PROBLEMAS DE CONTORNO*

La forma más general de un problema de contorno para una ecuación de segundo orden es:

$$(\mathbf{PC})\left\{\begin{array}{rcl} a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = h(x) & , & x\in(a,b),\\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)+\alpha_3 y(b)+\alpha_4 y'(b) & = & \gamma_1\,,\\ \beta_1 y(a)+\beta_2 y'(a)+\beta_3 y(b)+\beta_4 y'(b) & = & \gamma_2\,,\end{array}\right.$$

$a_0(x)\neq 0$ en $[a,b]$ y las constantes α_i, β_i afectando a a (b respectivamente) no todas nulas. γ_i constantes

Definiciones:

- En el caso $h(x)=0$, $\gamma_1=0$, $\gamma_2=0$ se dice que el problema (**PC**) es **un problema de contorno homogéneo**.
- Si en las condiciones de contorno $\alpha_3=\alpha_4=\beta_1=\beta_2=0$, se dice que las **condiciones** son **de tipo separado**.
- Si $y(a)=y(b)$, $y'(a)=y'(b)$ se dice que las **condiciones de contorno** son **periódicas**.
- (**PC**) es un **problema de contorno regular** si:

$$(\mathbf{PC}R)\left\{\begin{array}{rcl} (\widetilde{p}(x)y')'+q(x)y & = & h(x)\,, \quad x\in(a,b),\\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a) & = & \gamma_1\,,\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b) & = & \gamma_2\,,\end{array}\right.$$

  $\widetilde{p}(x),\widetilde{p}'(x),q(x),h(x)$ funciones continuas en $[a,b]$, $\widetilde{p}(x)>0\,,\ \forall x\in[a,b]$, $-\infty<a<b<\infty$, y $|\alpha_1|+|\alpha_2|\neq 0$, $|\beta_1|+|\beta_2|\neq 0$.

- Es un problema de contorno **singular** si no es regular.

* **Resúmenes / Capítulo 5 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

ED/GIC/UC/12-13

• **Ecuación en forma autoadjunta**:

$$(\widetilde{p}(x)y')' + q(x)y = h(x)$$

REDUCCION A FORMA AUTOADJUNTA:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = h \longrightarrow (py')' + qy = \tilde{h}$$

multimplicando por

$$r(x) = \frac{\exp(\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx)}{a_0(x)},$$

$\widetilde{p}(x) = \exp \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx,\ q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} \exp \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx,$
$\tilde{h}(x) = \frac{h(x)}{a_0(x)} \exp \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, dx.$

*De manera general, el problema de contorno homogéneo asociado a (**PC**R) o (**PC**) tiene especial interés:* la alternativa de Fredholm*!*

Se consideran $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ funciones continuas en [a,b], $-\infty < a < b < \infty$, y $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

$$(\mathbf{PC}) \begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y &= r(x)\,, \quad x \in (a,b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= \gamma_1\,, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \gamma_2\,, \end{cases}$$

$$(\mathbf{PCH}) \begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y &= 0\,, \quad x \in (a,b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0\,, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0\,. \end{cases}$$

Teorema 6 *El problema de contorno (**PC**) admite solución y ésta es única para cualesquiera valores de las constantes γ_1, γ_2 y de la función $r(x)$ si y sólo si el problema homogéneo asociado (**PCH**) admite sólo la solución trivial $y \equiv 0$.*

ED/GIC/UC/12-13

Definición: problemas de valores propios regulares

Encontrar los valores λ (*valores propios*) tales que existe una solución no nula $y(x)$ (*función propia*) de:

$$\textbf{(PVP)}\left\{\begin{array}{rcl} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda s(x)y & = & 0\,, \quad x \in (a,b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) & = & 0\,, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) & = & 0\,, \end{array}\right.$$

$p(x), p'(x), q(x), s(x)$ funciones continuas en $[a,b]$,
$s(x), p(x) > 0\,, \forall x \in [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$,
y $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

Teorema

1. *Existe una infinidad numerable de valores propios que convergen a infinito:*
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to \infty\,, k \to \infty.$$

2. *Para cada valor propio, λ_k, hay una única función propia asociada, $\phi_k(x)$, linealmente independiente.*

3. *Funciones propias asociadas a distintos valores propios son ortogonales entre sí en el intervalo (a,b), para el peso s; es decir:*
$$\int_a^b \phi_k(x)\phi_j(x)s(x)\,dx = \delta_{kj} Cte.\,, \forall k,j = 1,2,3,\cdots\,.$$

