Nombre Apellidos Nº

Examen Final 22/01/16.

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. El tiempo para realizar esta parte es de 75 minutos.
3. Las respuestas no pueden ser a lápiz.
4. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen.

Ejercicio 1.- Sea σ la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que queda bajo el plano $z = 2y$, y sea γ la curva intersección de ambos. Calcular la circulación del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 3x, y)$ a lo largo de γ.

1. **Usando el teorema de Stokes (considerando σ orientada por la normal con componente $z > 0$).**
2. **Directamente (considerando la orientación apropiada para γ).**

2.5 pts.

Examen Final 22/01/16.

Ejercicio 2.- Resolver el problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcl} y_1' & = & y_1 & + & 2y_2 & + & \cos(2x) \\ y_2' & = & -2y_1 & + & y_2 & - & \sin(2x) \end{array}\right.$$

$$y_1(0) = 1, \;\; y_2(0) = 1.$$

1.5 pts.

SOLUCIÓN DEL SISTEMA HOMOGÉNEO:

SOLUCIÓN DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO:

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALORES INICIALES:

NOMBRE.. Número.........
DNI...............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2015/16
Ampliación de Matemáticas
Examen : 22- Enero - 2015

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. El tiempo para realizar esta parte es de 2 horas.
3. Las respuestas no pueden ser a lápiz.
4. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen.
5. Escribir de forma precisa la solución donde se pida.

EJERCICIO 3 (1.2p)

Resolver la ecuación: $y^{(4)} - 2y'' + y = e^x + x^2$

SOLUCION GENERAL ED. HOMOGENEA:

SOLUCION PARTICULAR de $y^{(4)} - 2y'' + y = e^x$

SOLUCION PARTICULAR de $y^{(4)} - 2y'' + y = x^2$

SOLUCION GENERAL de $y^{(4)} - 2y'' + y = e^x + x^2$

EJERCICIO 4(1.2p)
Resolver el problema de Cauchy:

$$x^2y'' - 2y = \frac{1}{x}$$

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$$

Indicar el intervalo donde está definida la solución

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA :

SOLUCIÓN GENERAL ED NO HOMOGÉNEA :

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA :
INVERVALO:

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5 (2.4p)

a). Encontrar los 10 primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de la ecuación diferencial

$$y'' - x^2 y = 0.$$

Expresar el desarrollo en función de los datos iniciales $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$. Encontrar el término a_n general en función de los anteriores y deducir, si se puede, los términos del desarrollo completo que se anulan (en función de n).

b). Demostrar que el problema de contorno

$$y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

tiene solución única

APROXIMACIÓN SOLUCIÓN (10 primeros términos) :

PARA $n \geq$ ...., a_n

TÉRMINOS QUE SE ANULAN para $n \geq$.......

EXISTENCIA Y UNICIDAD de solución del problema b):

EJERCICIO 6 (1.2p)
Resolver la ecuación diferencial

$$dx - ((\sin(y))^2 + x\cot(y))dy = 0$$

(indicación buscar un factor integrante dependiente de x o y). Encontrar la solución o soluciones con gráficas pasando por el punto $(0, \frac{\pi}{2})$. Hacer una gráfica aproximada de éstas soluciones. Razonar en qué intervalo se podría definir una solución explícita de la ecuación diferencial que pase por $(0, \frac{\pi}{2})$.

FACTOR INTEGRANTE:

SOLUCION GENERAL:

SOLUCIÓN pasando por $(0, \frac{\pi}{2})$
INVERVALO
GRÁFICAS

RESOLUCIÓN y RAZONAMIENTOS:

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

- Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$