SISTEMAS DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN CON n ECUACIONES y n INCÓGNITAS *

Sistema con n ecuaciones **en forma normal**:

$$\begin{cases} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ & \cdots & \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases}$$

x **variable independiente**,

$\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ **funciones incógnita**

Reducción de una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}),$$

a un sistema: Hacer

$$y_1 = y,\ y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \Rightarrow \begin{cases} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ & \cdots & \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{cases}$$

Si $f_i = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$ se tiene un **sistema diferencial lineal**:

$$(\mathbf{SLNH}) \begin{cases} y_1' & = & a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' & = & a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ & \cdots & \\ y_n' & = & a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)\,. \end{cases}$$

Un problema de Cauchy asociado: Resolver (**SLNH**) con los *datos iniciales* dados:

$$(\mathbf{DI}) \qquad y_1(x_0) = y_0^1,\ y_2(x_0) = y_0^2, \cdots, y_n(x_0) = y_0^n\,.$$

Teorema 1 *Cuando todas las funciones a_{ij}, b_j, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, de (**SLNH**) son continuas en el intervalo (α, β), $x_0 \in (\alpha, \beta)$, y, $(y_0^1, y_0^2, \cdots, y_0^n)$ es cualquier punto de $\mathbf{R}^n$, entonces, existe una única solución de (**SLNH**)-(**DI**) definida en (α, β).*

* **Resúmenes / Capítulo 3 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

Sistemas diferenciales lineales con n ecuaciones.

Sistema no homogéneo:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x) \qquad \textbf{(SLNH)}$$

en notación vectorial, donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$\bar{y}, \bar{b}$ son los vectores columna:

$\bar{y}(x) = (y^1(x), y^2(x), \cdots, y^n(x))^T$, y $\bar{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \cdots, b_n(x))^T$,

$$a_{i,j},\ b_j : I = (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ funciones continuas}$$

Problema de Cauchy: dados $x_0 \in I$, $\bar{y}_0 \in \mathbf{R}^n$.

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{y}' & = & A(x)\bar{y} + \bar{b}(x), \\ \bar{y}(x_0) & = & \bar{y}_0, \end{array} \right.$$

Solución general de (**SLNH**):

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_{GH}(x) + \bar{y}_p(x),$$

$\bar{y}_p(x)$ es una solución particular de (**SLNH**)
$\bar{y}_{GH}(x)$ es la solución general del **sistema homogéneo** asociado:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} \qquad \textbf{(SLH)}$$

Si $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n\}$ son n soluciones de (**SLH**), se denomina **matriz solución** del sistema homogéneo:

$$\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)).$$

$$\text{Se verifica:} \qquad \Phi'(x) = A(x).\Phi(x)$$

$\Phi(x)$ es una **matriz fundamental** de (**SLH**) si $det(\Phi(x)) \neq 0$

El **Wronskiano** de $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)$ es la función:

$$W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x) = |\Phi(x)| = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ y_1^2(x) & y_2^2(x) & \cdots & y_n^2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{vmatrix}$$

Definición: k funciones vectoriales $\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \cdots, \bar{\varphi}_k(x)$ son **linealmente independientes** en el intervalo $I = (\alpha, \beta)$ cuando

$$\alpha_1\bar{\varphi}_1(x) + \alpha_2\bar{\varphi}_2(x) + \cdots + \alpha_k\bar{\varphi}_k(x) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$:

1. Si $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_k(x)$ son soluciones de (**SLH**) en I, entonces cualquier combinación lineal de ellas $\alpha_1\bar{y}_1(x) + \alpha_2\bar{y}_2(x) + \cdots + \alpha_k\bar{y}_k(x)$ es también solución de (**SLH**) en I.

2. n soluciones $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)$ de (**SLH**) son linealmente independientes en I si y sólo si para cualquier punto $x_0 \in I$ se verifica $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x_0) \neq 0$.

