Ampliación de Matemáticas
Grado en Ingeniería Civil
Práctica 5 con Matlab

Directorio

22 de diciembre de 2012

gonzaleof@unican.es

Tabla de Contenido

1. Problema de contorno

En ocasiones, las condiciones iniciales necesarias para determinar com- pletamente la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias no aparecen especificadas todas en el mismo punto, como sucede en los problemas de valor inicial. En ese caso, estamos ante un **problema de contorno.**

En este capítulo abordaremos este tipo de problemas. Para simplificar el análisis nos restringiremos a problemas de segundo orden lineales de la forma

$$\boxed{\begin{aligned} y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y &= r(x) \qquad x \in (a,b) \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{aligned} \qquad (1)}$$

Supondremos que p, q y r son funciones continuas en $[a,b]$

Obviamente usando un ordenador sólo podremos resolver el problema en un intervalo acotado, digamos $[a, b]$ con $a = x_0$. Para ello se realiza una partición de (a, b) vamos a dividir el intervalo en n subintervalos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x_{n+1} = b$$

Para calcular $y(x_i)$ se sustituyen las derivadas de y que aparecen en la ecuación ordinaria por aproximaciones de diferencias finitas.

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h}$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - 2\,y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2}$$

$$y^{iv)}(x) \approx \frac{y(x_i - 2h) - 4y(x_i - h) + 6y(x_i) - 4y(x_i + h) + y(x_i + 2h)}{h^4}$$

Esto permite transformar la ecuación ordinaria en un sistema de ecuaciones algebraicas. Los métodos resultantes se conocen como **métodos de diferencias finitas**.

1.1. Ejemplo

Ejemplo 1.1. Plantear por diferencias finitas el problema de contorno tomando 3 nodos interiores en $(-1,1)$.

$$y'' - x\,y' + y = 2 - x^2 \qquad x \in (-1,1)$$
$$y(-1) = 1 \qquad y(1) = 1$$

Solución:

$$\frac{y(x_i+h) - 2\,y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} - x_i\frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h} + y(x_i) = 2 - x_i^2$$

Con la notación más cómoda $y(x_i) = y_i$ tenemos

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = 2 - x_i^2$$

Multiplicamos por h^2 y reordenando, se tiene

$$(1 + \frac{1}{2}hx_i)y_{i-1} + (-2 + h^2)y_i + (1 - \frac{1}{2}hx_i)y_{i+1} = h^2(2 - x_i^2)$$

$$
\begin{array}{lcrcl}
i=1 & \Longrightarrow & \color{red}{\frac{7}{8}y_0} - \frac{7}{4}y_1 + \frac{9}{8}y_2 & = & \frac{7}{16} \\
i=2 & \Longrightarrow & y_1 - \frac{7}{4}y_2 + y_3 & = & \frac{1}{2} \\
i=3 & \Longrightarrow & \frac{9}{8}y_2 - \frac{7}{4}y_3 + \color{red}{\frac{7}{8}y_4} & = & \frac{7}{16}
\end{array}
$$

Si pasamos al término independiente los términos en rojo, se obtiene el sistema **tridiagonal** para los nodos interiores y_1, y_2, y_3 pues $y_0 = 1$ e $y_4 = 1$ son conocidos en la frontera.

$$
\begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{9}{8} & 0 \\ 1 & -\frac{7}{4} & 1 \\ 0 & \frac{9}{8} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{16} \end{pmatrix}
$$

```
M=diag([-7/4 -7/4 -7/4])+diag([9/8 1],1)+diag([1 9/8],-1)
```

Obteniéndose

$$
y_1 = y(-1/2) = 1/4 \qquad y_2 = y(0) = 0 \qquad y_3 = y(1/2) = 1/4
$$

□

2. Caso Lineal de 2º orden.

$$
\boxed{\begin{array}{ll} y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = \; r(x) \qquad x \in (a,b) \\ y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta \end{array} \qquad (2)}
$$

$$\frac{y(x_i+h) - 2\,y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} + p(x_i)\frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h} + q(x_i)y(x_i) = r(x_i)$$

Con la notación más cómoda $y(x_i) = y_i$ tenemos

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = r(x_i)$$

Multiplicamos por h^2 y reordenando, se tiene

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}hp(x_i)\right)}_{c_i} y_{i-1} + \underbrace{(-2 + h^2 q(x_i))}_{a_i} y_i + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}hp(x_i)\right)}_{b_i} y_{i+1} = \underbrace{h^2 r(x_i)}_{t_i}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & c_3 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2\, r_1 - c_1\, \alpha \\ h^2\, r_2 \\ h^2\, r_3 \\ \vdots \\ h^2\, r_n - b_n\, \beta \end{pmatrix}$$

$$c_i\, y_{i-1} + a_i\, y_i + b_i\, y_{i+1} = t_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

- $c_i = 1 - \frac{1}{2} h\, p(x_i)$
- $a_i = -2 + h^2\, q(x_i))$
- $b_i = 1 + \frac{1}{2} h\, p(x_i)$

2.1. Programa en Matlab

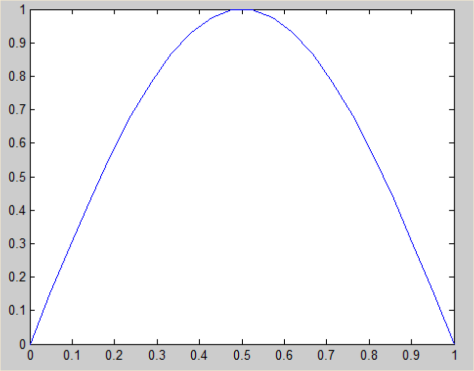
```
p=inline('0*x');q=inline('x.^0');r=inline('-(1+pi^2)*sin(pi*x)')
a=0;b=1;fa=0;,fb=0;n=20;h=(b-a)/(n+1);
x=a+h:h:b-h;x=x';
px=feval(p,x);qx=feval(q,x);rx=feval(r,x);
ci=1-0.5*h*px;ai=-2+h^2*qx;bi=1+0.5*h*px;ti=h^2*rx
ti(1)=ti(1)-(1-0.5*h*px(1))*fa;
ti(n)=ti(n)-(1+0.5*h*px(n))*fb;
M=diag(bi(1:n-1),1)+diag(ai)+diag(ci(2:n),-1);
y=M\ti;
y=[fa;y;fb];x=[a;x;b];
plot(x,y,'b-');
```

Ejemplo 2.1. Resolver el problema de contorno

$$y'' = \quad y - (1+\pi^2)\,\mathrm{sen}(\pi\, x) \qquad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0 \qquad y(1) = 0$$

Solución:

```
p=inline('0*x')
q=inline('-x.^0')
r=inline('-(1+pi^2)*sin(pi*x)')
```



$\square$