Ampliación de Matemáticas. 2$^{\text{o}}$*curso*. Grado de Ingeniería Civil. *Curso 2012/2013.*

Hoja 1 de Problemas

1.- Hallar el área de la superficie comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = x^{1/3}$.

2.- Calcular $\displaystyle\iint_D \left(x^2 + y\right) dxdy$, donde $D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$. Indicación: transformar la integral en una en la parte de D que está en el primer cuadrante.

3.- Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f\,(x,\, y)\, dxdy$, donde $f\,(x,\, y) = \text{máx}\,(|x|\,,\, |y|)$.

4.- Sea el cambio de variable definido por: $x = u + v$, $y = v - u^2$. Calcular:

1. El jacobiano $J\,(u,\, v)$.
2. La imagen S en el plano XY del triángulo T en el plano UV de vértices $(0,\, 0)$, $(2,\, 0)$ y $(0,\, 2)$.
3. El área de S.
4. La integral $\displaystyle\iint_S (x - y + 1)^{-2}\, dxdy$

5.- Utilizar una transformación lineal para calcular $\displaystyle\iint_S (x - y)^2 \operatorname{sen}^2 (x + y)\, dxdy$, siendo S el paralelogramo de vértices $(\pi,\, 0)$, $(2\pi,\, \pi)$, $(\pi,\, 2\pi)$ y $(0,\, \pi)$.

6.- Determinar la integral de la función

$$f\,(x,\, y) = \frac{y^4}{b^4\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)\left(1 + \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)} + xy^2$$

sobre el recinto $D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$, donde a y b son constantes positivas.

7.- Determinar la integral de la función

$$f\,(x,\, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sobre los recintos:

1. $E = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\right\}$.
2. $H = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1,\ 0 \leq x\right\}$.

8.- Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{xy}$, donde D es el dominio plano limitado por las curvas

$$x^2 + y^2 = ax,\ x^2 + y^2 = a'x,\ x^2 + y^2 = by,\ \ x^2 + y^2 = b'y,$$

siendo: $0 < a < a'$, $0 < b < b'$.
Indicación: Efectúa un cambio de variable, de forma que el nuevo dominio sea el rectángulo $[a,\, a'] \times [b,\, b']$.

9.- Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies: $y = z^2$, $2y = z^2$, $z = x^2$, $2z = x^2$, $x = y^2$, $2x = y^2$.
Indicación: efectuar un cambio de variables de forma que el nuevo recinto de integración sea el cubo $[1,\ 2]^3$. Hallar el jacobiano del cambio inverso.

10.- Calcular el volumen limitado por la superficie $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = 3a^3xyz$, que pertenece al primer octante.

11.- Calcular $I = \iiint\limits_V \left[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right] dxdydz$, siendo V el volumen determinado por el cilindro, $y^2 + z^2 = 2pz$, y las dos hojas del cono, $x^2 - q^2\left(y^2+z^2\right) = 0$, siendo $p,\ q > 0$.

12.- Hallar $I = \iiint x^2y^2z\, dxdydz$ extendida a la porción de cono $x^2+y^2 = xz$, comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = c$. (En esféricas).

13.- Calcular $\iiint_W f\,(x,\ y,\ y)\, dxdydz$, en los siguientes casos:

1. $f\,(x,\ y,\ y) = e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, donde W es la región queda bajo la esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ y sobre el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $f\,(x,\ y,\ y) = ze^{x^2+y^2+z^2}$, donde $W = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\right\}$.

14.- Integrar:

(*a*) $f(x,y) = 2xy^2$ sobre el primer cuadrante de la circunferencia de radio R.

(*b*) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2$ a lo largo de la hélice circular $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$, desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(1,0,6\pi)$.

15.- Determinar la longitud y la masa de un hilo cuya forma es el arco de parábola $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(2,4)$ y cuya densidad es $\rho(x,y) = x$.

16.- Hallar la integral de línea $\int_\rho xydx\ +\ (x^2-y^2)dy$, siendo ρ:

a) La circunferencia de centro el origen y radio unidad (recorrida en sentido antihorario).

b) El arco de parábola $y^2 = x$, entre $A = (1,-1)$ y $B = (1,1)$.

c) La curva $y^2 = x^3$ entre $A = (1,-1)$ y $B = (1,1)$.

17.- Calcular las siguientes integrales, si las curvas cerradas se recorren en sentido positivo, es decir, en sentido contrario a las agujas del reloj:

(*a*) $\int_g (x-y)dx\ +\ (x+y)dy$, siendo g el segmento que une $(1,0)$ con $(0,2)$.

(*b*) $\int_C x^3dy\ -\ y^3dx$, siendo C la circunferencia $\{x^2+y^2 = 1\}$.

(*c*) $\int_\rho (x+2y)dx\ +\ (3x-y)dy$, siendo ρ la elipse de ecuación $x^2+4y^2 = 4$.

18.- Calcular:

(a) $\displaystyle\int_\gamma ydx - xdy + zdz$, siendo γ la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $z - y = a$ en sentido antihorario.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2, 2xz)$ y γ la intersección del plano $x = y$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, recorrida en sentido positivo.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ y γ la curva intersección de $x^2 + y^2 = 2x$ con $x = z$.

19.- Sea $\mathbf{F}\,(x, y, z) = (\operatorname{sen} y + z,\ x\cos y + e^z,\ x + ye^z)$.

(a) Probar que la integral sobre cualquier curva cerrada simple, $\mathcal{C}^1$ a trozos, vale 0.

