Nombre Apellidos Nº

Ampliación de Matemáticas, *Curso 2º* *Curso 2016/2017.*

Curso 16/17. Examen Septiembre: Cálculo Integral 17/09/09.

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. Las respuestas no pueden ser a lápiz y deben ser debidamente razonadas.

1.- Calcular:
$\int_\gamma ydx - xdy + zdz$, siendo γ la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $z - y = a$ en sentido antihorario.

Nombre Apellidos Nº

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS, *Curso 2º* *Curso 2016/2017.*

Examen de Septiembre, Ecuaciones Diferenciales

Instrucciones:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes.
2. Las respuestas no pueden ser a lápiz y deben ser debidamente razonadas.
3. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 2 (1p)

Resolver el problema de Cauchy $(t \equiv x)$

$$y' - 2y = -2\sin(t)y^2, \quad y(0) = 1\,.$$

SOLUCIÓN GENERAL de la ED :

SOLUCIÓN de $y(0) = 1$

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3 (1.6p)

Se consideran los problemas de Cauchy

$$3.1). \quad y' = e^{-x^2}y + 1, \quad y(0) = 1$$

$$3.2). \quad y' = e^{-x^2}y^2 + 1, \quad y(0) = 1$$

Razonar la existencia y unicidad de solución de cada problema y el intervalo de definición de la solución. Aproximar dicha solución mediante los tres primeros términos del desarrollo en serie de taylor e indicar el campo de direcciones asociado.

3.1).APROXIMACIÓN..INTERVALO.........................CAMPO I o II

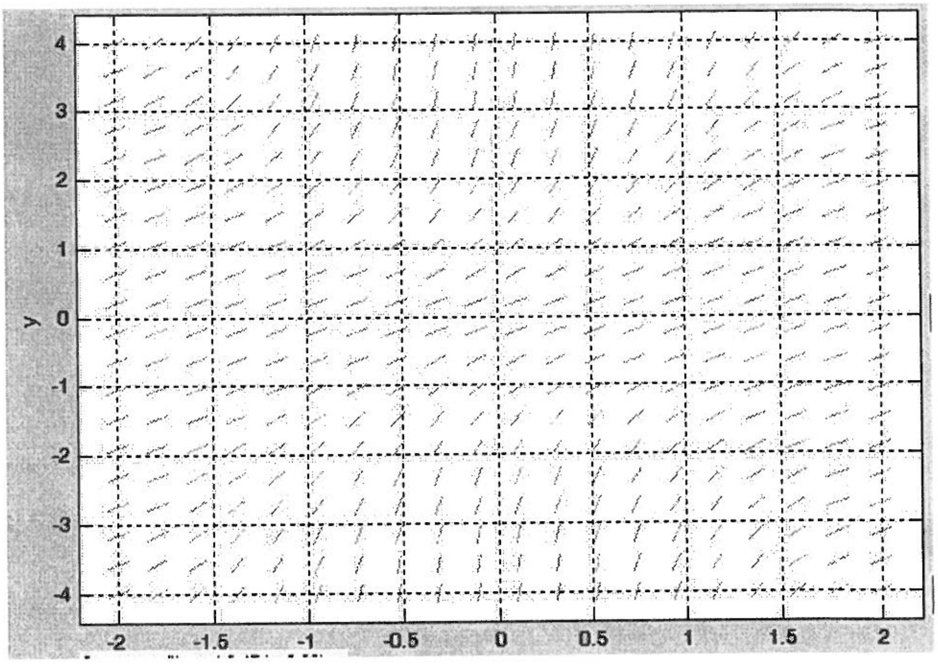
RAZONAMIENTO BREVE

3.2).APROXIMACIÓN..INTERVALO.........................CAMPO I o II:

RAZONAMIENTO BREVE

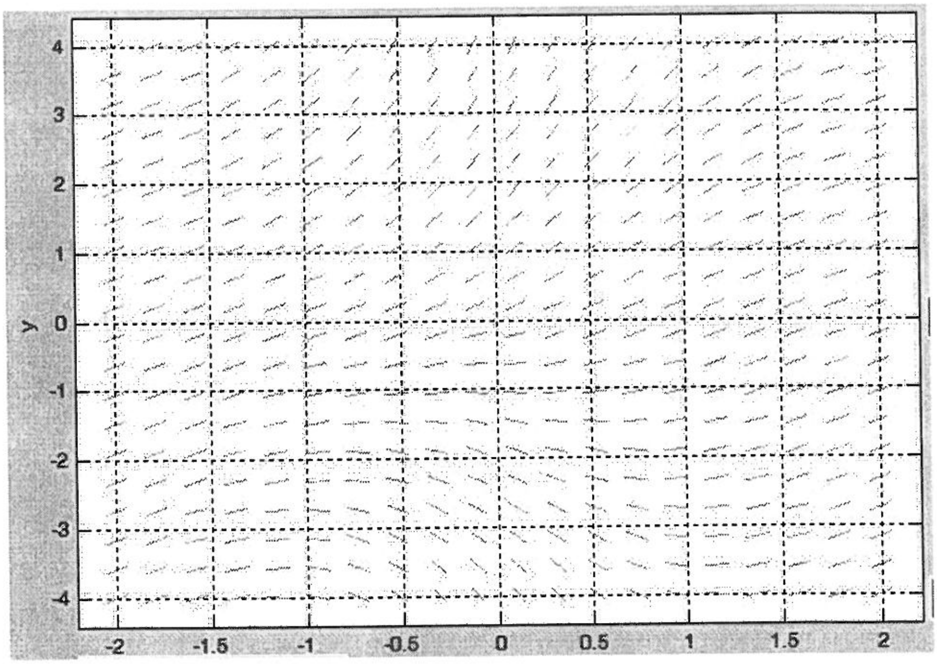
Razonar brevemente la ecuación diferencial asociada a cada campo de direcciones

I).



X

II).



x

EJERCICIO 4 (2p)

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, sabiendo que una solución de una de las ecuaciones homogenéneas asociada es $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$

$$4.1) \qquad x^2y'' + 2xy' - y = 1$$

$$4.2) \qquad xy'' + 2y' - xy = 1$$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $x^2y'' + 2xy' - y = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $x^2y'' + 2xy' - y = 1$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $xy'' + 2y' - xy = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $xy'' + 2y' - xy = 1$

RESOLUCIÓN y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5 (1.6p)
Resolver las ecuacione[illegible]ciales

$$[illegible].1) \qquad y''' - 3y'' + 2y = e^{3x}$$

$$[illegible]2) \qquad y''' - 3y' + 2y = e^{3x}$$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y''' - 3y'' + 2y = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y''' - 3y'' + 2y = e^{3x}$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y''' - 3y' + 2y = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $y''' - 3y' + 2y = e^{3x}$

EJERCICIO 6 (1.3p)

6.1) Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$$

SOLUCION GENERAL SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

6.2) Resolver el problema de Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} xy_1' & = & y_1 - 5y_2 \\ xy_2' & = & y_1 + y_2 \end{array} \right.$$

$$y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1$$

Idea: Supuesto $x > 0$, hacer el cambio de variable $t = \ln(x)$ para reducir el sistema de tipo Euler/problema de Cauchy al del apartado 6.1

SOLUCION GENERAL SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\, \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\, \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\, \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\, \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

- Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$