Examen Septiembre 10/09/16.

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. Todos los ejercicios puntúan igualmente.
3. Las respuestas no pueden ser a lápiz.

Ejercicio 1.- (1.5 ptos.) Calcular la integral curvilínea $\int_\gamma \omega$, recorrida en sentido positivo, siendo

$$\omega(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + y\left[xy + \log\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\,\mathrm{d}y\,.$$

Donde γ es el contorno de

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le x;\ 1 \le x^2+y^2\right\}$$

Ejercicio 2.- (1.5 ptos.) Sea una esfera inscrita en un cilindro recto de radio r. Se secciona el conjunto por dos planos paralelos y perpendiculares al eje del cilindro, que distan entre si h, $0 < h < r$. Hallar la relación de las áreas laterales que encierran los volúmenes seccionados si:

a) Ambos planos están por encima del plano que contiene a la circunferencia común a la esfera y al cilindro.

b) Uno de los planos está por encima del plano que contiene a la circunferencia común a la esfera y al cilindro y el otro por debajo.

NOMBRE.. Número.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2015/16
Ampliación de Matemáticas
Examen : Septiembre - 2016

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. El tiempo para realizar esta parte es de dos horas y cuarto.
3. Las respuestas no pueden ser a lápiz.
4. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen.

EJERCICIO 3 (1.2p)

Resolver la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x\sqrt{x}$$

sabiendo que una solución de la ecuación homogénea es (función de Bessel de orden 1/2)

$$y_1(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

SOLUCIÓN GENERAL ED HOMOGÉNEA :

SOLUCIÓN GENERAL ED NO HOMOGÉNEA :

EJERCICIO 4.1 (1.8p)

4.1 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$a). \quad y^{(4)} - 2y'' + y = exp(x) \qquad b). \quad y^{(4)} + 2y'' + y = \sin(2x)$$

Encontrar las soluciones de b) que verifiquen las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

SOLUCION GENERAL ED. HOMOGENEA en a).:

SOLUCION PARTICULAR de a).

SOLUCION GENERAL de a).

SOLUCION GENERAL ED. HOMOGENEA en b).:

SOLUCION PARTICULAR de b).

SOLUCION GENERAL de b).

SOLUCIONES de b)/ $y(0) = y(\pi) = 0$.

EJERCICIO 4.2(1.2p)

Se considera el problema de contorno

$$y'' + 2y' + y = \sin(2x), \quad x \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

Resolver si se puede. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema dado para otros datos no homogéneos $f(x)$ $(y'' + 2y' + y = f(x),\, y(0) = 0, y(\pi) = 0)$.

SOLUCION PARTICULAR de la ED.

SOLUCION GENERAL de la ED.

SOLUCION del problema de contorno

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION
del p. de contorno (razonamiento breve)

EJERCICIO 5 (0.8p)
Encontrar los 6 primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución del problema de Cauchy

$$y'' - sin(2x)y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

(Indicación: buscar la solución como una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o utilizar el desarrollo en serie de Taylor la solución)

APROXIMACIÓN SOLUCIÓN (6 primeros términos) :

ERESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 6 (2p)
Se considera la ecuación de Riccati

$$y' + 2e^{2x}y - y^2 = e^{4x} + 2e^{2x}$$

que tiene una solución particular $y_p(x) = e^{\alpha x}$ para alguna constante α. Determinar dicha constante y resolver la ecuación. Encontrar las soluciones que pasan por los puntos $(0,1)$, $(x_0, 0)$ y $(0, y_0)$ así como el intervalo de definición de éstas. Estudiar el crecimiento o decrecimiento de las soluciones de la ED dada.

(Nota: x_0 e y_0 denotan números reales cualesquiera. En caso de saber resolver la ED explícitamente, estudiar la existencia y unicidad de solución de la ED pasando por cada punto del plano (x_0, y_0).)

SOLUCION PARTICULAR (valor de α):

SOLUCION GENERAL:

SOLUCION pasando por $(0,1)$
Intervalo

SOLUCION pasando por $(x_0, 0)$
Intervalo

SOLUCION pasando por $(0, y_0)$
Intervalo

CRECIMIENTOS
o DECRECIMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x) e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x) e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.
-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

- Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$