Nombre Apellidos Nº

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS, *Curso* 2º *Curso 17/18.*

Examen Final, Cálculo Integral 18/01/23.

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. Las respuestas no pueden ser a lápiz y deben ser debidamente razonadas.

EJERCICIO 1 (3P)

1.- Verificar el teorema de la divergencia para el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$

siendo S la superficie del tetraedro acotado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

2.- Obtener la serie de Fourier que conste solamante de términos en cosenos que represente a la función $y = x^2$ en el intervalo $[0, \pi]$.

3.- Obtener la serie de Fourier que conste solamante de términos en senos que represente a la función $y = x^2$ en el intervalo $[0, \pi)$.

Nombre Apellidos Nº

Curso 17/18. Examen Final, Ecuaciones Diferenciales 23/01/18.

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. Las respuestas no pueden ser a lápiz y deben ser debidamente razonadas.
3. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 2 (1.4p)

Resolver las ecuaciones diferenciales

$$a). \quad y' - e^x y = e^{2x}$$

$$b). \quad y' - e^x y = e^{-x}\,,$$

dejando la solución general en forma integral si no se puede encontrar alguna primitiva.

Encontrar una solución explícita que pase por (0,0), o dar un resultado de existencia y unicidad de solución e intervalo de definición de dicha solución (indicar claramente si es solución de (a) o de (b), tachar lo que no proceda). Escribir las curvas donde las soluciones cambian el crecimiento y, como consecuencia, razonar qué campo de direcciones está asociado a cada una de ellas. Hacer un dibujo aproximado de dichas curvas, y de la solución que pasa por (0,0), en cada uno de ellos.

SOLUCIÓN GENERAL de la ED (a) :

SOLUCIÓN GENERAL de la ED (b) :

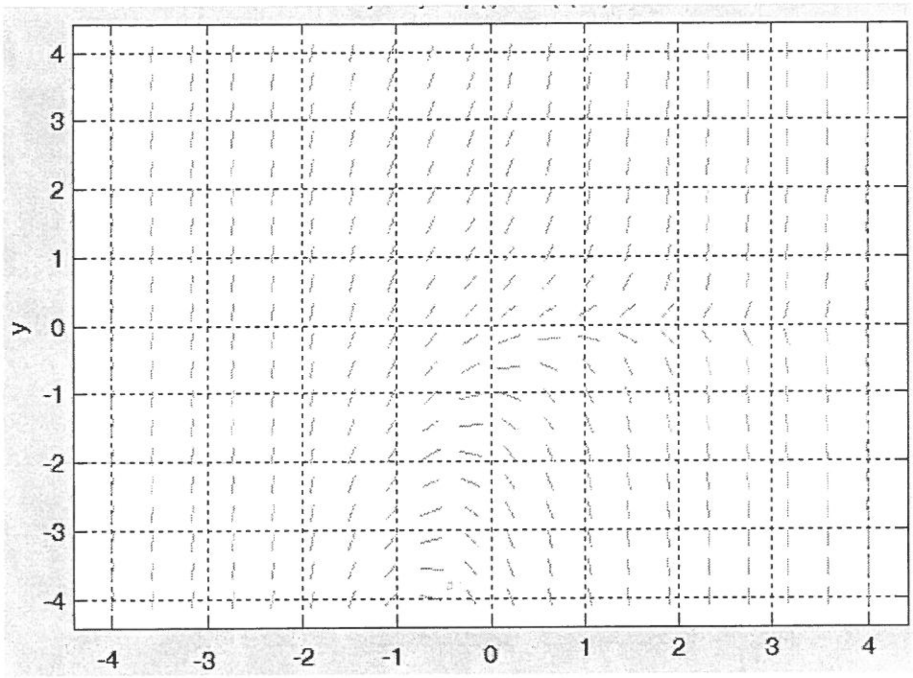
SOLUCIÓN / $y(0) = 0$ para (a) o para (b)

