Nombre Apellidos

Curso 17/18. Examen Septiembre 18/09/08.

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. Todos los ejercicios puntúan igualmente.
3. El peso del examen en la calificación final es del 30 %.
4. Las respuestas no pueden ser a lápiz.

Ejercicio **1.**- Sea el dominio D definido del modo siguiente: (2.5 P)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|a^2x^2 + b^2y^2 + z^2 \leq 2\} \bigcap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|z^2 \geq a^2x^2 + b^2y^2\} \bigcap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|z \geq 0\}$$

Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, se pide:

- Plantear una integral triple, en coordenadas cilíndricas, o cilíndricas generalizadas, que determine el volumen de D.
- Plantear una integral triple, en coordenadas esféricas, o esféricas generalizadas, que determine el volumen de D.
- Resolver una de ellas.

Nombre Apellidos Nº

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS, *Curso* 2º *Curso 2017/2018.*

Examen de Septiembre, Ecuaciones Diferenciales

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. Las respuestas no pueden ser a lápiz y deben ser debidamente razonadas.
3. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 1.- (1.2p) Resolver la ecuación diferencial

$$y' + y - e^{-2x}\cos(x)y^{-1} = 0$$

Encontrar la solución explícita con gráfica pasando por $(0,1)$ e indicar el intervalo de definición de dicha solución si se puede. Hacer lo mismo para el punto $(2,-1)$. En caso de no poder resolver, estudiar la existencia y unicidad de solución pasando por cada punto del plano (x_0, y_0) e indicar el intervalo de defininición.

SOLUCION GENERAL DE LA ED

SOLUCION EXPLICITA/ $y(0) = 1$ ....INTERVALO..........

SOLUCION EXPLICITA / $y(2) = -1$..INTERVALO..........

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION: sólo si procede

EJERCICIO 2.- (1.8p)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, sabiendo que una solución de una de las ecuaciones homogenéneas asociada es $y_1 = \dfrac{e^{-x}}{x}$

2.1) $x^2y'' + xy' - y = 1/x$

2.2) $xy'' + 2y' - xy = 1$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $x^2y'' + xy' - y = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $x^2y'' + xy' - y = 1/x$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $xy'' + 2y' - xy = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $xy'' + 2y' - xy = 1$

RESOLUCIÓN y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3.- (1.6p)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, modelos de resortes lineales, dependiendo del valor k de la constante de amortiguación, $k > 0$

$$y'' + ky' + y = e^{-t}$$

Analizar los casos $0 < k < 2$, $k > 2$ y $k = 2$ (en caso necesario tomar un valor de k particular).

SOLUCIÓN particular de $y'' + ky' + y = e^{-t}$:

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y'' + ky' + y = 0$ para $0 < k < 2$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y'' + ky' + y = 0$ para $k > 2$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y'' + 2y' + y = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y'' + 2y' + y = e^{-t}$

EJERCICIO 4.- (0.8p)

Resolver la ecuación diferencial

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \cos(x)$$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

SOLUCIÓN PARTICULAR ED: $y''' + 3y'' + 3y' + y = \cos(x)$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y''' + 3y'' + 3y' + y = \cos(x)$

RESOLUCIÓN y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5.- (1.3p)

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 + 2e^{2x} \\ y_2' &= -4y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

SOLUCION GENERAL SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCION GENERAL SISTEMA NO HOMOGÉNEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

EJERCICIO 6.- (0.8p) Estudiar el crecimiento, decrecimiento y concavidad (convexidad respectivamente) de las soluciones de la ecuación diferencial.

$$y' = y^2 - x^2 + 1$$

En particular, escribir claramente las curvas isoclinas para la pendiente 1 y la curva o curvas en que las soluciones pueden cambiar la concavidad. Dibujar las isoclinas encontradas e indicar sobre el gráfico las distintas regiones de crecimiento o concavidad. Asimismo dibujar aproximadamente curvas integrales comenzando en las distintas regiones del plano.