3. n soluciones $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)$ de (**SLH**) son linealmente independientes en I si y sólo si para cualquier punto $x_0 \in I$, los vectores $\bar{y}_1(x_0), \bar{y}_2(x_0), \cdots, \bar{y}_n(x_0)$ son linealmente independientes en $\mathbf{R}^n$.

4. Dadas n soluciones $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)$ de (**SLH**) linealmente independientes en I, cualquier otra solución $\bar{y}(x)$ es:
$$\bar{y}(x) = \alpha_1\bar{y}_1(x) + \alpha_2\bar{y}_2(x) + \cdots + \alpha_n\bar{y}_n(x), \ \forall x \in I,$$
para algunas constantes α_i.

   $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n\}$ son un **conjunto fundamental de soluciones de (SLH) en** I.

   $\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x))$ es una **matriz fundamental** de (**SLH**), y $\bar{y}(x) = \Phi(x)\bar{\alpha}$, donde $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)^T$

5. **Identidad de Abel**: dado un punto cualquiera $x_0 \in I$, y n soluciones de (**SLH**), se verica
$$W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x) = e^{\int_{x_0}^{x} Traza(A(s))ds} W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x_0)$$

6. Sean $\{\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)\}$ n soluciones de (**SLH**) en I, son linealmente independientes si y sólo si $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x) \neq 0, \forall x \in I$ (evidentemente, basta con comprobar que el Wronskiano es no nulo en un punto fijo cualquiera x_0 de I).

7. Hay n soluciones linealmente independientes de (**SLH**) y no más: $\exists$ n vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^n$.

SOLUCION DEL SISTEMA NO HOMOGENEO:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x) \quad \textbf{(SLNH)}$$

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} \quad \textbf{(SLH)}$$

Si se conocen n soluciones de (**SLH**), $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n\}$, linealmente independientes en I ($\Leftrightarrow W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x) \neq 0, \forall x \in I \Leftrightarrow \exists x_0 \in I / W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x_0) \neq 0$) la solución geneneral de (**SLNH**) es:

$$\bar{y}_{GNH}(x) = \alpha_1\bar{y}_1(x) + \alpha_2\bar{y}_2(x) + \cdots + \alpha_n\bar{y}_n(x) + \bar{y}_p(x),$$

donde los α_i son constantes y $\bar{y}_p(x)$ es una solución particular de (**SLNH**).

En notación vectorial: $\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x))$ es la matriz fundamental de (**SLH**), y la solución general del sistema (**SLH**):

$$\bar{y}_{GH}(x) = \Phi(x).\bar{k} \qquad \text{con } \bar{k} \text{ vector constante.}$$

La solución general del sistema (**SLNH**):

$$\bar{y}_{GNH}(x) = \Phi(x).\bar{k} + \bar{y}_p(x)$$

BÚSQUEDA de SOLUCIÓN PARTICULAR de (**SLNH**) $\bar{y}_p(x)$, por el **método de variación de parámetros**:

$$\bar{y}_p(x) = \Phi(x).\bar{c}(x) = c_1(x)\bar{y}_1(x) + c_2(x)\bar{y}_2(x) + \cdots + c_n(x)\bar{y}_n(x),$$

$$\text{donde} \quad \bar{c}(x) = (c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x))^T.$$

$\bar{c}(x)$ se determina derivando y substituyendo en (**SLNH**)

$$\Phi(x).\bar{c}'(x) = \bar{b}(x).$$

$$\bar{y}_p(x) = \Phi(x).\int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx\,,$$

y la solución general del sistema (**SLNH**) es

$$\bar{y}_{GNH}(x) = \Phi(x).(\bar{k} + \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx)\,.$$

Sistema homogéneo con coeficientes constantes.

