2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES
HOJA 4 - Tema 2: EDO de orden $n > 1$

Resolución y aproximación de soluciones

1. Que se puede decir de la existencia u unicidad de solución, y del intervalo de definición de ésta para los problemas de valores iniciales:

   $a).\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad b).\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 5x \\ y(-3) = 4, \quad y'(-3) = 1 \end{cases}$

   $c).\begin{cases} x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = \frac{1}{x^2-1} \\ y(5) = 0, \quad y'(5) = 1 \end{cases}$ $\qquad d).\begin{cases} y'' + \frac{1}{x-3}y' + \sqrt{x}\,y = \ln x \\ y(1) = 3, \quad y'(1) = -3 \end{cases}$

   $n \in \mathbf{N}$, $\nu \in \mathbf{R}$ son constantes dadas.

2. Demostrar que $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $y'' + y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

3. Resolver la ecuación $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ sabiendo que una solución es un polinomio de primer grado. Escribir la ecuación de primer orden a la que se llega utilizando el método de variación de parámetros. Indicar en que intervalos se resuelve la ecuacion.

4. Resolver la ecuación $y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = e^{-x^2}$ sabiendo que una solución de la ecuación homogénea asociada es de la forma $y = e^{\alpha x^2}$ para alguna constante α

5. Se sabe que una solución de la ecuación de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ (con n un número natural) es un polinomio de grado n, encontrar la solución de:

   $$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = e^{-x^2}$$

   para los valores de $n = 1$ y $n = 2$. ¿Cuántas soluciones verifican $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$?

6. Aplicar el método de variación de parámetros para resolver $x^3y''' + xy' - y = 1$.

7. Resolver las siguientes ecuaciones

   $a)$. $x^2y'' - 2y = x^2$ $\qquad f)$. $y'' + y' + y = 1 + x + x^2$
   $b)$. $y'' + 2y' + y = x\sinh x$ $\qquad g)$. $y'' + y = |x|$
   $c)$. $y'' + y = \sec x$ $\qquad h)$. $y''' + y'' - 2y' = -2$
   $d)$. $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x} + 1$ $\qquad k)$. $y''' + y'' - 2y' = -2 - e^x$
   $e)$. $y'' + 4y = x\sin(2x)$ $\qquad l)$. $y^{iv)} + 2y'' + y = e^{-x}\sin(x)$
   $m)$. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$ $\qquad n)$. $y^{iv)} - y'' = 0$
   $o)$. $y^{iv)} - 16y = 0$ $\qquad p)$. $y^{iv)} + y'' = e^x$

8. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales

$$a).\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad b).\begin{cases} y''' + y'' - 2y' = -2 - e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0 \end{cases}$$

9. Resolver las siguientes ecuaciones

$$a). \quad y'' + 4y' + 5y = \frac{e^{-2x}}{\cos x} \qquad b). \quad y'' + 4y' + 13y = e^x \cos(3x)$$

10. Resolver el problema de Cauchy, razonando en qué intervalo existe solución única

$$\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = \dfrac{x}{\ln x} \\ \\ y(e) = 1, \quad y'(e) = 1 \end{cases}$$

11. Sabiendo que una solución de la ecuación $y'' - y' + e^{2x}y = 0$ es $y_1(x) = \sin(e^x)$, resolver los problemas de Cauchy:

$$a).\begin{cases} y'' - y' + e^{2x}y = e^{2x} \\ \\ y(\ln \pi) = 0, \quad y'(\ln \pi) = 0 \end{cases} \qquad b).\begin{cases} y'' - y' + e^{2x}y = e^{2x} \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Intentar encontrar la solución (o una aproximación de ésta) en caso de no conocer $y_1(x)$. Razonar/ comprobar si ésta solución coincide la obtenida concociendo $y_1(x)$.

