Nombre Apellidos N°

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS, *Curso* 2° *Curso 2016/2017.*

Curso 16/17. Examen Final, Cálculo Integral 23/01/17.

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. Las respuestas no pueden ser a lápiz y deben ser debidamente razonadas.
3. Este ejercicio vale **2.5** puntos sobre 10.

1.- Sea el dominio definido del modo siguiente:

$$D \equiv \{(x,\, y)\,|\, y^2 \leq 2x\} \bigcap \{(x,\, y)\,|\, 0 \leq y\} \bigcap \{(x,\, y)\,|\, 2x + y \leq 20\}\,.$$

- ☛ Calcular el área del dominio así definido mediante una única integral doble.
- ☛ Calcular el área del dominio así definido mediante una integral curvilínea a lo largo de la curva que lo delimita.

Nombre Apellidos N°

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS, *Curso* 2° *Curso 2016/2017.*

Curso 16/17. Examen Final, Ecuaciones Diferenciales 23/01/17.

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. Las respuestas no pueden ser a lápiz y deben ser debidamente razonadas.
3. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 2 (1.6p)

Resolver la ecuación

$$\sin(2x)y' = 2(y + \cos(x)).$$

(indicación: $\int \frac{1}{\sin(ax)}dx = \frac{1}{a}\ln|\tan(\frac{ax}{2})|$)

Estudiar la existencia y unicidad de solución de la ecuación pasando por $(\frac{\pi}{4}, y_0)$, con y_0 cualquier número real. Indicar el intervalo de definición de dichas soluciones y razonar cuántas de estas están acotadas en dicho intervalo. En particular, encontrar la solución pasando por $(\frac{\pi}{4}, 0)$.

SOLUCIÓN GENERAL de la ED :

SOLUCIÓN / $y(\frac{\pi}{4}) = 0$

SOLUCIONES ACOTADAS

EXISTENCIA Y UNICIDAD
de SOLUCIÓ e INTERVALO:
(razonamiento breve)

EJERCICIO 3 (1.6p)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de cuarto orden

$$3.1)\qquad y^{iv)} - 4y'' = 2e^{2x}$$

$$3.2)\qquad y^{iv)} - 4y = (x+2)e^{2x}$$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y^{iv)} - 4y'' = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y^{iv)} - 4y'' = 2e^{2x}$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y^{iv)} - 4y = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y^{iv)} - 4y = (x+2)e^{2x}$

RESOLUCIÓN y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 4 (1.6p)

4.1.- Encontrar los 8 primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución del problema de Cauchy

$$y'' + (3 - x^2)y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

(Indicación: buscar la solución como una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o utilizar el desarrollo en serie de Taylor la solución). Indicar el intervalo de definición de la solucioø'n (razonar la respuesta)

4.2.- Razonar si la aproximación encontrada puede aproximar a una función del tipo

$$u = (ax^2 + bx + c)e^{-x^2/2}$$

para algunos valores de las constantes a, b y c: en tal caso, especificar los valores de las constantes.

APROXIMACIÓN SOLUCIÓN (8 primeros términos) :
e INTERVALO

POSIBLES VALORES de a, b y c / $u(x) =$
RAZONAMIENTO BREVE

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5 (1.2p)

Se considera la ecuación:

$$y'' - y' + e^{2x}y = e^{2x}\cos(e^x)$$

Resolver, sabiendo que una solución de la ecuación homogeénea es $y_1 = \cos(e^x)$.

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA :

SOLUCIÓN GENERAL ED NO HOMOGÉNEA :

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 6 (1.5p)

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 + 9y_2 + e^{-2x} \\ y_2' &= -y_1 - 5y_2 + e^{-2x} \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

SOLUCION GENERAL SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCION GENERAL SISTEMA NO HOMOGÉNEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- **Método de coeficientes indeterminados** cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

- Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$