(Indicación: las gráficas proporcionadas corresponden a las isóclinas para las pendientes 0 y a las curvas que marcan cambios de concavidades en las soluciones)

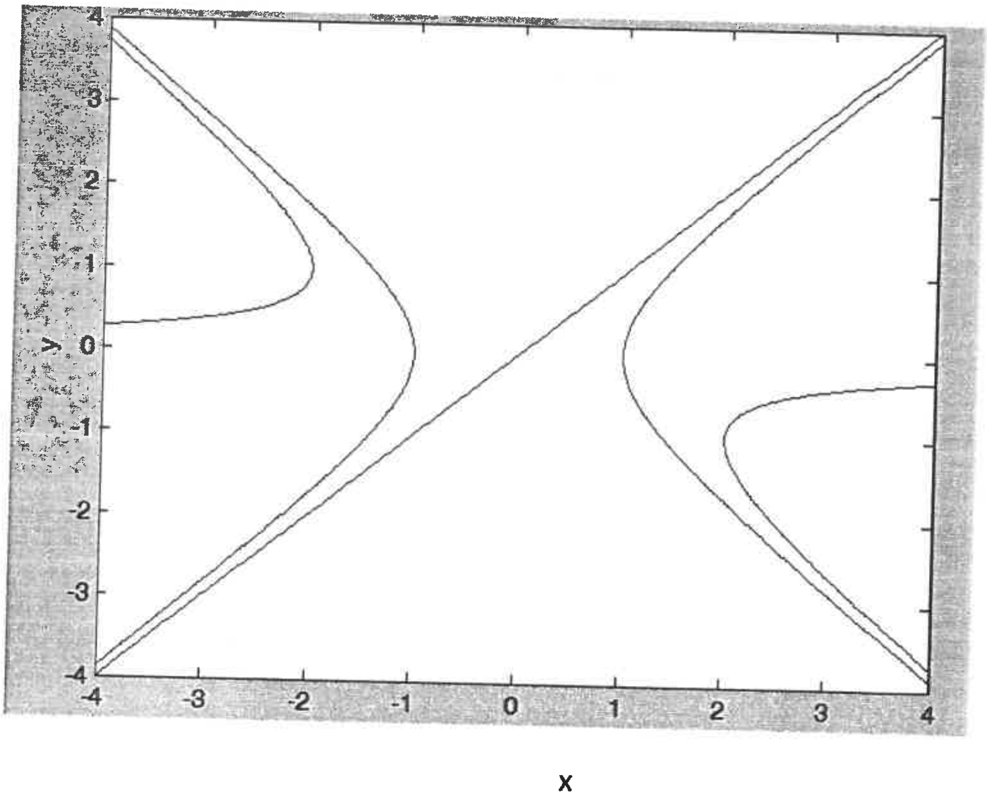
ISOCLINAS: PENDIENTE 0..PENDIENTE 1......................

CURVAS marcando los posibles cambios de concavidad..

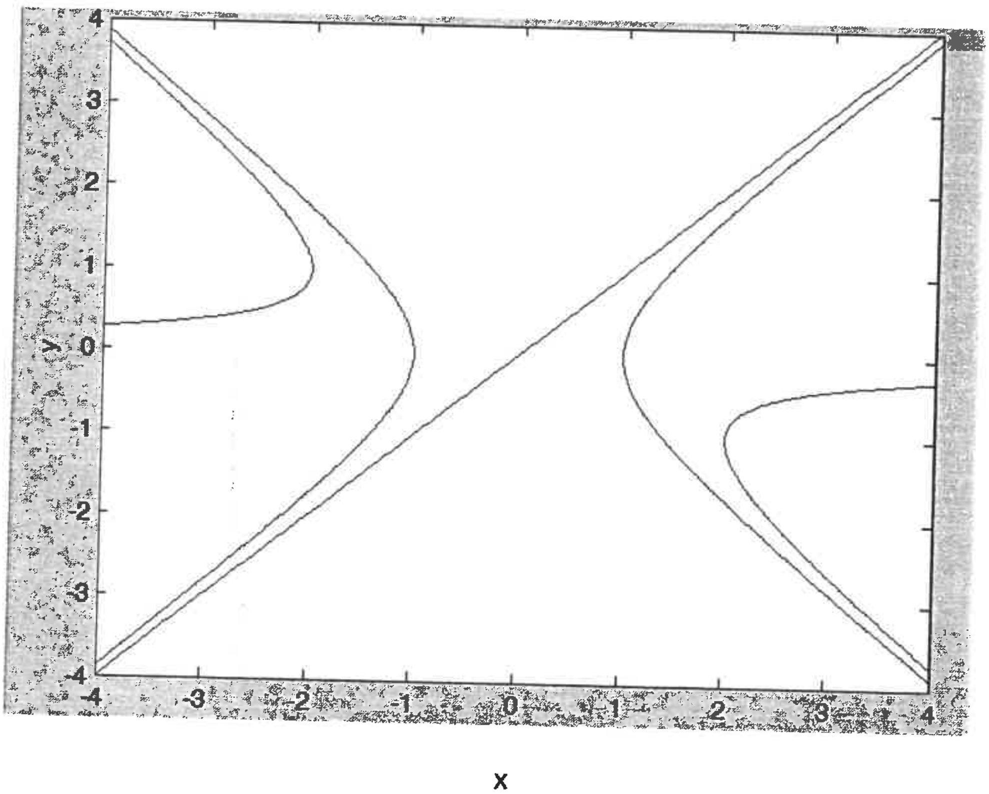
RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Las gráficas proporcionadas corresponden a las isóclinas para las pendientes 0 y a las curvas que marcan cambios de concavidades en las soluciones

