Ampliación de Matemáticas. 2º*curso*. Grado de Ingeniería Civil. *Curso 2013/2014.*

Hoja de Problemas de Cálculo Integral

1.- Hallar el área de la superficie comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = x^{1/3}$.

2.- Calcular $\iint_D \left(x^2 + y\right) dxdy$, donde $D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$. Indicación: transformar la integral en una en la parte de D que está en el primer cuadrante.

3.- Calcular $\int_0^1 \int_0^1 f\,(x,\, y)\, dxdy$, donde $f\,(x,\, y) = \text{máx}\,(|x|\,,\, |y|)$.

4.- Calcular

$$\int\int_D x^y \, dx\, dy,$$

siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\}$.

5.- Sea el cambio de variable definido por: $x = u + v$, $y = v - u^2$. Calcular:

1. El jacobiano $J\,(u,\, v)$.
2. La imagen S en el plano XY del triángulo T en el plano UV de vértices $(0,\, 0)$, $(2,\, 0)$ y $(0,\, 2)$.
3. El área de S.
4. La integral $\iint_S (x - y + 1)^{-2}\, dxdy$

6.- Utilizar una transformación lineal para calcular $\iint_S (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\, dxdy$, siendo S el paralelogramo de vértices $(\pi,\, 0)$, $(2\pi,\, \pi)$, $(\pi,\, 2\pi)$ y $(0,\, \pi)$.

7.- Determinar la integral de la función

$$f\,(x,\, y) = \frac{y^4}{b^4\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)\left(1 + \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)} + xy^2$$

sobre el recinto $D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$, donde a y b son constantes positivas.

8.- Determinar la integral de la función

$$f\,(x,\, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sobre los recintos:

1. $E = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$.
2. $H = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\; 0 \leq x\right\}$.

9.- Calcular $\iint_D \dfrac{dxdy}{xy}$, donde D es el dominio plano limitado por las curvas

$$x^2 + y^2 = ax,\; x^2 + y^2 = a'x,\; x^2 + y^2 = by,\;\; x^2 + y^2 = b'y,$$

siendo: $0 < a < a'$, $0 < b < b'$.
Indicación: Efectúa un cambio de variable, de forma que el nuevo dominio sea el rectángulo $[a,\, a'] \times [b,\, b']$.

10.- Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies: $y = z^2$, $2y = z^2$, $z = x^2$, $2z = x^2$, $x = y^2$, $2x = y^2$.
Indicación: efectuar un cambio de variables de forma que el nuevo recinto de integración sea el cubo $[1,\, 2]^3$. Hallar el jacobiano del cambio inverso.

11.- Calcular el volumen limitado por la superficie $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = 3a^3xyz$, que pertenece al primer octante.

12.- Calcular el volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$.

13.- Calcular $I = \iiint\limits_V \left[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right] dxdydz$, siendo V el volumen determinado por el cilindro, $y^2 + z^2 = 2pz$, y las dos hojas del cono, $x^2 - q^2\left(y^2 + z^2\right) = 0$, siendo $p,\, q > 0$.

14.- Hallar $I = \iiint x^2y^2z\, dxdydz$ extendida a la porción de cono $x^2 + y^2 = az$, comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = c$. (En esféricas).

15.- Calcular $\iiint_W f\,(x,\, y,\, y)\, dxdydz$, en los siguientes casos:

1. $f\,(x,\, y,\, y) = e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, donde W es la región queda bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. $f\,(x,\, y,\, y) = ze^{x^2+y^2+z^2}$, donde $W = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1\right\}$.

16.- Integrar:

(a) $f(x, y) = 2xy^2$ sobre el primer cuadrante de la circunferencia de radio R.

(b) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ a lo largo de la hélice circular $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$, desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 0, 6\pi)$.

17.- Determinar la longitud y la masa de un hilo cuya forma es el arco de parábola $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$ y cuya densidad es $\rho(x, y) = x$.

18.- Hallar la integral de línea $\int_\rho xydx\, +\, (x^2 - y^2)dy$, siendo ρ:

a) La circunferencia de centro el origen y radio unidad (recorrida en sentido antihorario).

b) El arco de parábola $y^2 = x$, entre $A = (1, -1)$ y $B = (1, 1)$.

c) La curva $y^2 = x^3$ entre $A = (1, -1)$ y $B = (1, 1)$.

19.- Calcular las siguientes integrales, si las curvas cerradas se recorren en sentido positivo, es decir, en sentido contrario a las agujas del reloj:

(a) $\int_g (x - y)dx\, +\, (x + y)dy$, siendo g el segmento que une $(1, 0)$ con $(0, 2)$.

(b) $\int_C x^3dy\, -\, y^3dx$, siendo C la circunferencia $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) $\displaystyle\int_\rho (x+2y)dx \;+\; (3x-y)dy$, siendo ρ la elipse de ecuación $x^2+4y^2=4$.

20.- Calcular:

(a) $\displaystyle\int_\gamma y dx \;-\; x dy \;+\; z dz$, siendo γ la curva de intersección del cilindro $x^2+y^2=a^2$ y el plano $z-y=a$ en sentido antihorario.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z)=(2xy+z^2,x^2,2xz)$ y γ la intersección del plano $x=y$ con la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, recorrida en sentido positivo.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,z,x)$ y γ la curva intersección de $x^2+y^2=2x$ con $x=z$.

21.- Sea $\mathbf{F}\,(x,y,z)=(\operatorname{sen} y+z,\; x\cos y+e^z,\; x+ye^z)$.

(a) Probar que la integral sobre cualquier curva cerrada simple, $\mathcal{C}^1$ a trozos, vale 0.

(b) Obtener un potencial de $\mathbf{F}$, es decir, encontrar ϕ tal que $\mathbf{F}=\nabla\phi$.

22.- Sea el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2},-\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

1. Obtener a y b para que la integral de este campo vectorial sobre cualquier curva cerrada simple (excluyendo aquéllas que encierren o contengan al origen) valga siempre 0.

2. Con lo valores obtenidos en el apartado anterior, obtener una función potencial de $\mathbf{F}(x,y)$.

   Ayuda: Una posible forma de resolver una racional del tipo

   $$\int \frac{P\,(x)}{(x^2+k)^n}\,d\,x$$

   siendo el grado de $P\,(x)$ un polinomio en x de grado, como máximo, $2n-1$, es el cambio de variable siguiente:

   $$x=\sqrt{k}\operatorname{tg} z$$

23.- Calcular $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(2xze^{x^2+y^2},2yze^{x^2+y^2},e^{x^2+y^2}\right)$ y γ la curva en $\mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{r}(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$, $0\le t\le 1$.
Indicación: probar que $\mathbf{F}$ es conservativo.

24.- Sean la curva en $\mathbb{R}^3$, $\Gamma=\left\{x^2+y^2=1,\; z=y^2-x^2\right\}$, recorrida en sentido positivo, y el campo vectorial $\mathbf{F}\,(x,y,z)=\left(y^3,e^y,z\right)$.

(a) Hallar $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

(b) ¿Existe f tal que $\nabla f=\mathbf{F}$?

25.- Calcular $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\;dS$ ($\mathbf{n}$ la normal exterior) en los siguientes casos:

(*a*) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ y S la frontera del cubo $0 \leq x,\, y,\, z \leq 1$.

(*b*) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xy, -x^2, x+z\right)$ y S la porción del plano $2x+2y+z=6$ situada en el primer octante, si $\mathbf{n}$ es la normal con tercera componente positiva.

26.- Calcular $\displaystyle\int_\Gamma \left(5 - xy - y^2\right) \mathrm{d}\, x \;-\; \left(2xy - x^2\right) \mathrm{d}\, y$, siendo γ el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$, directamente y aplicando el teorema de Green.

27.- Se consideran la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\, y \geq 0\right\}$$

(orientada con la normal exterior a la esfera unidad) y la función

$$\mathbf{F}\,(x,y,z) = (x+z, y+z, 2z)\,.$$

Calcular $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ dS$.

28.- Utilizando el teorema de Stokes calcular la integral $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\mathbf{F}$ en los siguientes casos, donde S está orientada según la normal exterior:

(*a*) $\mathbf{F}\,(x,y,z) = \left(x^2y^2,\, yz,\, xy\right)$ y S el paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

(*b*) $\mathbf{F}\,(x,y,z) = ((1-z)\,y,\, ze^x,\, x \operatorname{sen} z)$ y S es la semiesfera superior de radio a.

(*c*) $\mathbf{F}\,(x,y,z) = \left(x^3+z^3,\, e^{x+y+z},\, x^3+y^3\right)$ y $S = \left\{x^2+y^2+z^2 = 1,\, y \geq 0\right\}$.

29.- Verificar el teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, xy, xz)$ en el paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

30.- Sea el sólido K

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\right\}.$$

a) 1.5 ptos. Calcular su volumen.

b) 2 ptos. Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (x, y, 2z)$ a través de la superficie que limita a K.

31.- Supongamos que la temperatura en cada punto del espacio sea proporcional al cuadrado de la distancia al eje vertical y consideremos el dominio

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 2z,\; z \leq 2\right\}.$$

(*a*) Calcular el volumen de V.

(*b*) Calcular la temperatura promedio en V.

(*c*) Calcular el flujo del gradiente de temperatura a través (y hacia afuera), de ∂V.

32.- Verificar el teorema de Gauss (es decir, comprobar que se obtiene el mismo resultado calculando las dos expresiones integrales involucradas) para el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F} = \left(x^2,\, y^2,\, z^2\right),$$

siendo S la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 5$ junto con sus bases $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 4, z = 5\}$ y $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$.

