2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 1 - Tema 1: EDO de primer orden

Sobre interpretación geométrica

1. Hacer un dibujo aproximado de las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales (resolviendo si se puede o mediante el campo de direcciones asociado)

   $a).\quad y' = \dfrac{y}{x},\qquad b).\quad y' = \dfrac{-x}{y}\qquad c).\quad y' = e^{-x^2},\qquad d).\quad y' = \dfrac{y}{\sin(x)},$

   $e).\quad y' = y + \sin(x),\qquad f).\quad y' = \dfrac{xy}{|xy|},\qquad g).\quad y' = \dfrac{y}{x^2}\qquad h).\quad y' = cos(y - x)$

   $i).\quad y' = \sqrt{|1 - x^2 - y^2|},\qquad j).\quad y' = x^2 + y^2,\qquad k).\quad y' = y^2 - x^2,$

2. Hallar la ecuación diferencial de las circunferencias:

   - Tangentes al eje de las x y a la recta $y = 4$

   - Centradas en el eje $y = 0$ y de radio 1.

   Deducir si hay más curvas solución de la ecuación diferencial encontrada.

3. Hallar las ecuaciones diferenciales de las que son solución las familias de curvas:

   $a).\quad y = e^{Cx},\qquad b).\quad y = sin(x + C)\qquad c).\quad Cy = \sin(Cx),\qquad d).\quad x^2 + Cy^2 = 2y.$

4. Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales a las siguiente familias

   $a).\quad y = Cx^2,\qquad b).\quad xy = C\qquad c).\quad y^2 = x + C,\qquad d).\quad y = e^{Cx}.$

5. Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = C^2$.

   Hallar la familia de curvas que cortan a la familia $x^2 + y^2 = C^2$ con un ángulo $\pi/4$.

6. Una curva, en el plano xy, pasa del origen de cordenadas al primer cuadrante. Encontrar la ecuación de la curva sabiendo que: el área de la región bajo la curva entre $(0, 0)$ y (x, y) es un tercio del área del rectángulo que tiene a esos puntos como vértices opuestos.

7. Encontrar las curvas verificando que, en cada punto (x, y), la abscisa del punto de intersección de la tangente a la curva (en (x, y)) con el eje de las abscisas es la mitad de la del punto.

8. Una pelota de futbol americano, que tiene forma de elipsoide de revolución con 12 pulgadas de longitud y 6 de ancho, permanece bajo la lluvia. Encontrar las trayectorias que seguirán las gotas de agua al escurrir por sus lados.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 3 - Tema 1: EDO de primer orden

Sobre modelos matemáticos

1. Un columna cónica de sección circular cuyo material tiene una densidad constante a soporta una carga L. Sea r_0 el radio de la parte superior de la columna. Teniendo en cuenta que las áreas de las secciones transversales son proporcionales a la carga que soportan, encontrar el radio $r(x)$ a una distancia x por debajo de la parte superior.

2. Comenzó a nevar una mañana y la nieve siguió cayendo con la misma intensidad durante todo el día. Al mediodía una máquina quitanieves empezó a limpiar una carretera a ritmo constante en términos de volumen quitado cada hora. La máquina limpió 2 Kms. para las dos de la tarde y 1 Km. más para las 4 de la tarde. ¿A qué hora empezó a nevar?.

3. Una bola de naftalina que tenía originalmente un radio de $\frac{1}{4}$ cm., al cabo de un mes, tiene un radio de $\frac{1}{8}$ cm.. Suponiendo que la evaporación es proporcional a la superficie, ¿cuántos meses tardará en desaparecer por completo?.

4. La desintegración de la materia radioactiva es proporcional a la cantidad de materia que se tiene. Si la desintegración del 50% de la materia radioactiva se produce en 30 días, ¿en cuánto tiempo quedará un 1% de la cantidad inicial?

5. El ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura existente entre él y el medio que le rodea. Se calienta el cuerpo a 110^0C, y se expone al aire libre a una temperatura de 10^0C, que se mantiene constante. Al cabo de una hora su temperatura es de 60^0C. ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que se enfríe a 30^0C?.