(b) Obtener un potencial de $\mathbf{F}$, es decir, encontrar ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

20.- Sea el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y^2 + 2xy + ax^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{x^2 + 2xy + by^2}{(x^2 + y^2)^2}\right).$$

1. Obtener a y b para que la integral de este campo vectorial sobre cualquier curva cerrada simple (excluyendo aquéllas que encierren o contengan al origen) valga siempre 0.
2. Con lo valores obtenidos en el apartado anterior, obtener una función potencial de $\mathbf{F}(x, y)$.

   Ayuda: Una posible forma de resolver una racional del tipo

   $$\int \frac{P\,(x)}{(x^2 + k)^n}\,d\,x$$

   siendo el grado de $P\,(x)$ un polinomio en x de grado, como máximo, $2n - 1$, es el cambio de variable siguiente:

   $$x = \sqrt{k}\operatorname{tg} z$$

21.- Calcular $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(2xze^{x^2+y^2}, 2yze^{x^2+y^2}, e^{x^2+y^2}\right)$ y γ la curva en $\mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$, $0 \le t \le 1$.
Indicación: probar que $\mathbf{F}$ es conservativo.

22.- Sean la curva en $\mathbb{R}^3$, $\Gamma = \left\{x^2 + y^2 = 1,\ z = y^2 - x^2\right\}$, recorrida en sentido positivo, y el campo vectorial $\mathbf{F}\,(x, y, z) = \left(y^3, e^y, z\right)$.

(a) Hallar $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(b) ¿Existe f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$?

23.- Calcular $\displaystyle\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ dS$ ($\mathbf{n}$ la normal exterior) en los siguientes casos:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ y S la frontera del cubo $0 \le x,\ y,\ z \le 1$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xy, -x^2, x + z\right)$ y S la porción del plano $2x + 2y + z = 6$ situada en el primer octante, si $\mathbf{n}$ es la normal con tercera componente positiva.

24.- Calcular $\displaystyle\int_\Gamma \left(5 - xy - y^2\right) \mathrm{d}\, x \;-\; \left(2xy - x^2\right) \mathrm{d}\, y$, siendo γ el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, directamente y aplicando el teorema de Green.

25.- Se consideran la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, y \geq 0\right\}$$

(orientada con la normal exterior a la esfera unidad) y la función

$$\mathbf{F}\,(x, y, z) = (x + z, y + z, 2z)\,.$$

Calcular $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \;\, dS.$

26.- Utilizando el teorema de Stokes calcular la integral $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\mathbf{F}$ en los siguientes casos, donde S está orientada según la normal exterior:

(a) $\mathbf{F}\,(x, y, z) = \left(x^2y^2,\, yz,\, xy\right)$ y S el paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

(b) $\mathbf{F}\,(x, y, z) = ((1 - z)\, y,\, ze^x,\, x \operatorname{sen} z)$ y S es la semiesfera superior de radio a.

(c) $\mathbf{F}\,(x, y, z) = \left(x^3 + z^3,\, e^{x+y+z},\, x^3 + y^3\right)$ y $S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, y \geq 0\right\}$.

27.- Verificar el teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$ en el paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

28.- Sea el sólido K

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\, 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\right\}.$$

a) 1.5 ptos. Calcular su volumen.

b) 2 ptos. Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (x, y, 2z)$ a través de la superficie que limita a K.

29.- Supongamos que la temperatura en cada punto del espacio sea proporcional al cuadrado de la distancia al eje vertical y consideremos el dominio

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 2z,\;\, z \leq 2\right\}.$$

(a) Calcular el volumen de V.

(b) Calcular la temperatura promedio en V.

(c) Calcular el flujo del gradiente de temperatura a través (y hacia afuera), de ∂V.

30.- Determinar los coeficientes de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -\pi, & \text{para } -\pi < t < 0, \\ \pi, & \text{para } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{para } t = 0, \pi, \end{cases}$$

para un periodo $T = 2\pi$.

31.- La función $f(t) = \cos^2 t$ es periódica, de periodo 2π. Determinar su serie de Fourier. Indicación: este ejercicio es casi trivial utilizando identidades trigonométricas.

32.- La función $f(t) = \sin^3 t$ es periódica, de periodo 2π. Determinar su serie de Fourier.

33.- La función

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para } -\pi < t < \pi, \\ 0, & \text{para } t = \pi, \end{cases}$$

puede ser extendida a una función periódica, de periodo 2π. Determinar la serie de Fourier de esta extensión.

34.- La función

$$f(t) = |t|, \;\; t \in [-\pi,\, \pi],$$

puede ser extendida a una función periódica, de periodo 2π. Determinar la serie de Fourier de esta extensión.

35.- Determinar las series de Fourier seno y coseno de

1. $$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para } 0 \leq t \leq \pi/2, \\ \pi - t, & \text{para } \pi/2 < t \leq \pi. \end{cases}$$

   $f(t)$ está definida en $[0,\, \pi]$.

2. $$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para } 0 \leq t < 5, \\ 10 - t, & \text{para } 5 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

   $f(t)$ está definida en $[0,\, 10]$.

3. $$f(t) = t(\pi - t)$$

   $f(t)$ está definida en $[0,\, \pi]$.

36.- Desarrollar e^{-x} en serie de senos y cosenos entre $[0,\, \pi]$, tomando este intervalo como período.

37.- Desarrollar e^{-x} en serie de senos y cosenos entre $[0,\, \pi]$, basándose en la expresión compleja.

38.- Obtener el desarrollo de Fourier de la función $f(t) = t^2 - t$ en el intervalo $[-L,\, L]$ considerando su extensión periódica con periodo $2L$.