33.- (Ejercicio del examen de Septiembre 2013)

Sea la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $z \geq 0$, y el cilindro $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Al hallar la intersección del cilindro con la esfera, se produce un cuerpo cilíndrico, cuya base está en el plano $z = 0$ y cuya "tapa" está sobre la esfera. Se pide:

1. El volumen del sólido así definido.
2. El área de la "tapa" del sólido.
3. El área lateral del sólido.

Ampliación de Matemáticas. 2º*curso*. Grupo de Mañana. Grado de Ingeniería Civil. *Curso 2012/2013.*

Hoja 2 de Problemas

1.- Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

(*a*) $(12x+5y-9)\,dx+(5x+2y-3)\,dy=0$.

(*b*) $y'=-\dfrac{y}{x+y^3}$.

(*c*) $(e^x \operatorname{sen} y+\tan y)\,dx+\left(e^x\cos y+x\sec^2 y\right)dy=0$.

(*d*) $x^2y'=xy+3\left(x^2+y^2\right)\arctan\dfrac{y}{x}$.

2.- Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

(*a*) $y'=e^{x-y}$, $y\,(0)=\log 2$.

(*b*) $(y')^2=9y^4$, $y\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$, $y\in C\left(\left[\dfrac{1}{3},\infty\right)\right)$.

(*c*) $y'=\dfrac{xy+y}{x-1}$, $y\,(0)=2$.

3.- Sea la ecuación:

$$f\,(y)\,dx-\left(2xy+y^2\right)dy=0$$

(*a*) Determinar para qué funciones $f\,(y)$ es exacta y resolverla para esas funciones.

(*b*) Calcular un factor integrante de la forma $\mu=\mu\,(y)$ para cada f.

(*c*) Resolver la ecuación si $f\,(y)=y$.

4.- Resolver las siguientes ecuaciones encontrando un factor integrante que dependa de una sola variable.

(*a*) $\left(4x+3y^3\right)dx+3xy^2dy=0$.

(*b*) $\left(4xy^2+y\right)\mathrm{d}\,x+\left(6y^3-x\right)dy=0$.

(*c*) $2xdx-x^2\cot ydy=0$.

(*d*) $(2x+y)\,dx+\left(x^2+xy+x\right)dy=0$.

5.- Hallar un factor integrante para la ecuación

$$\left(3y^2-x\right)dx+2y\left(y^2-3x\right)dy=0,$$

de la forma: $\mu=\mu\left(x+y^2\right)$.

6.- Dada la ecuación diferencial $P(x,t)dx+Q(x,t)dt=0$, se pide:

a) Hallar la condición que han de cumplir $P(x,t)$ y $Q(x,t)$ para que la ecuación diferencial admita un factor integrante que sea función de $t+x$.

b) Aplicar lo obtenido en el apartado anterior para resolver la ecuación diferencial $(2tx - t^2 - t)dx + (2tx - x^2 - x)dt = 0$.

7.- Integrar mediante un cambio de variables las ecuaciones del tipo:

(a) $\dfrac{dx}{dt} = f\,(at + x)$.

(b) $\dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right)$.

(c) $y' = (x + y)^2$, aplicar el apartado "a".

(d) $y' = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$, aplicar el apartado "b".

8.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a) $xy' - 3y = x^4$.

(b) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$.

(c) $\left(1 + x^2\right) dy + (2xy - \cot x)\, dx = 0$.

(d) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$.

(e) $\left(2y - x^3\right) dx = xdy$.

(f) $\dfrac{dx}{dy} - 2yx = 6ye^{y^2}$.

9.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

(a) $y' + \dfrac{1}{x}y - x^3y^2 = 0$.

(b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$.

(c) $y' + \dfrac{1}{x}y - y^2 = 0$.

(d) $\left(3y + 3x^2y^3\right) dx + xdy = 0$.

10.- Resolver las siguientes ecuaciones de Ricatti, utilizando las soluciones particulares indicadas:

(a) $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2, \quad y_1(x) = x$.

(b) $y' = 14 + 20x + 8x^2 - (10 + 8x)\, y + 2y^2, \quad y_1(x) = ax + b$.

(c) $y' + y^2 = x^{-4}, \quad y_1(x) = \dfrac{ax + b}{x^2}$.

11.- Utilizando el campo de direcciones, hacer un dibujo aproximado de las soluciones de las siguientes EDOs:

(a) $y' = y/x$.

(b) $y' = -x/y$.

(c) $y' = y^2 - x^2$.

12.- Calcular las trayectorias ortogonales a las familias de curvas:

(a) $xy = C$.

(b) $x^2 + y^2 = Cx$.

(c) $y = ce^{-x}$.

(d) $x^2 y^2 = C\left(x^2 - 1\right)$.

(e) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = C$.

(f) $y = \dfrac{x}{1 + Cx}$.

13.- Estudiar la existencia y unicidad de soluciones de los siguientes problemas de Cauchy

a)

$$\begin{cases} y' = t + y^2 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y' = y^{1/3} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} y' = t - y \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

14.- Está nevando con regularidad. A las 12h sale una máquina quitanieves que recorre en la primera hora 2km y en la segunda, 1km. ¿A qué hora empezó a nevar?.

15.- Una bola de nieve se derrite de tal manera que la razón de cambio de su volumen es proporcional al área de su superficie. El diámetro de la bola de nieve es inicialmente de 4cm y al cabo de 30 minutos su diámetro pasa a ser de 3cm.
(a) ¿Cuándo será su diámetro son 2cm.?
(b) ¿Cuándo desaparecerá la bola de nieve?.

16.- De acuerdo con la ley de Torricelli, el agua escapará de un depósito abierto por un pequeño orificio a una velocidad igual a la que adquiriría al caer libremente desde el nivel del agua hasta el del orificio. Un cuenco hemisférico de radio R está inicialmente lleno de agua, y en el instante t = 0 se le perfora un orificio circular de radio r en el fondo. ¿Cuánto tarda en vaciarse?.

Ampliación de Matemáticas. 2º*curso*. Grado de Ingeniería Civil. *Curso 2013/2014.*

Hoja 3 de Problemas

1.- Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

(a) $y^{(2} + y^{(1} - 2y = 0.$

(b) $y^{(2} - 4y^{(1} + 5y = 0.$

(c) $y^{(4} + 2y^{(2} + y = 0.$

(d) $y^{(3} - y^{(2} - y^{(1} + y = 0.$

(e) $y^{(5} - 10y^{(3} + 9y^{(1} = 0.$

2.- Determinar una base del espacio de soluciones de la ecuación

$$x''' + (\mu + 1)x'' + (\mu + 1)x' + x = 0$$

en función del parámetro μ.

3.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $y^{(2} + 3y^{(1} - 10y = 6e^{4x}.$

(b) $y^{(2} - 2y^{(1} + 5y = 25x^2 + 12.$

(c) $y^{(2} - y^{(1} - 6y = 20e^{-2x}.$

(d) $y^{(2} - 3y^{(1} + 2y = 3 \operatorname{sen} 2x.$

4.- Hallar las soluciones de los problemas de valores iniciales siguientes:

(a) $\left\{ \begin{array}{l} y^{(2} + 2y^{(1} + 2y = xe^{-x} \\ y(0) = y^{(1}(0) = 0 \end{array} \right. .$

(b) $\left\{ \begin{array}{l} y^{(3} - 2y^{(2} + 10y^{(1} = 0 \\ y(0) = 0; \ y^{(1}(0) = 1; \ \ y^{(2}(0) = -8 \end{array} \right. .$

(c) $\left\{ \begin{array}{l} y^{(3} + 2y^{(2} + 5y^{(1} = 5x \\ y(0) = y^{(1}(0) = 0; \ \ y^{(2}(0) = \dfrac{1}{5} \end{array} \right. .$

5.- Resolver las siguientes ecuaciones mediante reducción de orden (determinar previamente una solución particular):

(a) $xy^{(2} - (1 + 2x)\, y^{(1} + 2y = 0.$

(b) $xy^{(2} - (1 + x)\, y^{(1} + y = 0.$

6.- Resolver las siguientes ecuaciones y problemas de valores iniciales, reduciendo su orden mediante un cambio de la forma $p(x) = y^{(k}(x)$:

(a) $y^{(5} - \dfrac{1}{x} y^{(4} = 0.$

(b) $y^{(2} = \left(y^{(1}\right)^2$.

(c) $yy^{(2} = y^2 y^{(1} + \left(y^{(1}\right)^2$; $y\,(0) = 2$; $y^{(1}\,(0) = 2$.

(d) $y^{(2} = y^{(1} e^y$; $y\,(0) = 2$; $y^{(1}\,(x) = 2$.

7.- Se considera el problema masa-resorte al que se le aplica una fuerza externa periódica

$$\left\{ \begin{array}{l} 2u^{(2} = -8u + \cos wt \\ u\,(0) = u^{(1}\,(0) = 0 \end{array} \right.$$

.

i) Resolver el problema si $|w| \neq 2$.

ii) Calcular el límite de la solución obtenida cuando $\omega \to 2$.

iii) Resolver el problema si $w = 2$.

8.- La ecuación diferencial que regula un circuito LRC viene dada por

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + C^{-1}I = \frac{dE}{dt},$$

donde E designa la fuerza electromotriz del circuito y $L = 10\,h$, $R = 20\Omega$ y $C = 0{,}01\,f$. Si la corriente inicial y la carga inicial del condensador son nulas, determinar la intensidad de corriente del circuito para i) corriente continua $E(t) = 10$, ii) corriente alterna $E(t) = 10 \operatorname{sen} 2t$.