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

donde A es una matriz constante $n \times n$

Se busca $\bar{y} = e^{\lambda x}\bar{c} \Rightarrow \lambda$ debe ser un valor propio de A
$\bar{c}$ un vector propio asociado.

$$|A - \lambda I| = 0, \qquad (A - \lambda I)\bar{c} = 0$$

Posibilidades para $n = 2$:

1. Hay dos valores propios reales distintos λ_1, λ_2.

   $\bar{c}_i$ un vector propio asociado a λ_i, $i = 1, 2$- El conjunto fundamental de soluciones:

   $$\{e^{\lambda_1 x}\bar{c}_1, e^{\lambda_2 x}\bar{c}_2\}$$

2. Hay un valor propio de A real, $\lambda_1 = \lambda_2$.

   Si hay dos vectores propios lineal. independ., $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$, asociados a λ_1, el conjunto fundamental de soluciones:

   $$\{e^{\lambda_1 x}\bar{c}_1, e^{\lambda_1 x}\bar{c}_2\}$$

   Si sólo hay un vector propio, $\bar{c}_1$, una solución es $e^{\lambda_1 x}\bar{c}_1$. Se busca la otra lineal. indep. de la forma

   $$\bar{y}_2 = (\bar{a}_1 x + \bar{a}_2)e^{\lambda_1 x} \quad \Rightarrow$$

   $$(A - \lambda_1 \mathcal{I})\bar{a}_1 = 0 \quad \text{y} \quad (A - \lambda_1 \mathcal{I})\bar{a}_2 = \bar{a}_1.$$

   El conjunto fundamental de soluciones:

   $$\{\bar{c}_1 e^{\lambda_1 x}, (\bar{a}_1 x + \bar{a}_2)e^{\lambda_1 x}\}$$

3. Los valores propios de A son complejos conjugados.

   Sea $\bar{c}$ el vector propio asociado a uno de ellos λ. Conjunto fundamental de soluciones:

   $$\{Re(e^{\lambda x}\bar{c}), Im(e^{\lambda x}\bar{c})\}.$$

▶ Sistema homogéneo con coeficientes constantes

$$\bar{y}' = A\bar{y}, \qquad An \times n, \quad \geq 2$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz A en el cuerpo de los complejos.

Posibilidades:

1. Se trata de n valores propios reales distintos. Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, sea $\bar{c}_i$ el vector propio asociado a λ_i. El **conjunto fundamental de soluciones**:

$$\{e^{\lambda_1 x}\bar{c}_1,\ e^{\lambda_2 x}\bar{c}_2, \cdots, e^{\lambda_n x}\bar{c}_n\}.$$

2. Hay algún valor propio complejo λ_i simple. Entonces su conjugado $\bar{\lambda}_i$ también es valor propio y los vectores propios asociados son conjugados uno del otro. Para este valor propio hay dos soluciones reales linealmente independientes asociadas:

$$\{Re(e^{\lambda_i x}\bar{c}_i),\ Im(e^{\lambda_i x}\bar{c}_i)\}$$

3. Hay un valor propio λ_i real o complejo de multiplicidad k. Supongamos primero que es real y que *hay l vectores propios linealmente independientes con $l \leq k$.* $\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, \cdots, \bar{c}_{i_l}$. Entonces,

$$\{e^{\lambda_i x}\bar{c}_{i_1},\ e^{\lambda_i x}\bar{c}_{i_2},\ \cdots, e^{\lambda_i x}\bar{c}_{i_l}\}$$

son k soluciones linealmente independientes asociadas a λ_i. Si $k = l$, éstas son todas las que buscamos.

Si $l < k$, obtenemos las $k - l$ soluciones restantes linealmente independientes buscando soluciones de la forma:

$$(\bar{a}_1 x + \bar{a}_2)e^{\lambda_i x},\ (\bar{d}_0 x^2 + \bar{d}_1 x + \bar{d}_2)e^{\lambda_i x}, \cdots,$$

$$(\bar{f}_0 x^{k-l-1} + \cdots + \bar{f}_{k-l-1} x + \bar{f}_{k-l})e^{\lambda_i x}$$

4. En el caso de que λ_i sea complejo de multiplicidad $k > 1$, se procede como en 2 y 3

▶ Sistemas homogéneos de tipo Euler: $x\bar{y}' = A\bar{y}$

Hacer $x = e^t$ para $x > 0 \rightarrow$ coeficientes ctes. $\dfrac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$