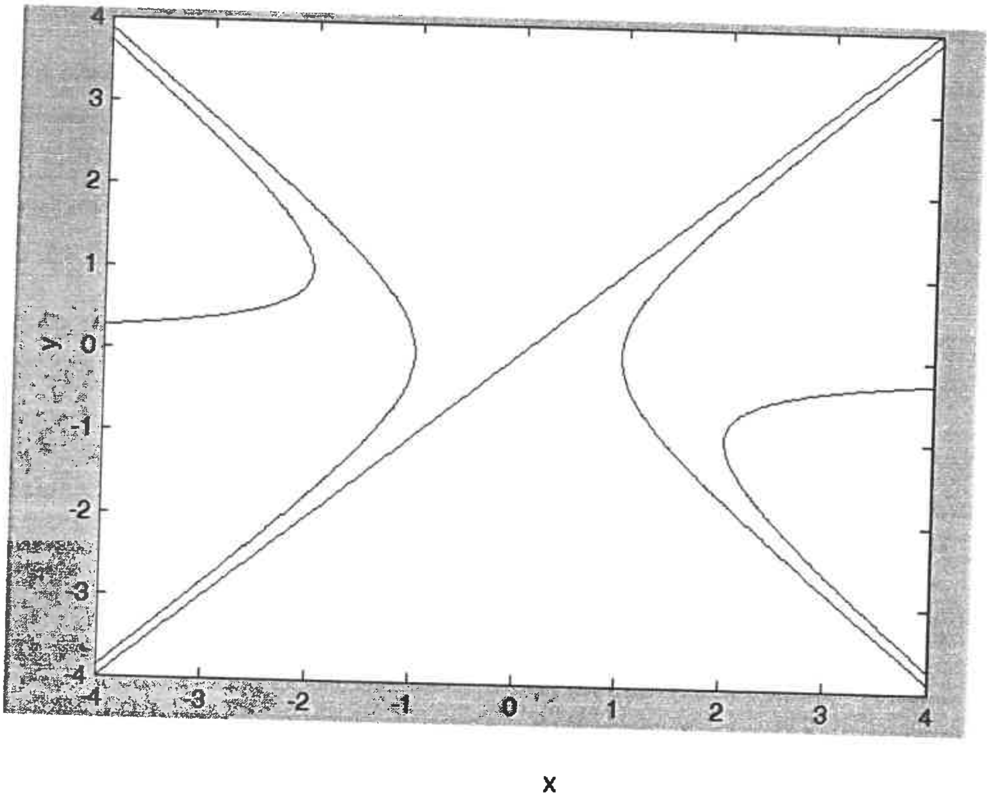
Rayar las regiones donde las soluciones son crecientes



Rayar las regiones donde las soluciones son cóncavas



Dibujar la dirección del campo sobre las distintas isoclinas. Dibujar soluciones aproximadas



RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y})$, $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

- Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$