9.- Resolver la ecuación $y^{(2} + 4xy^{(1} + (4x^2 + 2)y = e^{-x^2}$ sabiendo que una solución de la ecuación homogénea asociada es de la forma $y = e^{\alpha x^2}$ para algún α.

10.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $y^{(2} + y = \operatorname{cotg}(t)$.

(b) $y^{(2} + 4y = \sec(2t)$.

(c) $y^{(2} - 6y^{(1} + 9y = \dfrac{e^{3t}}{t^2}$.

11.- Hallar los desarrollos en serie de las soluciones alrededor del punto $x = 0$ de las ecuaciones:

1. $y^{(1} + xy = 0$.
2. $xy^{(1} - y = x^2 \cos x$.

12.- Hallar los 5 primeros términos del desarrollo en serie en torno al origen de la solución de la ecuación diferencial $y^{(2} + y^{(1} - xy = 0$ que satisface las condiciones iniciales $y\,(0) = 0$; $y^{(1}\,(0) = 1$.

13.- Qué se puede decir de la existencia y unicidad de solución y del intervalo de definición de ésta para los problemas de valores iniciales:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-x^2)y^{(2} - 2xy^{(1} + n(n+1)y = e^x \\ y\,(0) = 0,\ y^{(1}\,(0) = 1. \end{array} \right. .$$

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-x^2)y^{(2} - 2xy^{(1} + n(n+1)y = 5x \\ y\,(-3) = 4,\ y^{(1}\,(-3) = 1. \end{array} \right. .$$

$$(c)\ \begin{cases} y^{(2} + \dfrac{1}{x-3} y^{(1} + \sqrt{x} y = \log x \\ y\,(1) = 3,\ y^{(1}\,(1) = -3. \end{cases}.$$

donde $n \in \mathbb{N}$ es una constante dada.

14.- Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' - t^2 x' - 2tx = 0, \\ x(0) = 1, \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Decidir razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El problema de valores iniciales posee una única solución analítica en $t = 0$.

b) El problema de valores iniciales no tiene soluciones analíticas.

c) La única solución analítica del problema de valores iniciales viene dada por

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{3^n n!}.$$

15.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\left(1 + t^2\right) y^{(2} + 2ty^{(1} - 2y = 0$ en términos de series de potencias de t.

16.- Indicar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no. Clasificarlos y escribir la ecuación indicial cuando corresponda.

1. $x^2 y^{(2} - 2y = 0;$
2. $x^2 y^{(2} - 2xy^{(1} + 2y = 0;$
3. $xy^{(2} + e^x y^{(1} + 3y \cos x = 0;$
4. $xy^{(2} + 2y^{(1} + 4y = 0;$
5. $x \operatorname{sen} x\, y^{(2} + 3y^{(1} + xy = 0;$
6. $\operatorname{sen} x\, y^{(2} + xy^{(1} + 4y = 0.$

17.- Hallar dos soluciones en serie de Frobenius independientes para cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $xy^{(2} + 2y^{(1} + xy = 0;$
2. $2xy^{(2} + (x+1)\, y^{(1} + y = 0;$
3. $xy^{(2} - y^{(1} + 4x^3 y = 0.$

Ampliación de Matemáticas. 2^{o}*curso*. Grado de Ingeniería Civil. *Curso 2013/2014.*

Hoja 4 de Problemas

1.- Resolver, si es posible, los siguientes problemas de contorno, determinando si tienen solución única

i) $\begin{cases} y'' + 9y = \sin(x),\ x \in (0,\, \pi), \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$

ii) $\begin{cases} y'' + 4y = \sin(x),\ x \in (0,\, \pi), \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$

iii) $\begin{cases} y'' + 4y = e^{5x},\ x \in (0,\, \pi), \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$

iv) $\begin{cases} y'' - 9y = 2,\ x \in (0,\, 1), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$

2.- Considerar las funciones definidas a continuación en el intervalo $[-\pi,\, \pi]$:

$f(x) = x^2 - \pi^2,$

$g(x) = x$ si $x \in [-\pi,\, 0]$, $\quad g(x) = 0$ si $x \in [0,\, \pi]$.

Encontrar sus desarrollos de Fourier.

Demostrar que las funciones que aparecen en el desarrollo de Fourier ($\{1,\, \cos(nx),\, \sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$) son las *funciones propias* del problema de valores propios

$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0,\ x \in (-\pi,\, \pi), \\ y(-\pi) = y(\pi),\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$

3.- Determinar los coeficientes de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -\pi, & \text{para } -\pi < t < 0, \\ \pi, & \text{para } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{para } t = 0, \pi, \end{cases}$$

para un periodo $T = 2\pi$.

4.- La función $f(t) = \cos^2 t$ es periódica, de periodo 2π. Determinar su serie de Fourier. Indicación: este ejercicio es casi trivial utilizando identidades trigonométricas.

5.- La función $f(t) = \sin^3 t$ es periódica, de periodo 2π. Determinar su serie de Fourier.

6.- Determinar la serie de Fourier de $f(x) = x^2 - x$ en $[-2,\, 2]$.

7.- Determinar la serie de Fourier de $f(x) = x$ en $[-\pi,\, \pi]$.

8.- Determinar la serie de Fourier de $f(x) = |x|$ en $[-\pi,\, \pi]$.

9.-

a) Encontrar la solución general de

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

.

b) Resolver el problema de Cauchy

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

10.- Encontrar la solución general de

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

.

11.- Encontrar la solución general de

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

.

12.-

a) Encontrar la solución general de

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

.

b) Resolver el problema de Cauchy

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

13.- Encontrar la solución general de

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

.

14.- Encontrar la solución general de

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}$$

.

15.- Encontrar la solución general de

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$$

.

16.- Resolver el sistema: $\begin{cases} y_1^{(1} &= y_1 + 3y_2 \\ y_2^{(1} &= 2y_1 + 2y_2 \end{cases}.$

17.- Resolver el sistema: $\begin{cases} y_1^{(1} &= y_2 \\ y_2^{(1} &= -4y_1 \end{cases}.$

18.- Resolver el sistema: $\begin{cases} y_1^{(2} + y_1^{(1} + y_2^{(1} - 2y_2 &= 0 \\ y_1^{(1} - y_2^{(1} + y_1 &= 0 \end{cases}.$

19.- Resolver el sistema: $\begin{cases} y_1^{(1} & = & 2y_1 \\ y_2^{(1} & = & 3y_1 + 2y_2 \\ y_3^{(1} & = & 5y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$.

20.- Resolver el sistema: $\begin{cases} y_1^{(1} & = & -y_1 + 4y_2 \\ y_2^{(1} & = & -2y_1 + 3y_2 & + & e^x \end{cases}$, con las condiciones iniciales $y_1(0) = y_1(0) = 0$.

21.- Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$$(a) \begin{cases} x^{(1} = -x - y \\ y^{(1} = 2x - y \\ x(0) = 1; \;\; y(0) = 2 \end{cases}.$$

$$(b) \begin{cases} x^{(1} = x - 2y + 2 \\ y^{(1} = 5x - y + 1 \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}.$$

$$(c) \begin{cases} x^{(1} = x - 2y - t \\ y^{(1} = 2x - 3y - t \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}.$$

22.- Encontrar una matriz A tal que $y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$ sea solución de la ecuación $y^{(1} = A\,y$.

23.- Sobre una superficie lisa se sujeta una masa de 2 kg a una superficie vertical por medio de un resorte de constante elástica 4 Nw/m. Otra masa de 1 kg se conecta a la primera mediante un resorte con constante elástica de 2 Nw/m. Las masas se alinean horizontalmente de manera que los resortes quedan con sus longitudes naturales. Se efectúa un desplazamiento de 0.5 m a la derecha de sus posiciones de equlibrio y se suelta. Determinar las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema y resolver el correspondiente problema de valor inicial.

24.- Encontrar la función $u(x,t)$ definida para $0 \le x \le \pi$ y $t \ge 0$ que satisface el problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \;\; u(x,0) = h(x),$$

donde $h(x)$ viene dada por:

a) $h(x) = \sin(2x)$

b) $h(x) = 4\sin x + 2\sin(2x) + 7\sin(3x)$.

c)

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{para } 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi - x, & \text{para } \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 1 - Tema 1: EDO de primer orden

Sobre interpretación geométrica

1. Hacer un dibujo aproximado de las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales (resolviendo si se puede o mediante el campo de direcciones asociado)

   $a).\ \ y' = \dfrac{y}{x},\qquad b).\ \ y' = \dfrac{-x}{y}\qquad c).\ \ y' = e^{-x^2},\qquad d).\ \ y' = \dfrac{y}{\sin(x)},$

   $e).\ \ y' = y + \sin(x),\qquad f).\ \ y' = \dfrac{xy}{|xy|},\qquad g).\ \ y' = \dfrac{y}{x^2}\qquad h).\ \ y' = cos(y-x)$

   $i).\ \ y' = \sqrt{|1-x^2-y^2|},\qquad j).\ \ y' = x^2+y^2,\qquad k).\ \ y' = y^2-x^2,$

2. Hallar la ecuación diferencial de las circunferencias:

   - Tangentes al eje de las x y a la recta $y=4$

   - Centradas en el eje $y=0$ y de radio 1.

   Deducir si hay más curvas solución de la ecuación diferencial encontrada.