Cambio de crecimiento para (a):
CURVAS, CAMPO I o CAMPO II

Cambio de crecimiento para (b):
CURVAS, CAMPO I o CAMPO II

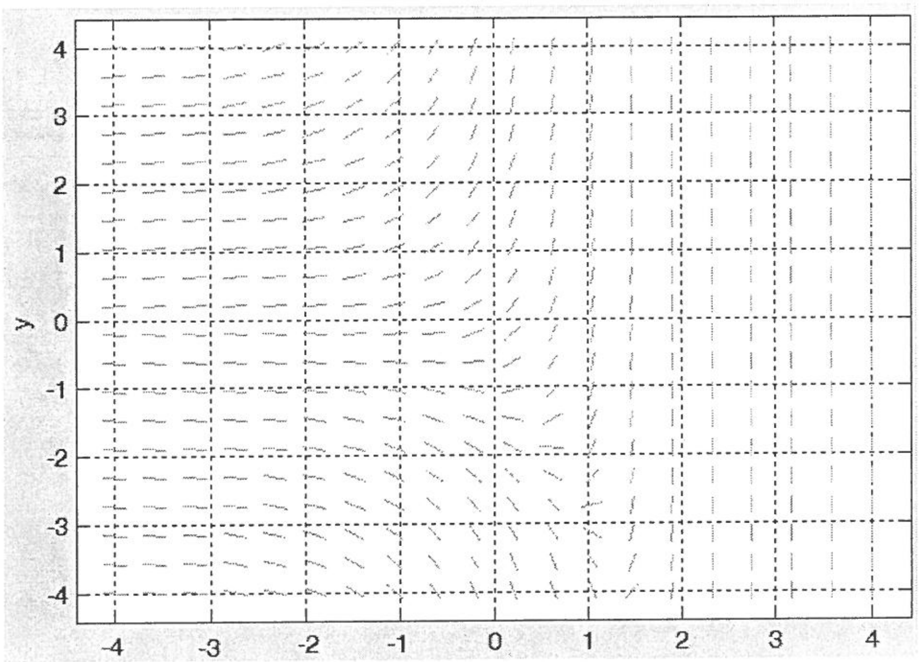
Dibujo de curvas donde las soluciones cambian el crecimiento + soluciones / y(0)=0

Campo I,



x

Campo II



x

EJERCICIO 3 (1.6p)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, modelos de resortes lineales, dependiendo del valor k de la constante de amortiguación, $k > 0$

$$y'' + ky' + y = cos(t)$$

Analizar los casos $0 < k < 2$, $k > 2$ y $k = 2$ (en caso necesario tomar un valor de k particular).

SOLUCIÓN particular de $y'' + ky' + y = cos(t)$:

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y'' + ky' + y = 0$ para $0 < k < 2$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y'' + ky' + y = 0$ para $k > 2$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y'' + 2y' + y = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y'' + 2y' + y = cos(t)$

EJERCICIO 4 (1.6p)

a.- Se considera la ecuación diferencial

$$y'' + xy' + y = 0$$

Buscar la solución general como una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y encontrar el término general a_n en función de los anteriores (obviamente, $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$).

b.- Utilizando el apartado anterior, o el desarrollo en serie de Taylor de la solución, Encontrar los 8 primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución del problema de Cauchy

$$y'' + xy' + y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

c.- Demostrar que una solución de la ecuación diferencial $y'' + xy' + y = 0$ es de la forma $y_1(x) = e^{\alpha x^2}$ para alguna constante α. Determinar dicha constante y encontrar otra solución de la ecuación $y'' + xy' + y = 0$ utilizando el método de reducción de orden. Dejar las integrales indicadas si no se encuentran las primitivas. Indicar la relación de $y_1(x)$ con el apartado *b*: razonar la respuesta.

a). TÉRMINO GENERAL $a_{n+2} =$ .... $n \geq$ ......

b). APROXIMACIÓN SOLUCIÓN (8 primeros términos)

c). $y_1(x) =$ ....$y_2(x) =$ ....

Relación con b): RAZONAMIENTO BREVE

EJERCICIO [redacted] (1.4p)

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2 + e^{-x} \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 + 2e^{-x} \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$

SOLUCION GENERAL SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCION GENERAL SISTEMA NO HOMOGÉNEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

EJERCICIO 6 (1 p)

Resolver el problema de contorno

$$\left(\frac{y'}{\cos(x)}\right)' = 1, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

SOLUCIÓN GENERAL ED :

SOLUCIÓN P. contorno :

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

- Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$