6. Se supone que la resitencia del aire, que actua sobre un cuerpo en caída de masa m, ejerce una fuerza retardadora proporcional a la velocidad. Si se lanza un cuerpo, desde una altura H, con velocidad inicial v_0, calcular la velocidad en función del tiempo. Si $v_0 = 0$, calcular la velocidad con la que llegará al suelo.

   Calcular la velocidad si la fuerza retardadora es proporcional al cuadrado de la velocidad y $v_0 = 0$.

   Comparar con el caso en el que se supone que no hay rozamiento.

   En los casos anteriores, calcular la altura en función del tiempo. Plantear la ecuación diferencial de segundo orden que verifica.

7. Se considera la ecuación de un modelo de resorte lineal no amortiguado $my'' + cy = 0$, con m y c constantes positivas características del resorte (constantes de masa y recuperación, repectivamente). Reducir a una ecuación de primer orden y resolver.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 2 - Tema 1: EDO de primer orden

Resolución de ecuaciones elementales

1. Resolver las ecuaciones:

   a). $y' = \dfrac{\cos x}{\sin y + 1}$, *b*). $y' = xy, \quad y(1) = 3$, *c*). $y' = -\dfrac{\tan y}{\tan x}$,

   d). $y' = \dfrac{x}{y} + \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, *e*). $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, *f*). $xy' = y - x\exp(\dfrac{y}{x})$,

   g) $y' = \dfrac{x+y+1}{x+y-1}$, *h*). $y' = \dfrac{2x+y+5}{x+2y-4}$ *i*). $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$,

   j). $y' = \dfrac{x+y}{y-x}$, *k*). $y' = \dfrac{y(x+y)}{x^2}$, *l*). $y' = -\dfrac{y(x^2+x)}{x}, \quad y(1) = 1$

2. Resolver las ecuaciones:

   a). $y(x^2+x) + x^2y' = 0$, *b*). $x\cos x = xy^2y' + y^3$, *c*). $y' = -\dfrac{y}{3x - xy - 2}$,

   d). $y' + y^2 = 1 + x^2$, *e*). $xy' + y = x^4y^3$, *f*). $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y(-2) = 1$,

   g). $y' + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}$, *h*). $y' = \dfrac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$, *i*). $y' + 2xy = 2x$,

   j). $y' = \dfrac{1}{3}(1-2x)y^4 - y$, *k*). $y' = -\dfrac{y}{x} + y^2 - \dfrac{1}{x^2}, \quad y(2) = 1$

   l). $y'(x\cos x - 1) = y^2 - y(x\sin x + \cos x) + \sin x$,

3. Encontrar a para que la ecuación $(xy^2 + ax^2y)dx + x^2(x+y)dy = 0$ sea diferencial exacta y resolverla.

4. Resolver como ecuaciones diferenciales exactas, o reducibles a diferenciales exactas con factor integrante dependiente de x, y, xy, x^2+y^2 o xy^2:

   a). $3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy = 0$, *b*). $(xy-1)dx + (x^2-xy)dy = 0$,

   c). $ydx + (3x^3y^4 + x)dy = 0$, *d*). $ydx + (x^2y - x)dy = 0$,

   e). $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$, *f*). $xdx + (y + 4y^3(x^2+y^2))dy = 0$,

   g). $y\cos(x)dx + (1+\sin(x))dy = 0$, *h*). $y(x+y)dx - x^2dy = 0$,

   i). $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$, *j*). $(2xy - 2x)dx + dy = 0$,

   Indicar qué cuaciones se pueden resolver por otros métodos

5. Encontrar el domino del plano donde las ecuaciones, e.g., $1-c$ y $1-e$ están definidas

6. Encontrar el dominio del plano donde se tiene garantizado que existe una única solución explícita pasando por cada punto para las ecuaciones $1-c$, $1-e$, $2-f$ y $2-k$ y qué se puede decir del intervalo de definición de las soluciones.