3. Hallar las ecuaciones diferenciales de las que son solución las familias de curvas:

   $a).\ \ y = e^{Cx},\qquad b).\ \ y = sin(x+C)\qquad c).\ \ Cy = \sin(Cx),\qquad d).\ \ x^2+Cy^2 = 2y.$

4. Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales a las siguiente familias

   $a).\ \ y = Cx^2,\qquad b).\ \ xy = C\qquad c).\ \ y^2 = x+C,\qquad d).\ \ y = e^{Cx}.$

5. Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencias $x^2+y^2=C^2$.

   Hallar la familia de curvas que cortan a la familia $x^2+y^2=C^2$ con un ángulo $\pi/4$.

6. Una curva, en el plano xy, pasa del origen de cordenadas al primer cuadrante. Encontrar la ecuación de la curva sabiendo que: el área de la región bajo la curva entre $(0,0)$ y (x,y) es un tercio del área del rectángulo que tiene a esos puntos como vértices opuestos.

7. Encontrar las curvas verificando que, en cada punto (x,y), la abscisa del punto de intersección de la tangente a la curva (en (x,y)) con el eje de las abscisas es la mitad de la del punto.

8. Una pelota de futbol americano, que tiene forma de elipsoide de revolución con 12 pulgadas de longitud y 6 de ancho, permanece bajo la lluvia. Encontrar las trayectorias que seguirán las gotas de agua al escurrir por sus lados.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 2 - Tema 1: EDO de primer orden

Resolución de ecuaciones elementales

1. Resolver las ecuaciones:

$a)$. $y' = \dfrac{\cos x}{\sin y + 1}$, $\quad b)$. $y' = xy$, $y(1) = 3$, $\quad c)$. $y' = -\dfrac{\tan y}{\tan x}$,

$d)$. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $\quad e)$. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, $\quad f)$. $xy' = y - x\exp(\dfrac{y}{x})$,

$g)$ $y' = \dfrac{x+y+1}{x+y-1}$, $\quad h)$. $y' = \dfrac{2x+y+5}{x+2y-4}$ $\quad i)$. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$,

$j)$. $y' = \dfrac{x+y}{y-x}$, $\quad k)$. $y' = \dfrac{y(x+y)}{x^2}$, $\quad l)$. $y' = -\dfrac{y(x^2+x)}{x}$, $y(1) = 1$

2. Resolver las ecuaciones:

$a)$. $y(x^2+x) + x^2y' = 0$, $\quad b)$. $x\cos x = xy^2y' + y^3$, $\quad c)$. $y' = -\dfrac{y}{3x - xy - 2}$,

$d)$. $y' + y^2 = 1 + x^2$, $\quad e)$. $xy' + y = x^4y^3$, $\quad f)$. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$, $y(-2) = 1$,

$g)$. $y' + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}$, $\quad h)$. $y' = \dfrac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$, $\quad i)$. $y' + 2xy = 2x$,

$j)$. $y' = \dfrac{1}{3}(1-2x)y^4 - y$, $\quad k)$. $y' = -\dfrac{y}{x} + y^2 - \dfrac{1}{x^2}$, $y(2) = 1$

$l)$. $y'(x\cos x - 1) = y^2 - y(x\sin x + \cos x) + \sin x$,

3. Encontrar a para que la ecuación $(xy^2 + ax^2y)dx + x^2(x+y)dy = 0$ sea diferencial exacta y resolverla.

4. Resolver como ecuaciones diferenciales exactas, o reducibles a diferenciales exactas con factor integrante dependiente de x, y, xy, x^2+y^2 o xy^2:

$a)$. $3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy = 0$, $\quad b)$. $(xy-1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$,

$c)$. $ydx + (3x^3y^4 + x)dy = 0$, $\quad d)$. $ydx + (x^2y - x)dy = 0$,

$e)$. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$, $\quad f)$. $xdx + (y + 4y^3(x^2+y^2))dy = 0$,

$g)$. $y\cos(x)dx + (1+\sin(x))dy = 0$, $\quad h)$. $y(x+y)dx - x^2dy = 0$,

$i)$. $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$, $\quad j)$. $(2xy - 2x)dx + dy = 0$,

Indicar qué cuaciones se pueden resolver por otros métodos

5. Encontrar el domino del plano donde las ecuaciones, e.g., $1-c$ y $1-e$ están definidas

6. Encontrar el dominio del plano donde se tiene garantizado que existe una única solución explícita pasando por cada punto para las ecuaciones $1-c$, $1-e$, $2-f$ y $2-k$ y qué se puede decir del intervalo de definición de las soluciones.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 3 - Tema 1: EDO de primer orden

Sobre modelos matemáticos

1. Un columna cónica de sección circular cuyo material tiene una densidad constante a soporta una carga L. Sea r_0 el radio de la parte superior de la columna. Teniendo en cuenta que las áreas de las secciones transversales son proporcionales a la carga que soportan, encontrar el radio $r(x)$ a una distancia x por debajo de la parte superior.

2. Comenzó a nevar una mañana y la nieve siguió cayendo con la misma intensidad durante todo el día. Al mediodía una máquina quitanieves empezó a limpiar una carretera a ritmo constante en términos de volumen quitado cada hora. La máquina limpió 2 Kms. para las dos de la tarde y 1 Km. más para las 4 de la tarde. ¿A qué hora empezó a nevar?.

3. Una bola de naftalina que tenía originalmente un radio de $\frac{1}{4}$ cm., al cabo de un mes, tiene un radio de $\frac{1}{8}$ cm.. Suponiendo que la evaporación es proporcional a la superficie, ¿cuántos meses tardará en desaparecer por completo?.

4. La desintegración de la materia radioactiva es proporcional a la cantidad de materia que se tiene. Si la desintegración del 50% de la materia radioactiva se produce en 30 días, ¿en cuánto tiempo quedará un 1% de la cantidad inicial?

5. El ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura existente entre él y el medio que le rodea. Se calienta el cuerpo a 110^0C, y se expone al aire libre a una temperatura de 10^0C, que se mantiene constante. Al cabo de una hora su temperatura es de 60^0C. ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que se enfríe a 30^0C?.

6. Se supone que la resitencia del aire, que actua sobre un cuerpo en caída de masa m, ejerce una fuerza retardadora proporcional a la velocidad. Si se lanza un cuerpo, desde una altura H, con velocidad inicial v_0, calcular la velocidad en función del tiempo. Si $v_0 = 0$, calcular la velocidad con la que llegará al suelo.

   Calcular la velocidad si la fuerza retardadora es proporcional al cuadrado de la velocidad y $v_0 = 0$.

   Comparar con el caso en el que se supone que no hay rozamiento.

   En los casos anteriores, calcular la altura en función del tiempo. Plantear la ecuación diferencial de segundo orden que verifica.

7. Se considera la ecuación de un modelo de resorte lineal no amortiguado $my'' + cy = 0$, con m y c constantes positivas características del resorte (constantes de masa y recuperación, repectivamente). Reducir a una ecuación de primer orden y resolver.

Modelos con ED de primer orden: *crecimientos de poblaciones, descomposición de materia radioactiva, reacciones químicas….*

"problemas de Cauchy o valor inicial"

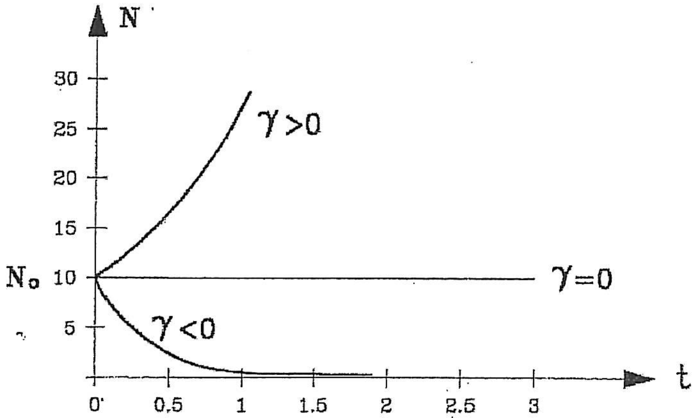
- Modelo de Malthus (hacia 1790):

Los nacimientos y las muertes, en un intervalo de tiempo pequeño, son proporcionales al tamaño de la población y al intervalo de tiempo. Es decir, *nacimientos* $= \alpha \Delta t N(t)$, *muertes* $= \beta \Delta t N(t)$, siendo $N(t)$ el tamaño de la población en el tiempo t. La variación de la población en un intervalo de tiempo Δt es $\Delta N(t) = \gamma N(t) \Delta t$ con $\gamma = \alpha - \beta$. Tomando límites cuando $\Delta t \to 0$ se tiene el modelo matemático:

la constante γ se obtiene del recuento de la población

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N$$

$$N(0) = N_0$$



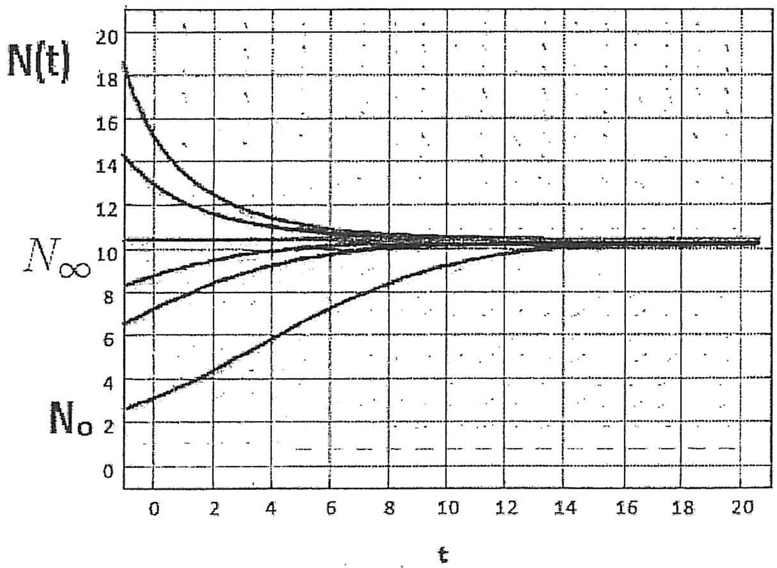
•Modelo de Verhulst (hacia 1837)

modificaciones al modelo de Malthus: *la población no puede crecer ilimitadamente, sino que tiende a estabilizarse en un límite N_∞ y la variación de la problación es proporcional a la población N y al factor* $(1 - \frac{N}{N_\infty})$. Es