12. Utilizar los 6 primeros términos del desarrollo en serie de la solución $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, para aproximar la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + e^x y' + (1 + x^2)y = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

13. Resolver o aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$y'' - y = x^2$$

$$y'' - x^2 y = 0$$

$$y'' + y' + x^3 y = 0$$

$$y'' - \sin(x)y = 0$$

En caso de aproximar, utilizar los 10 primeros términos del desarrollo en serie de la solución $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, y encontrar el término general a_n en función de los anteriores.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 5 - Tema 2: EDO de orden $n > 1$

Sobre modelos matemáticos

1. La ecuación que rige el movimiento que oscila excitado por una fuerza $p(t)$, suponiendo que la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad está dado por

$$my'' + ky' + cy = p(t)\,.$$

Estudiar las vibraciones dependiendo de la relación entre la masa m del cuerpo que pende del resorte, la constante de recuperación c y la constante amortiguación k (ver sección 2.5 del libro de apuntes).

a). Tomando $p(t) = 0$ identificar las distintas situaciones con las gráficas que se dan a continuación. Dichas gráficas representan vibraciones fuertemente amortiguadas, débilmente amortiguadas y sin amortiguación entre otras.

En particular, considerar $p(t) = 0$, y las ecuaciones

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y'' + 4y = 0$$

y hacer una gráfica de las soluciones para distintas condiciones iniciales indicando cuándo el movimiento es débilmente amortiguado, fuertemente amortiguado o periódico.

b). Demostrar que en ausencia de amortiguación ($k = 0$), puede producirse el conocido fenómeno de la resonancia; tómese para ello $p(t) = \cos(\sqrt{c/m}\,t)$. Identificar la gráfica de la solución

c). Comparar el resultado del apartado anterior para $k = 0$, tomando $p(t)$ otra función periódica que no sea solución de la ecuación homogénea (ver ejercicio 2.)

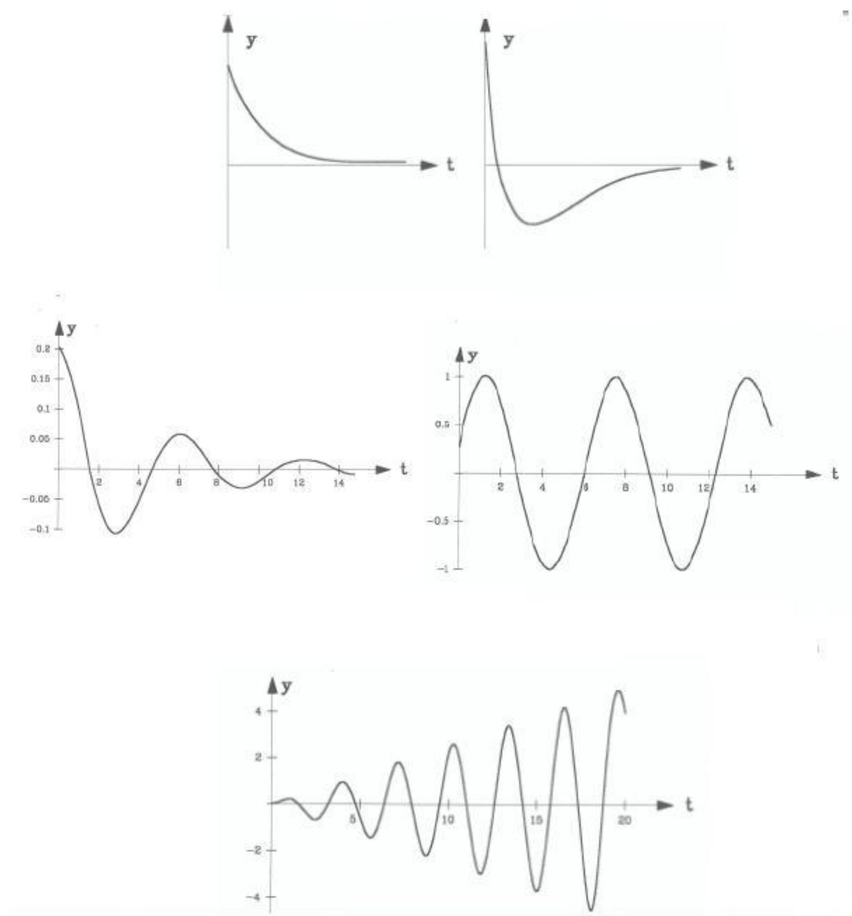
2. Estudiar las vibraciones que se producen en un resorte cuyo movimiento está descrito por los problemas de valores iniciales

