NOMBRE.. **Número**.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2018/19
Ampliación de Matemáticas
Examen Final: 22 de Enero 2019

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen.

EJERCICIO 1.a (0.5p)
La función $f(x) = \sin^4(x)$ es periódica, de periodo 2π. Obtener su serie de Fourier.

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 1.b (2p)

Consideremos el campo vectorial de $\Re^3$

$$\mathbf{F} = (yze^{xy} + y,\, xze^{xy} + x,\, e^{xy}).$$

Calcular la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria

$$\sigma(t) = (\cos(2\pi t) - 1,\, \sin^2(2\pi t),\, t^2),\ 0 \le t \le 1.$$

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

NOMBRE.. **Número**.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2018/19
Ampliación de Matemáticas (ED)
Examen final: 22- Enero - 2019

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 3 (2.1p)
EJERCICIO 3.1
Encontra una solución particular del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & 3y_1 - 2y_2 + x \\ y_2' & = & 2y_1 - y_2 + 1 \end{array} \right.$$

de la forma $\bar{y}_p = \bar{\alpha}x + \bar{\beta}$ para algunos vectores $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$, a determinar derivando y substituyendo en el sistema.

SOLUCIÓN PARTICULAR

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3.2

Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_1' &= 3y_1 - 2y_2 + x \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 + 1 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.$$

Encontrar una solución particular del sistema utilizando el método de variación de parámetros. Establecer la relación de la solución particular encontrada con la del ejercicio 3.1.

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION PARTICULAR

SOLUCION DEL PROBLEMA DADO

RELACIÓN entre las dos soluciones particulares

EJERCICIO 4 (1.6p)
Resolver las ecuaciones

$$(a) \qquad y^{iv)} - 2y'' + y = \sin(x)$$

$$(b) \qquad y^{iv)} + 2y'' + y = \sin(x)$$

SOLUCION GENERAL DE LAS ED. HOMOGENEAS ASOCIADAS

SOLUCIÓN GENERAL de (a)

SOLUCIÓN GENERAL de (b)

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5 (1.8p)

Resolver la ecuación $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = \exp(-x^2)$ sabiendo que la ecuación homogénea asociada admite una solución de la forma $y = \exp(ax^2)$ para alguna constate a. Encontrar los 6 primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución del problema de Cauchy

$$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$a =$

SOL. GENERAL ED HOMOGENEA

SOL. GENERAL ED NO HOMOGENEA

DESARROLLO EN SERIE

RESOLCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 6 (2p)

Resolver las ecuaciones $y' + y = 0$ y $y' + y = e^{-t}$. Considerar los problemas de valor inicial

$$(a). \qquad y' + y = e^{-t}u(t-\pi), \quad y(0) = 0,$$

$$(b). \qquad y' + y = \delta(t-\pi), \quad y(0) = e^{\pi},$$

y razonar cuál de las siguientes funciones puede ser la solución de cada problema.

$$(1) \quad \frac{u(t-\pi)}{2}(e^{2-t} - e^{2\pi-t}), \qquad (2) \quad u(t-\pi)(t-\pi)e^{-t}$$

$$(3) \quad (1 + u(t-\pi))e^{\pi-t}, \qquad (4) \quad e^{\pi-t}(e^{t} + u(t-\pi))$$

(Nota: $u(t-\pi) \equiv heaviside(t-\pi)$)

SOLUCION de $y' + y = 0$..................................

SOLUCION de $y' + y = e^{-t}$.................................

Para (a) SOLUCION: (1) (2) (3) (4) ninguna (tachar lo que no proceda)

Para (b) SOLUCION: (1) (2) (3) (4) ninguna (tachar lo que no proceda)

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\ \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t,\bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i,\bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\ \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\ \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\ \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

- Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$