(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}),$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ , donde  $N = \delta h^{-1}$

$(y_i, z_i) \approx (y(x_i), z(x_i))$  para  $h \rightarrow 0$