2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 7 - Tema 3: Sistemas de ED lineales

1. Resolver los siguientes sistemas lineales de coeficientes constantes, comprobando que las soluciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

$$a).\, \bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \bar{y}\,, \qquad b).\, \bar{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{y}\,, \qquad c).\, \bar{y}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \bar{y}\,,$$

2. Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

$$a).\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 - 3y_2 + 3e^x \\ y_2' & = & 3y_1 + y_2 \\ y_1(0) & = & 1\,, y_2(0) = 1 \end{array} \right. \qquad b).\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 + 2y_2 + e^{-x} \\ y_2' & = & 2y_1 + y_2 + e^{-x} \\ y_1(0) & = & -\frac{1}{4}\,, y_2(0) = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$c).\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 3y_1 + 2y_2 + 3e^x \sin x \\ y_2' & = & -2y_1 - y_2 - e^x \sin x \\ y_1(0) & = 0 & , y_2(0) = 0 \end{array} \right. \qquad d).\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 4y_1 + 5y_2 + e^x \\ y_2' & = & -2y_1 - 2y_2 \\ y_1(0) & = & 3\ y_2(0) = -2 \end{array} \right.$$

3. Resolver los siguientes sistemas y problemas de Cauchy

$$a).\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_3 \\ y_2' & = & y_1 - 3y_3 \\ y_3' & = & y_2 + 3y_3\,, \end{array} \right. , \qquad b).\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 3y_1 - y_2 + y_3 + 1 \\ y_2' & = & 2y_1 - y_3 \\ y_3' & = & y_1 - y_2 + 2y_3 + x \end{array} \right.$$

$$c).\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 2y_1 + y_3 \\ y_2' & = & y_1 + y_3 \\ y_3' & = & y_1 - 2y_2 \end{array} \right. \qquad d).\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 + y_3 \\ y_2' & = & 2y_2 \\ y_3' & = & y_1 + 5y_3 \\ y_1(0) & = & 1,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$e).\left\{ \begin{array}{rcl} z'' + z' + y' - 2y & = & 0 \\ z' - y' + z + x & = & 0 \end{array} \right. , \qquad f).\left\{ \begin{array}{ccc} y'' & = z & \\ z'' & = & 16y \\ y(0) = 1 & , & y'(0) = z(0) = z'(0) = 0, \end{array} \right.$$

4. Reducir el ejercicio $3 - f)$. a una ecuación diferencial y resolver. Deducir la solución del sistema comprobando que que se obtiene el mismo resultado.

5. Resolver los sistema de tipo Euler:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xy_1' & = & y_1 - y_2 + x^3 \\ xy_2' & = & -y_1 + y_2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} xy_1' & = & y_1 \\ xy_2' & = & y_1 + y_2\,. \end{array} \right.$$

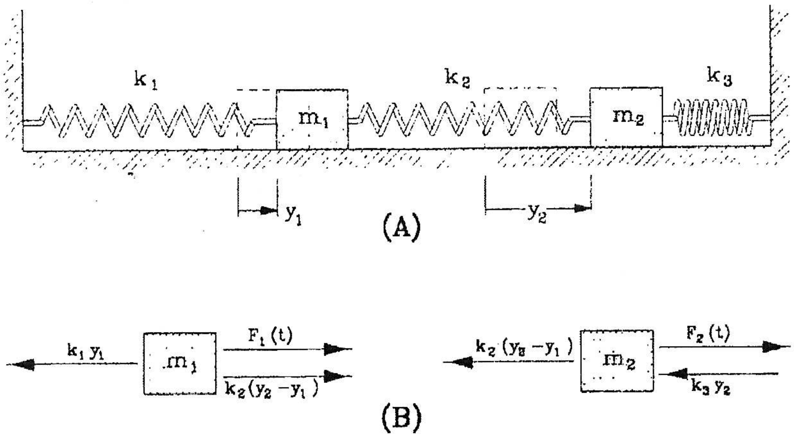

Figura 39 *Movimiento del sistema masas-resortes acoplados.*

Si denotamos por $y_1(t)$ el desplazamiento del primer bloque y por $y_2(t)$ el del segundo (ver figura 39), observamos que, sobre el primer cuerpo, las fuerzas que actuan son la fuerza de recuperación del primer muelle, $-k_1y_1$, la fuerza de recuperación del segundo $k_2(y_2-y_1)$ y $F_1(t)$. Sobre el segundo cuerpo actuan la fuerza de recuperación del segundo muelle $-k_2(y_2-y_1)$, $F_2(t)$, y la fuerza de recuperación del tercer muelle $-k_3y_2$. Así las ecuaciones buscadas son:

$$m_1y_1'' = k_2(y_2 - y_1) - k_1y_1 + F_1(t)$$

$$m_2y_2'' = -k_3y_2 - k_2(y_2 - y_1) + F_2(t)$$

y sacando factor común a y_1 e y_2 en el lado derecho de la ecuación, y haciendo los cambios $z_1 = y_1, z_2 = y_1', z_3 = y_2, z_4 = y_2'$, tenemos un sistema del tipo (3.3) con cuatro ecuaciones y coeficientes constantes:

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = -\frac{k_2 + k_1}{m_1}z_1 + \frac{k_2}{m_1}z_3 + \frac{F_1(t)}{m_1}$$

$$z_3' = z_4$$

$$z_4' = \frac{k_2}{m_2}z_1 - \frac{k_2 + k_3}{m_2}z_3 + \frac{F_2(t)}{m_2}.$$

□