4. *Para cada función $f(x)$ continua a trozos en $[a,b]$ admite un* desarrollo en serie de Fourier de las funciones propias *$\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:*
$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x)\,,$$
donde las constantes c_n son los llamados coeficientes de Fourier *y están dados por la fórmula:*
$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}\,.$$
La convergencia de la serie en hacia la función f tiene lugar en el sentido de la media cuadrática*; es decir:*
$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k(x)|^2 s(x)\,dx \to 0 \text{ cuando } N \to \infty\,.$$

Extensiones: sobre convergencia serie / sobre c.c. periódicas

ED/GIC/UC/13-14

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 6- Tema ~~2~~ (5 LA): Sobre problemas de contorno

1.- Considerando las distintas funciones $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = 2$, $f(x) = e^{5x}$, resolver los problemas de contorno que se pueda de los que se dan a continuación, determinando si tienen solución única.

$$1). \qquad y'' + 9y = f(x), \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

$$2). \qquad y'' + 4y = f(x), \quad x \in (0, \pi)$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

$$3). \qquad y'' - 9y = f(x), \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

$$4). \qquad y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

$$5). \qquad \left(\frac{y'}{cos(x)}\right)' = 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{4})$$
$$y(0) + y'(0) = 3, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0$$

$$6). \qquad (x-1)^3 y'' + 3(x-1)^2 y' + (x-1)y = (x-1)^2, \quad x \in (2, 3)$$
$$y(2) = 5, \quad y(3) + 2y'(3) = 0$$

2.- Encontrar las relaciones entre las constantes rigidez a flexión EI y esfuerzo axil T para que una viga situada en el eje de las x en intervalo $[0, \pi]$, y sujeta en los extremos, se deforme en ausencia de carga externa. Esto es, T/EI tal que exista solución no nula de:

$$EIy'' + Ty = 0, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

3.- Considerar las funciones definidas a continuación en el intervalo $[-\pi, \pi]$: $f(x) = x^2 - \pi^2$

$$f(x) = x \quad \text{si } x \in [-\pi, 0], \qquad f(x) = 0 \quad \text{si } x \in [0, \pi]$$
$$f(x) = -1 \quad \text{si } x \in [-\pi, 0], \qquad f(x) = 1 \quad \text{si } x \in (0, \pi]$$

Encontrar el desarrollo en serie de Fourier clásico de $f(x)$ en términos de las funciones $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$. Demostrar que dichas funciones $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$ son las *funciones propias* del problema de valores propios:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (-\pi, \pi)$$
$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

ED/GIC/UC/12-13

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON 2 VARIABLES INDEPENDIENTES *

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0$$

x, t **variables independientes;**

$u(x, t)$ **función incógnita** $(t \equiv y)$

▶ **EDP de primer orden**

$$u_t - c u_x = 0\,, \qquad u(x, 0) = f(x)$$

Soluciones: *ondas* $u(x, t) = f(x + ct)$

▶ **EDP de segundo orden**

Ecuación de ondas: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t, x)$

Ecuación del calor: $u_t - a^2 u_{xx} = f(t, x)$

Ecuación de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$

SOLUCIÓN: Buscar u(x,t) que admita derivadas parciales segundas "verificando la ecuación"

SEPARACIÓN DE VARIABLES:

Buscar u(x,t)=X(x).T(t) y llegar a una ecuación diferencial ordinaria en la variable independiente x y otra en la variable independiente t

En general, nos lleva al cálculo de valores propios y funciones propias para problemas de contorno en EDO, y a los desarrollos en serie de Fourier de funciones

* **Resúmenes / Capítulo 6 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

ED/GIC/UC/12-13

Ejemplos

- Propagación de ondas en una cuerda, de logitud infinita, (*problema de Cauchy / valores iniciales*)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x) \quad , \quad u_t(x,0) = 0\,,\ x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

$u(x,t) = \sin(x)\cos(t)$

- Propagación del calor en una barra conductora de longitud infinita, (*problema de Cauchy*)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) = \cos(x),\ x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

$u(x,t) = e^{-t}\cos(x)$

- Modelo de calor estacionario:*problema de contorno*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{en} \quad x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) = 1, & \text{en} \quad x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

$u(x,y) = 1$

- Modelo de vibraciones de una viga, con extremos simplemente soportados (*problema mixto*)

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0\,, x \in (0,\pi), t > 0\,, \\ u(x,0) = \sin 2x\,,\ x \in [0,\pi]\,, \\ u_t(x,0) = 3\sin 2x\,,\ x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, t \geq 0\,, \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0\,, t \geq 0\,. \end{cases}$$

$u(x,t) = \sin(2x)(\cos(4t) + \frac{3}{4}\sin(4t))$

ED/GIC/UC/12-13