NOMBRE.. Número.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2018/19
Ampliación de Matemáticas
Examen de Septiembre: 10 de Septiembre 2019

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen.

EJERCICIOS 1-2 (3p.)

Consideremos el campo vectorial de $\Re^3$

$$\mathbf{F} = (xyz,\, yx^2,\, z)$$

y V el volumen dado por $x^2 + 4y^2 - z^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$.

(a) **(1.5 p)** Calcular $A = \displaystyle\int_V \operatorname{div} F \, dxdydz$.

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

(b) **(1.5 p)** Calcular la circulación (en sentido **horario**) de F sobre la curva Γ definida por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x - 2z &= 0, \\ x^2 + 4y^2 - z^2 &= 1. \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

NOMBRE.. Número.........
DNI.............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2018/19
Ampliación de Matemáticas
Examen de Septiembre: 10-9-2019

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida.

EJERCICIO 3 (2.4p)
EJERCICIO 3.1. Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2xy = x\,e^{-x^2} \\ \qquad\qquad y(0) = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN general de la ED

SOLUCIÓN del Problema de Cauchy

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 3.2 a). Resolver la ecuación de Riccati

$$y' - y^2 = 1 - x^2$$

sabiendo que una solución particular es $y_p(x) = x$. Escribir la ecuación lineal a la que se llega y dejar la solución en forma integral si no se concocen las primitivas.
b). Encontrar la aproximación de la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y^2 = 1 - x^2 \\ \qquad y(0) = 1 \end{cases}$$

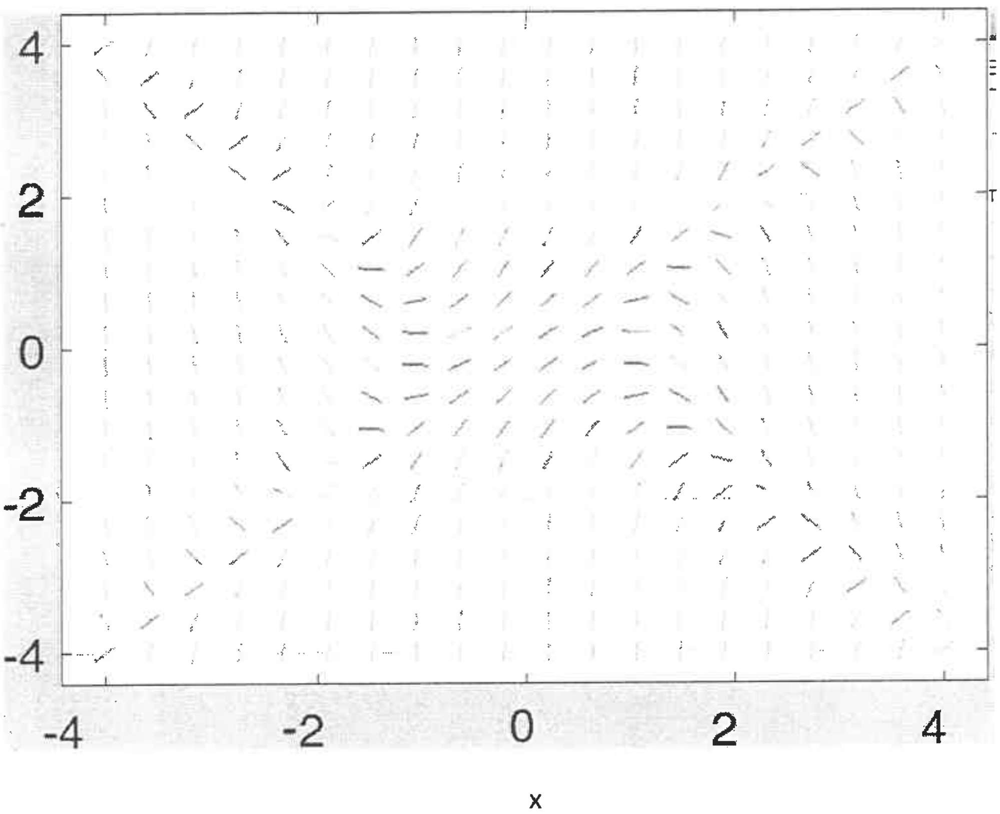
mediante los cinco primeros términos del desarrollo en serie de Taylor. Hacer un dibujo aproximado de la solución del problema dado en el campo de direcciones que proceda. Razonar la respuesta.