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N(1 - \frac{N}{N_\infty})$$

las constantes se obtienen del recuento de la población!!

si $\gamma > 0$



$$N(t) = \frac{N_0 N_\infty}{N_0 + (N_\infty - N_0)\exp(-\gamma t)}.$$

GJ - AM - ED 13/14

1.6.1 Crecimiento de poblaciones.

Por ejemplo, en el Siglo $XVIII$, en Estados Unidos se quería conocer el modo en que la población variaba para predecir posibles cambios. El economista inglés T. Malthus propone el siguiente modelo matemático: *Los nacimientos y las muertes, en un intervalo de tiempo pequeño, son proporcionales al tamaño de la población y al intervalo de tiempo.* Es decir, *nacimientos* $= \alpha \Delta t N(t)$, *muertes* $= \beta \Delta t N(t)$, siendo $N(t)$ el tamaño de la población en tiempo t. La variación de la población en un intervalo de tiempo Δt es $\Delta N(t) = \gamma N(t) \Delta t$ con $\gamma = \alpha - \beta$. Tomando límites cuando $\Delta t \to 0$ se tiene el modelo matemático:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N. \qquad (1.18)$$

Resolviendo esta ecuación de variables separadas, junto con el hecho de que en el instante de tiempo en el que partimos ($t = 0$) el tamaño de la población es N_0, obtenemos que la población en el instante t está dada por $N(t) = N_0 \exp(\gamma t)$. Observamos en la gráfica de la figura 11 que si γ es negativo la población va extinguiéndose, si $\gamma = 0$, la población se mantiene constante, y si es positivo, la población crece exponencialmente. Los valores N_0 y γ se calculan para cada población tomando dos medidas en dos instantes de tiempo distintos. Conviene observar, también, que un pequeño error en el recuento de los datos nos lleva a distintos valores de las constantes N_0 ó γ que pueden ser significativos y cambiar considerablemente los resultados del modelo para tiempos grandes, es decir lejanos al instante en el que se cuenta la población (ver ejercicio 1).

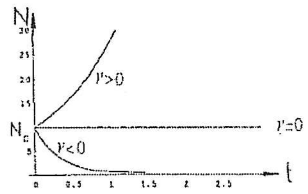


Figura 11 *Crecimiento de la población* $N_0 \exp(\gamma t)$.

Así, para la población en USA utilizamos la tabla 1 y obtenemos $N(t) = 3.9 \times 10^6 \exp(0.307t)$. En la tabla 2 se comparan los valores reales de la población de USA entre 1820 y 1930 con los obtenidos a través del modelo (1.18). Vemos cómo el modelo aproxima bien el crecimiento de la población durante unas décadas y después el modelo predice que la población va a crecer mucho más deprisa de lo que pasa en realidad. Así pues, el modelo propuesto por Malthus no aproxima bien al modelo real de crecimiento de esta población. Es necesario modificar las hipótesis si queremos obtener una mejor aproximación.

Año	Población USA ($\times 10^6$)
1790	3.9
1800	5.3
1810	7.2

Figura 12 *TABLA* 1. *Población real* 1790 – 1810.

En 1837 P.F. Verhulst propone unas modificaciones al modelo de Malthus: *la población no puede crecer ilimitadamente, sino que tiende a estabilizarse en un límite* N_∞ *y la variación de la probación es proporcional a la población* N *y al factor* $(1 - \frac{N}{N_\infty})$. Es decir, el modelo matemático es ahora:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right) \qquad (1.19)$$

y una simple integración nos da que el tamaño de la población es:

$$N(t) = \frac{N_0 N_\infty}{N_0 + (N_\infty - N_0)\exp(-\gamma t)}.$$

Para la población de USA, se calculan aproximadamente los valores tomados por Verhulst: $N_0 = 3.9 \times 10^6$, $N_\infty = 197 \times 10^6$ y $\gamma = 0.3134$.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN*

Una ecuación diferencial de primer orden es una expresión matemática en la que se relaciona una función con su derivada

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

$F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = y(x)$ es la **función incógnita**,

$y'(x)$ su derivada, y x es la **variable independiente**.

Definición: Dada una función $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $y = \varphi(x)$ es **solución** de la ecuación (1) en (α, β) si:

1). φ es continua y derivable en (α, β), y

2).$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ y $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Ecuación diferencial **en forma normal:** $y' = f(x, y)$.

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \qquad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Integración $\longleftrightarrow$ **Familia uniparamétrica de soluciones - Solución general:**

- *en forma explícita*, $y = y(x, c)$,
- *en forma implícita*, $\phi(x, y, c) = 0$,
- *en forma paramétrica* $(x(t, c), y(t, c)), t \in \mathbb{R}$,
- *en forma inversa*, $x = x(y, c)$.

Todas estas curvas se llaman **curvas integrales**

para $c = c_0$, $y = y(x, c_0)$ es una **solución particular**

* **Resúmenes / Capítulo 1 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

El proceso inverso a la integración: dada $\phi(x, y, c) = 0$ $F(x, y, y') = 0$ se obtiene eliminando c, si se puede, en

$$\phi(x, y, c) = 0 \quad \text{y} \quad \phi_x(x, y, c) + \phi_y(x, y, c)y' = 0$$

Problema de valor inicial o **problema de Cauchy**

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

$(x_0, y_0) \in$ dominio de definición de f.

$\to$ Una solución $y = \varphi(x)$ / $\varphi(x_0) = y_0$, $\quad x_0 \in (\alpha, \beta)$

Ecuaciones de variables separadas: $f(y)y' = g(x)$

Solución: $$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c \quad \forall c \text{ constante.}$$

Ecuaciones homogéneas: $y' = g(\frac{y}{x})$.

El cambio de variable $y = u.x \longrightarrow$ variables separadas

$$y' = u'x + u = g(u) \longleftrightarrow \frac{u'}{g(u) - u} = \frac{1}{x}$$

Se reducen a ecuaciones homogéneas:

- $y' = f(x, y)$, con $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

  $y' = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, con P y Q *funciones homogéneas de grado* n

  ($P(\lambda x, \lambda y) = P(x, y)\lambda^n$ y $Q(\lambda x, \lambda y) = Q(x, y)\lambda^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$)

- $y' = \dfrac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}$:

  hacer $z = ax + by$ (o $X = -x_0 + x$, $Y = -y_0 + y$ si (x_0, y_0) es un punto de corte de las rectas $ax + by + c = 0$ y $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Ecuaciones lineales .

Ecuación lineal homogénea (LH):

$$y' + p(x)y = 0, \quad p : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ continua}$$

($a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$, $a_0 \neq 0$ en (α, β) $(p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)})$)

PROPIEDAD de las soluciones de (LH):

$y_1(x)$, $y_2(x)$ soluciones en (α, β) y $\forall k_1, k_2 \in \mathbf{R}$

$\Longrightarrow y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$ solución en (α, β)

SOLUCIÓN GENERAL de (LH): $y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$

Ecuación lineal no homogénea (LNH):

$$y' + p(x)y = q(x), \quad p, q : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ continuas.}$$

SOLUCIÓN GENERAL de (LNH):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} c + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx$$

Teorema 2 *Sean $p, q : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R}$ funciones continuas y $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 \in \mathbf{R}$. Entonces, existe una única solución del problema de Cauchy,*

$$\begin{cases} y' + p(x)y &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0, \end{cases}$$

definida en el intervalo (α, β). Esta solución es:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s)\, e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du}\, ds \right).$$

Ecuaciones lineales de 1^{er} orden.

$$y' + p(x)y = 0, \qquad \text{(LH)}$$
$$y' + p(x)y = q(x), \qquad \text{(LNH)}$$

PROPIEDADES de las soluciones de (LNH):

- y_1, y_2 soluciones de (LNH) en $(\alpha, \beta) \Longrightarrow$
  $y_1 - y_2$ solución de (LH) en (α, β).
- La solución general de (LNH) es
  $$y(x) = ce^{-\int p(x)dx} + y_p(x)$$
  donde $y_p(x)$ es una solución particular de (LNH).
- **Método de variación de parámetros**: Buscar $y_p(x)$, $y_p(x) = k(x)e^{-\int p(x)dx}$, con $k(x)$ a determinar
  $$\Longrightarrow \quad k(x) = \int e^{\int p(x)dx} q(x)\, dx$$

Ecuaciones reducibles a lineales

Ecuación de Bernouilli: $y' + p(x)y = q(x)y^n$ $(n \neq 0, 1)$

Multiplicar por y^{-n} y hacer $z = y^{-n+1} \longrightarrow$ lineal

Ecuación de Riccati: $y' + p(x)y^2 + q(x)y = h(x)$

Hacer $u = y - y_p(x) \longrightarrow$ Bernouilli para $n = 2$
(supuesto conocida una solución particular $y_p(x)$).