$$a).\begin{cases} y'' + 4y = \cos(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad b).\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

3. Comparar la ecuación del resorte lineal de los ejercicios anteriores con la que modela el paso de corriente por un circuito eléctrico:

$$LQ''(t) + RQ'(t) + C^{-1}Q(t) = E(t)$$

donde $Q(t)$ representa la carga en el tiempo t; $E(t)$ es la fuerza electromotriz, y las constantes L, R y C son las constantes de de inducción, de resitencia, y capacidad, respectivamente (ver secciones 1.6 y 2.5 del libro de apuntes).



4. Escribir la solución general que modela los desplazamientos de una viga sometida a una carga externa $p(x)$
$$EIy^{iv)} + Ty'' = p(x)$$
dependiendo de las constantes rigidez a flexión $EI > 0$ y esfuerzo axil T. Tomar para ello $p(x) = \cos x$ y $p(x) = e^x$.

5. Se considera un problema que sirve de modelo para describir las deformaciones de una viga (se supone situada en el eje de las x con los extremos fijos):
$$\begin{cases} y'' = \frac{M(x)}{EI}, x \in (0,3) \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(3) = 0 \,. \end{cases}$$
Encontrar la solución en caso de que exista y sea única para el valor de la constante $EI = 1$, y para el momento $M(x)$: $M(x) = 2x$ para $x \in [0,1]$, $M(x) = 3 - x$ para $x \in [1,3]$.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 6- Tema 2 (5 LA): Sobre problemas de contorno

1.- Considerando las distintas funciones $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = 2$, $f(x) = e^{5x}$, resolver los problemas de contorno que se pueda de los que se dan a continuación, determinando si tienen solución única.

$$1). \quad y'' + 9y = f(x), \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

$$2). \quad y'' + 4y = f(x), \quad x \in (0, \pi)$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

$$3). \quad y'' - 9y = f(x), \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

$$4). \quad y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

$$5). \quad \left(\frac{y'}{cos(x)}\right)' = 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{4})$$
$$y(0) + y'(0) = 3, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0$$

$$6). \quad (x-1)^3 y'' + 3(x-1)^2 y' + (x-1)y = (x-1)^2, \quad x \in (2, 3)$$
$$y(2) = 5, \quad y(3) + 2y'(3) = 0$$

2.- Encontrar las relaciones entre las constantes rigidez a flexión EI y esfuerzo axil T para que una viga situada en el eje de las x en intervalo $[0, \pi]$, y sujeta en los extremos, se deforme en ausencia de carga externa. Esto es, T/EI tal que exista solución no nula de:

$$EIy'' + Ty = 0, \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

3.- Considerar las funciones definidas a continuación en el intervalo $[-\pi, \pi]$: $f(x) = x^2 - \pi^2$

$$f(x) = x \quad \text{si } x \in [-\pi, 0], \qquad f(x) = 0 \quad \text{si } x \in [0, \pi]$$
$$f(x) = -1 \quad \text{si } x \in [-\pi, 0], \qquad f(x) = 1 \quad \text{si } x \in (0, \pi]$$

Encontrar el desarrollo en serie de Fourier clásico de $f(x)$ en términos de las funciones $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$. Demostrar que dichas funciones $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$ son las *funciones propias* del problema de valores propios:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (-\pi, \pi)$$
$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$