NOMBRE...

Número.........

DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

Examen final: 24 de Enero, 2014

1.- Calcular la integral

$$\int_\gamma x^2 y dx + 2y dy + x dz,$$

a lo largo del camino cerrado γ limitado por los arcos γ_1, γ_2 y γ_3 dados por las ecuaciones

$$\gamma_1 \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x=0, \\ y \geq 0, z \geq 0, \end{cases} \quad \gamma_2 \begin{cases} 2x+z=1, \\ y=0, \\ x \geq 0, z \geq 0, \end{cases} \quad \gamma_3 \begin{cases} 4x^2+y^2=1, \\ z=0, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

NOMBRE...

Número.........

DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

Examen final: 24 de Enero, 2014

2.- Consideremos un desarrollo en serie de potencias centrado en $x = 0$ ($y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$) para obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - 4xy' + 12y = 0.$$

Se pide:

A) Obtener el término general a_n en función de los anteriores. Calcular $\{a_n\}_{n=0}^{9}$. Obtener los 10 primeros términos del desarrollo en serie de la solución general de la ecuación diferencial.

C) Dado el problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 4xy' + 12y = 0, \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \end{array} \right.$$

¿Qué se puede decir de la existencia y unicidad de solución y del intervalo de definición de ésta?. Obtener la solución del problema.

NOMBRE...
Número.........
DNI..............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

Examen final: 24 de Enero, 2014

3.- Sea la función $f(x) = \cos(\alpha x)$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$). Determinar su serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$ en términos del parámetro α.

NOMBRE.. Número.........
DNI.............................

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

Examen final: 24- Enero - 2014-

Observación: No utilizar calculadora ni apuntes. Todas las respuestas deben ser debidamente razonadas en el examen. Escribir de forma precisa la solución donde se pida, e indicar si se cambia de hoja en una resolución.

EJERCICIO 4
Resolver el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y_1' &= 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 + 15e^x\sqrt{x} \end{cases}$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$$

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA HOMOGENEO

SOLUCION GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGENEO

SOLUCION DEL PROBLEMA DADO

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 5

Resolver el problema de contorno para la ecuación de tipo Euler

$$(x+2)^2y'' + (x+2)y' - y = (x+2), \quad x \in (-1,0)$$

$$y(-1) = 0, \quad y(0) = ln(2)$$

Razonar la existencia y unicidad de solución de dicho problema.

SOL. GENERAL ED HOMOGENEA

SOL. GENERAL ED NO HOMOGENEA

SOLUCION DEL PROBLEMA DADO

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCION

razonamiento breve

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

EJERCICIO 6

Resolver las ecuaciones $y' + y = 0$ y $y' + y = e^{-t}$, y considerar los problemas de valor inicial (que pueden aparecer e.g. en modelos de circuitos)

$$(a). \qquad y' + y = \delta(t-\pi), \quad y(0) = e^{\pi}$$

$$(b). \qquad y' + y = e^{-t}u(t-\pi), \quad y(0) = 0$$

Razonar cuáles de las siguientes funciones son solución de cada problema.

$$(1) \quad \frac{u(t-\pi)}{2}(e^{2-t} - e^{2\pi-t}), \qquad (2) \quad u(t-\pi)(t-\pi)e^{-t}$$

$$(3) \quad (1 + u(t-\pi))e^{\pi-t}, \qquad (4) \quad e^{\pi-t}(e^{t} + u(t-\pi))$$

(Nota: no es necesario calcular explícitamente transformadas de Laplace.
$u(t-\pi) \equiv heaviside(t-\pi))$)

SOLUCION DE $y' + y = 0$..............................

SOLUCION DE $y' + y = e^{-t}$..............................

Para (a) SOLUCION: (1) (2) (3) (4) ninguna (tachar lo que no proceda)

Para (b) SOLUCION: (1) (2) (3) (4) ninguna (tachar lo que no proceda)

RESOLUCION Y RAZONAMIENTOS

Ecuaciones Diferenciales
Formulario

-Método de variación de parámetros: cálculo de soluciones particulares

- E.D.O. de primer orden: $k(x) = \int q(x)\ \exp(\int p(x)dx)\, dx$

- E.D.O. de segundo orden:

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

- Sistemas de E.D.O.: $\bar{k}(x) = \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)$

-Reducción de orden para E.D.O. de segundo orden:

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2}dx$$

- Método de coeficientes indeterminados cálculo de soluciones particulares:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ó $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$,
  se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

donde p_k, P_k, Q_k son polinomios de grado k,
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico, $s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz del polinomio característico de multiplicidad n_i.

-Método de Euler para el problema $\bar{y}' = \bar{F}(t, \bar{y}),\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$:

$$t_{i+1} = t_i + h\,, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{F}(t_i, \bar{y}_i)$$

- Funciones "escalón" (" Heaviside") y "Delta de Dirac"

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & si \quad t = a \\ 0 & si \quad t \neq a. \end{cases} \quad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

- Algunas relaciones trigonométricas:

$$2\sin a\ \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

$$2\sin a\ \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$

$$2\cos a\ \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

- Angulo α de corte de dos rectas de pendientes m_1 y m_2: $\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$