Ecuaciones diferenciales exactas.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \qquad (2)$$

$$\Updownarrow \quad y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$P, Q : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $\mathcal{R}$ un rectángulo de $\mathbf{R}^2$
P y Q continuas y no nulas a la vez en $\mathcal{R}$.

Definición: (2) es **diferencial exacta** si $\exists F : \mathcal{R} \to \mathbf{R}$ /

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y), \ \forall (x,y) \in \mathcal{R}.$$

Si (2) diferencial exacta, entonces $F(x,y) = c$ es una familia de curvas integrales: $F_x + F_y y' = 0$

$\rightarrow$ Notación: $F_x \equiv \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y \equiv \frac{\partial F}{\partial y}$

CARACTERIZACIÓN:

Teorema 1 *Sean P y Q dos funciones continuas y con derivadas parciales primeras continuas en $\mathcal{R}$. La ecuación (2) es diferencial exacta en $\mathcal{R}$ si y sólo si*

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)\,, \forall (x,y) \in \mathcal{R}.$$

RESOLUCIÓN:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y)$$

$$C'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx$$

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \right) dy.$$

Definición: un **factor integrante** de la ecuación (2) es una función $\nu = \nu(x,y) \neq 0$ en $\mathcal{R}$, tal que

$$\nu(x,y)P(x,y)\,dx + \nu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

es diferencial exacta $\quad (\Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\nu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\nu Q))$

$\nu(x,y)$ factor integrante de (2) $\Rightarrow$

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Longleftrightarrow \nu P(x,y)dx + \nu Q(x,y)dy = 0$

$\Rightarrow \nu(x,y)$ es solución de:

$$\nu_y(x,y)P + \nu(x,y)P_y = \nu_x(x,y)Q + \nu(x,y)Q_x$$

EDP / dificil resolución!. Se buscan factores integrantes: $\nu(x)$, $\nu(y)$, $\nu(xy)$, $\nu(x^2+y)$, $\nu(x^2+y^2)$, etc.

EJEMPLOS:

$\exists \nu(y) \Longleftrightarrow \frac{Q_x - P_y}{P}$ es función de $y \longrightarrow \nu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P}\,dy}$

$\exists \nu(x,y) = \nu(xy^2) \Longleftrightarrow \frac{Q_x - P_y}{2xyP - y^2 Q}$ función de $z = xy^2$

$$\longrightarrow \nu(z) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{2xyP - y^2Q}\,dz}.$$

$$\left(\nu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}\,dx} \quad / \quad \nu(z) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ}\,dz}, \ \text{con } z = x^2 + y^2 \right)$$

EJERCICIOS: ED reducibles a diferenciales exactas

-1). La ecuación lineal $y' = p(x)y + q(x)$ admite un factor integrante dependiente de x.

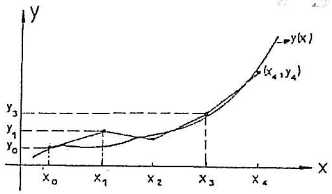
-2). Si la ecuación $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ es homogénea, admite un factor integrante: $\nu(x,y) = \frac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}$
(supuesto que $xP(x,y) + yQ(x,y) \neq 0$)

ED/GIC/UC/13-14

Solución numérica: Método de Euler

Sean f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en D, y $(x_0, y_0) \in D$: Sea $y = \varphi(x)$ la única solución de (PC) en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$:

$$(PC)\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$



Se conoce es la recta tangente a $\varphi(x)$ en (x_0, y_0)

Para h muy pequeño, en $[x_0, x_0 + h]$,
$\varphi(x) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$

Sea $x_1 = x_0 + h$, en $[x_1, x_1 + h]$,
$\varphi(x) \approx \varphi(x_1) + f(x_1, \varphi(x_1))(x - x_1)$.

pero $\varphi(x_1) \approx y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \Longrightarrow$
en $[x_1, x_1 + h]$, $\varphi(x) \approx y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$.

Construimos así **una aproximación de la solución de (PC)** en el intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$

Dados (x_0, y_0), $N = \delta h^{-1}$, se calcula recursivamente
$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}), \ i = 1, 2, ..., N.$

Solución numérica de (PC) en $[x_0, x_0 + \delta]$: $\{y_i\}_{i=0}^N$
Aproximación de la solución en $[x_0, x_0 + \delta]$:

$$\varphi_h(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1}) f(x_{i-1}, y_{i-1}) \, , x \in [x_{i-1}, x_i].$$

h=**tamaño del paso**= $\frac{\delta}{N}$, $\quad h \to 0 \longleftrightarrow N \to \infty$

Para la aproximación en $[x_0 - \delta, x_0]$: cambiar h por $-h$

Método de orden 1: error acotado por $Cte.h$

SOBRE MEJORAS DEL MÉTODO DE EULER:

Considerar: $\quad \varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i) + \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad$ o

$$\varphi(x_i + h) = \varphi(x_i) + h\varphi'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_i) + \cdots$$

- **El método de Euler mejorado** para aproximar numéricamente la solución de (PC): Se calcula y_{i+1} por el método de Euler y se mejora aproximando la integral $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi(s))\, ds$ por el valor medio:

$$\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i).$$

  Método de orden 2.

- **El método Taylor de orden** n para la aproximación numérica de la solución de (PC): se utilizan en cada iteración los n primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución en x_i.

  Para $n = 3$ (método de orden 2):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + (f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i))\frac{h^2}{2}$$

- **El método de Runge-Kutta**, para aproximar la solución de (PC):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(L_{i,1} + 2L_{i,2} + 2L_{i,3} + L_{i,4})$$

$$L_{i,1} = f(x_i, y_i)\, , \quad L_{i,2} = f(x_i + \frac{1}{2}h\, , y_i + \frac{1}{2}hL_{i,1})\, ,$$

$$L_{i,3} = f(x_i + \frac{1}{2}h\, , y_i + \frac{1}{2}hL_{i,2})\, , \quad L_{i,4} = f(x_i + h\, , y_i + hL_{i,3})\, .$$

  Método de orden 4.

Extensión del dominio de definición:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y)$ definida ó $\frac{1}{f(x,y)}$ definida$\}$

INTERPRETACIÓN geométrica de $y' = f(x,y)$

La ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ define **un campo de direcciones** en el dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ donde $f(x,y)$ o $\dfrac{1}{f(x,y)}$ estén definidas:

$(x,y) \in D \longrightarrow$ dirección de la recta de pendiente $f(x,y)$

dirección del vector $(1, f(x,y))$ ó $(\dfrac{1}{f(x,y)}, 1)$.

En los puntos / f y $\dfrac{1}{f}$ estan definidas ambas direcciones coinciden.

Bosquejo de curvas solución: en cada punto son tangentes a la dirección del campo

Curva isoclina para la pendiente k

$$\{(x,y)/f(x,y) = k\}$$

puntos del plano en los que las soluciones tienen pendiente k.

Dirección del campo $\equiv$ Dirección del vector $(1,k)$

Isoclinas para las pendientes $k=0$ y $k=\infty$ $\longrightarrow$ posibles cambios en el crecimiento de las soluciones

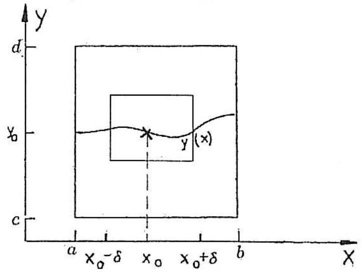
El problema de Cauchy: Ecuaciones no lineales

Teorema 3 *Sea D el rectángulo abierto*

$$D = \{(x,y)/a < x < b, c < y < d\}$$

y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en D. Entonces, $\forall (x_0, y_0) \in D$, $\exists$ un intervalo, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a,b)$, en el cual existe una única solución $y = \varphi(x)$ del problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