ECUACIÓN LINEAL

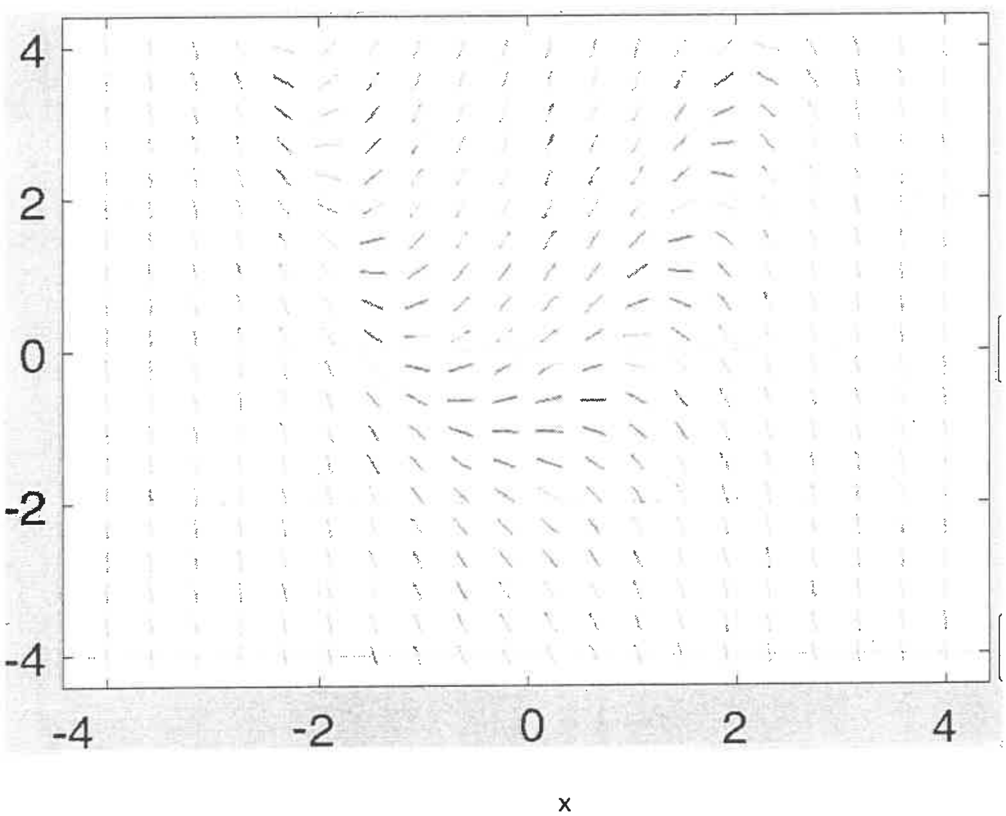
SOLUCIÓN general ED Ricatti

APROXIMACIÓN

CAMPO DE DIRECCIONES (a) (b)
Tachar lo que no proceda
Razonamiento breve



(a)



(b)

EJERCICIO 4 (2.1p)
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales dependiendo del valor de la constante $c > 0$ (tomar $x > 0$)

$$x^2y'' + 3xy' + cy = 0$$

Analizar los casos $0 < c < 1$, $c > 1$ y $c = 1$ (en caso necesario tomar un valor de c particular). En particular, para $c = 1$, resolver la ecuación

$$x^2y'' + 3xy' + y = \ln(x)$$

Asimismo, aplicar el método método de variación de parámetros para reducir la ecuación $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ a una de primer orden. Escribir dicha ecuación.

SOLUCIÓN GENERAL ED: $x^2y'' + 3xy' + cy = 0$ para $0 < c < 1$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $x^2y'' + 3xy' + cy = 0$ para $c > 1$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

SOLUCIÓN GENERAL ED: $x^2y'' + 3xy' + y = \ln(x)$

ED PRIMER ORDEN:

EJERCICIO 5 (1p)
Resolver la ecuación

$$y^{iv)} - 4y'' + 4y = xe^{x}$$

SOLUCION GENERAL DE LA ED. HOMOGENEA

SOLUCIÓN PARTICULAR

SOLUCIÓN GENERAL

RESOLUCIÓN Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 6 (1.5p)

Resolver el problema de Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & 2y_1 + y_2 \\ y_2' & = & -4y_1 + 2y_2 + e^{2x} \end{array}\right.$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

SOLUCION GENERAL SISTEMA HOMOGÉNEO

SOLUCION GENERAL SISTEMA NO HOMOGÉNEO

SOLUCION PROBLEMA DE CAUCHY

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x) \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados: cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\,\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\,\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\,\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

- Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$