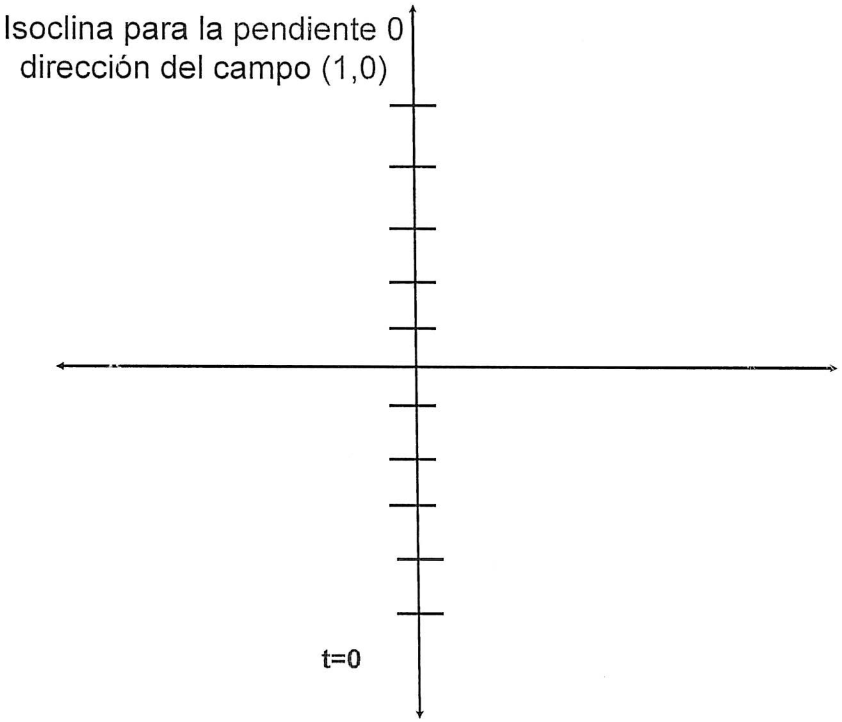
OBSERVACIONES

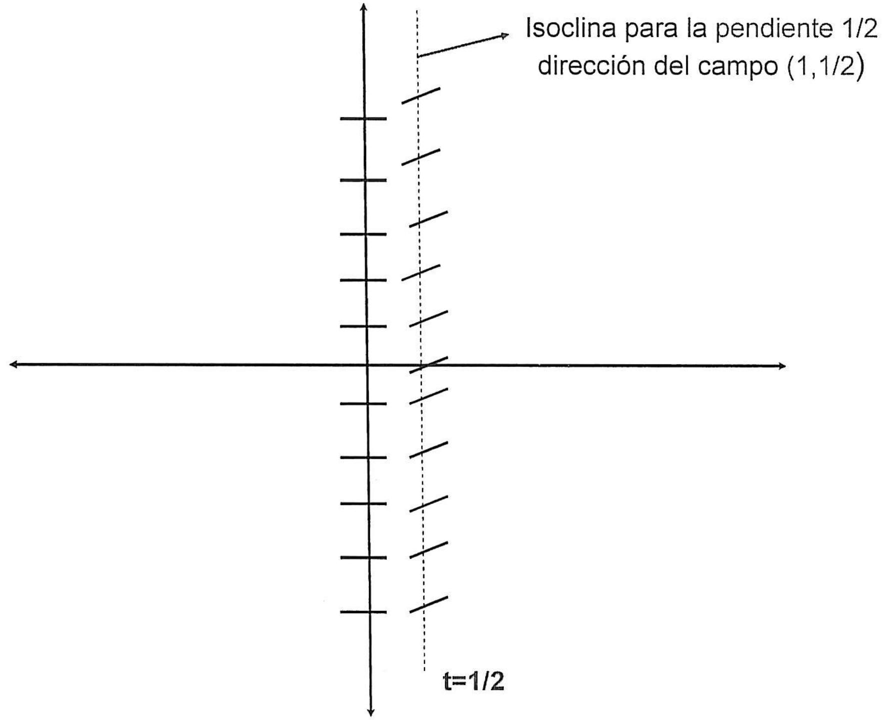
- D puede ser cualquier dominio abierto de $\mathbb{R}^2$.
- El δ máximo en general no es fácil de determinar

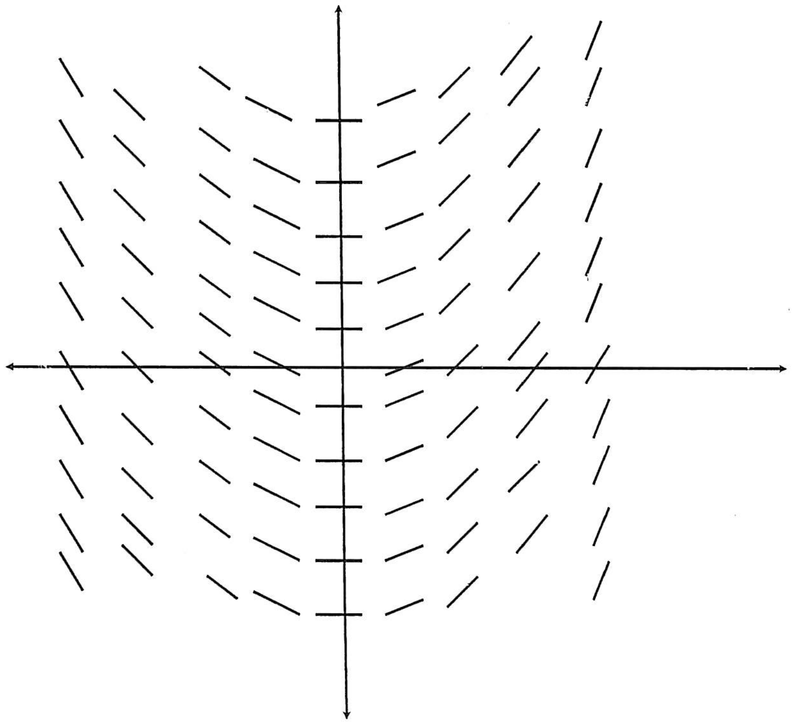
  Una primera estimación de δ: $\delta = \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$, $\alpha, \beta /$ $D_1 = \{(x,y)/|x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\} \subset D$, y, $M = \max_{(x,y)\in D_1} |f(x,y)|$.
- **Problema bien planteado**: "*pequeñas variaciones de los datos*" $\Rightarrow$ "*pequeñas variaciones de la solución*"
- Supuesto que f es "*muy regular*", "*cerca de x_0*":

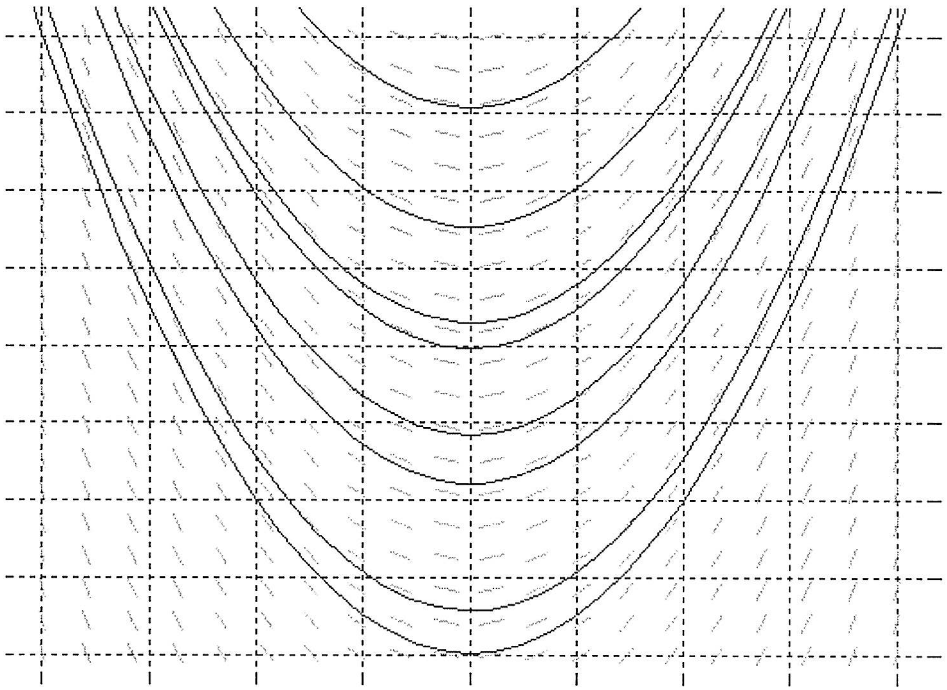
$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$|error| \leq max_{\zeta\in[x_0-\delta, x_0+\delta]} \frac{|\varphi'''(\zeta)|}{3!}\delta^3$$


Isoclina para la pendiente 0
dirección del campo (1,0)
t=0


Isoclina para la pendiente 1/2
dirección del campo (1,1/2)
t=1/2





NOMBRE... Número.........

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

Primera interrogación. Grupos de tarde

1). Econtrar la condición que deben verificar $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ para que la ecuación

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

admita un factor integrante dependiente de xy

CONDICION o FACTOR INTEGRANTE

Utilizar 1) para reducir a ecuación diferencial exacta la ecuación

$$(1 - y^3)dx + (xy^2 - x^2 + 2y)dy = 0$$

FACTOR INTEGRANTE

ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2º ORDEN*

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

$y = y(x)$ **función incógnita**; x **variable independiente.**

F definida $\Omega \subset \mathbf{R}^4$ y aparece la derivada segunda de y

Integración $\longrightarrow$ familia biparamétrica de curvas integrales $\phi(x, y, c_1, c_2) = 0$: **solución general.**

Reducción a 1^{er} orden: si $F(x, y', y'') = 0$, con $v = y'$

Ecuación lineal: $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

ED en **forma normal:** $y'' = f(x, y, y')$, $f : D \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$

Dado $(x_0, y_0^1, y_0^2) \in D$, **problema de valores iniciales** o **Problema de Cauchy:**

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y'' & = & f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0^1 & , & y'(x_0) = y_0^2. \end{array} \right.$$

Definición: Dada una función $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbf{R}$, $y = \varphi(x)$ es una **solución** de (PC) en (a, b) si: φ es continua y dos veces derivable en (a, b), y $\forall x \in (a, b)$ se verifica

$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D \quad$ y $\quad \varphi''(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x))$;

y además, $\quad \varphi(x_0) = y_0^1 \quad$ y $\quad \varphi'(x_0) = y_0^2$.

Teorema 1 *Sea D el dominio $D = \{(x, y, z)/a < x < b, c < y < d, e < z < f\}$ y la función f, $f : D \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, continua en D y con derivadas $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y'}$ continuas en D.*

$\forall (x_0, y_0^1, y_0^2) \in D$, $\exists\ [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$, en el cual la solución del problema de Cauchy (PC) existe y es única.

* **Resúmenes / Capítulo 2 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

Relación con sistemas y aproximaciones numéricas

Haciendo $y' = z$ en la ecuación $y'' = f(x, y, y') \rightarrow$ **sistema diferencial de 1^{er} orden** con dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & z \\ z' & = & f(x, y, z). \end{array} \right.$$

x **variable independiente** $y = y(x), z = z(x)$ **incógnitas**

Problema de Cauchy para un sistema:

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & r(x, y, z) \\ z' & = & s(x, y, z), \\ y(x_0) = y_0 & , & z(x_0) = z_0, \end{array} \right.$$

Resultado de existencia y unicidad de solución:

Sea $D = \{(x, y, z)/a < x < b, c < y < d, e < z < k\}$ y las funciones $r, s : D \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, tales que r, s, $\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial z}$ continuas en D. Entonces:

$\forall (x_0, y_0, z_0) \in D$, $\exists\ [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$, en el cual la solución del problema de Cauchy (PC) existe y es única.

La aproximación numérica de la solución $(y(x), z(x))$ en $x_i = x_0 + ih$, para el tamaño del paso h, es:

$$y_i = y_{i-1} + hr(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$$

$$z_i = z_{i-1} + hs(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}),$$

para $i = 1, 2, \cdots N$, donde $N = \delta h^{-1}$

Método de Euler: $(y_i, z_i) \approx (y(x_i), z(x_i))$ para $h \longrightarrow 0$

Notaciones vectoriales:

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{y}' & = & \overline{F}(x, \overline{y}) \\ \overline{y}(x_0) & = & \overline{y}_0 \end{array} \right.$$

Dada la función $\overline{F}$ y el punto $(x_0, \overline{y}_0)$, calcular
$x_i = x_0 + ih, \quad \overline{y}_i = \overline{y}_{i-1} + h\overline{F}(x_{i-1}, \overline{y}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \cdots N$

$\rightarrow$ **Extensión a otros métodos numéricos.**

Ecuaciones lineales de segundo orden.

Lineal homogénea (LH):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \text{con } a_0(x) \neq 0$$

Lineal no homogénea (LNH):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$$p, q, r : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funciones continuas}$$

p y q coeficientes; r término independiente,

Si p y q constantes: ED lineal de coeficientes constantes

Teorema 2 *Sean p, q, r funciones reales continuas en (a, b). Sea $x_0 \in (a, b)$ e $y_0^1, y_0^2 \in \mathbb{R}$. Entonces existe una única solución del problema de Cauchy:*

$$(PC) \left\{ \begin{array}{rcl} y'' + p(x)y' + q(x)y & = & r(x) \\ y(x_0) = y_0^1 & , & y'(x_0) = y_0^2, \end{array} \right.$$

definida en todo el intervalo (a, b).

PROPIEDADES de las soluciones de **(LH)**

1. Si $y_1(x), y_2(x)$ son soluciones de **(LH)** en (a, b) entonces $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ es también solución de **(LH)** en (a, b) (α_1, α_2 son constantes cualesquiera).

2. **Theorema**: *Si y_1, y_2 son dos soluciones de* **(LH)** *en (a, b) tales que en un punto cualquiera $x_0 \in (a, b)$:*

   $$y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0$$

   entonces, cualquier otra solución puede escribirse:

   $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ para algunas constantes c_1, c_2

   Definición: $\{y_1, y_2\}$ en el teorema se llama **conjunto fundamental de soluciones**.

Definiciones:

- Dos funciones $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ son **linealmente independientes** en I cuando:

  si $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

- $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ son **linealmente dependientes** en I si no son lineal. independientes ($\exists C \neq 0$ constante/ $\varphi_1(x) = C\varphi_2(x)$ o $\varphi_2(x) = C\varphi_1(x), \forall x \in I$).

- **Wronskiano** de $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *en el punto x* como:

$$W[\varphi_1, \varphi_2](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

Para $I \equiv (a, b)$ intervalo de resolución de **(LH)** y **(LNH)**

PROPIEDADES de las soluciones de **(LH)** (continua):

3. **Identidad de Abel**: dadas $y_1(x), y_2(x)$ dos soluciones de **(LH)** en I, $\exists C$ una constante/ $W[y_1, y_2](x) = C \exp(-\int_{x_0}^{x} p(s)ds)$, $\forall x \in I$.

4. **Teorema:** *Sean $y_1(x), y_2(x)$ dos soluciones de* **(LH)** *en I, son linealmente independientes*
   $\Longleftrightarrow W[y_1, y_2](x) \neq 0$, $\forall x \in I$
   $\Longleftrightarrow W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ *para algún $x_0 \in I$.*

5. **Siempre existen dos soluciones $\{y_1, y_2\}$ linealmente independientes de (LH).** Se dice que $\{y_1, y_2\}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

Dadas $\{y_1, y_2\}$ dos soluciones linealmente independientes de (LH), **la solución general de (LH)** es:

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ con c_1 y c_2 constantes.

ED/GIC/UC/13-14

El método de variación de parámetros

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad \textbf{(LH)}$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \qquad \textbf{(LNH)}$$

REDUCCION DEL ORDEN DE **(LH)**:
Dada una solución $y_1(x)$ de la ecuación **(LH)** en el intervalo I. Calculamos otra solución $y_2(x)$ linealmente independiente: Buscamos $y_2(x) = y_1(x)c(x)$ donde $c(x)$

$$c''(x)y_1(x) + (2y_1'(x) + p(x)y_1(x))c'(x) = 0$$

$c' = u \to$ ecuación lineal de primer orden, e integrando

$$c(x) = \int \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{y_1(x)^2} dx.$$

SOLUCION DE LA ECUACION **(LNH)**:
Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto fundamental de soluciones de **(LH)**, **la solución general** de **(LNH)** es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),$$

donde c_1, c_2 constantes e y_p **una solución particular** de **(LNH)**. Se busca y_p por el **método de variación de parámetros**:

$$y_p(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x)$$

con $K_1(x)$ y $K_2(x)$ / $y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x)$: $\Rightarrow$

$$K_1' y_1 + K_2' y_2 = 0,$$

$$K_1' y_1' + K_2' y_2' = r(x),$$

$$K_1(x) = \int \frac{-r(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad , \quad K_2(x) = \int \frac{r(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

Dadas $\{y_1, y_2\}$ $\to$ **las soluciones generales (LH) y (LNH)**

ECUACIONES QUE SE SABEN RESOLVER

▶ **La ecuación lineal de coeficientes constantes:**

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0.$$

Se busca $y_1 = e^{\lambda x} \Longrightarrow \lambda$ debe ser raíz del **polinomio característico:** $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$

Este polinomio tiene por raices λ_1, λ_2 en $\mathbb{C}$.

Posibilidades:

a). $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reales. Conjunto fundamental de soluciones

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}.$$

b). $\lambda_1 = \lambda_2$. Conjunto fundamental de soluciones:

$$\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\},$$

c). λ_1, λ_2 raices son complejas conjugadas: $\lambda = p \pm qi$. Conjunto fundamental de soluciones:

$$\{e^{px}\cos qx, e^{px}\sin qx\}.$$

La solución general en $(-\infty, \infty)$ es $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

▶ **La ecuación de Euler** de segundo orden:

$$\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ constantes.}$$

Se reduce a una lineal de coeficientes constantes haciendo: $x = e^t$ para $x > 0$ o $t = \ln|x|$

o se busca $y_1(x) = x^r \Longrightarrow r$ debe ser raíz del **polinomio indicial**: $\alpha r(r-1) + \beta r + \gamma$.

$\to$ Se resuelve en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

ED/GIC/UC/13-14

Ecuaciones lineales de tercer orden

Ecuación lineal **homogénea** de orden 3:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0, \qquad \textbf{(LH)}$$

Ecuación lineal **no homogénea** de orden 3:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = r(x), \qquad \textbf{(LNH)}$$

donde los coeficientes a_i, $i = 1, 2, 3$, y r son funciones reales definidas en $I = (a, b)$ y continuas

Solución general de **(LNH)**:

$$y_{GNH}(x) = y_{GH}(x) + y_p(x)$$

$y_{GH}(x)$ denota la solución general de **(LH)**
$y_p(x)$ denota una solución particular de **(LNH)**.

Si $\{y_1, y_2, y_3\}$ son 3 soluciones de **(LH)** linealmente independientes en I:

$$y_{GH}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$$

$$y_{GNH}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) + y_p(x)$$

Definición: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ son **linealmente independientes** en I cuando

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\alpha_3\varphi_3(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Supuesto que las funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ son continuas y dos veces derivables en I se define la función **Wronskiano** de $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \varphi_3(x)$:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \varphi_3''(x) \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE **(LH)**

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0 \qquad \textbf{(LH)}$$

- Combinación lineal de soluciones es solución:

  Si $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ son soluciones de **(LH)** en I entonces cualquier combinación lineal de ellas $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \alpha_3y_3(x)$ es también solución de **(LH)** en I (α_i son constantes cualesquiera).

- TEOREMA: *Sean $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ tres soluciones de* **(LH)** *en I; son linealmente independientes*
  $\iff W[y_1, y_2, y_3](x) \neq 0, \forall x \in I$
  $\iff W[y_1, y_2, y_3](x_0) \neq 0$ *para algún $x_0 \in I$.*

  Bajo estas condiciones, cualquier otra solución de **(LH)** *es combinación lineal de $\{y_1, y_2, y_3\}$.*

- Siempre existen tres soluciones $\{y_1, y_2, y_3\}$ linealmente independientes de **(LH)** en I. Se dice que $\{y_1, y_2, y_3\}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

- Dadas tres soluciones $\{y_1, y_2, y_3\}$ de **(LH)**, linealmente independientes en I la **solución general** es:

  $$y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+c_3y_3(x), \qquad c_1, c_2, c_3 \text{ constantes.}$$

▶ **Ecuaciones lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes.**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

a_i constantes $i = 1, 2, \cdots, n$. Se resuelven en $(-\infty, \infty)$. Se busca: $y = e^{\lambda x} \implies \lambda$ debe ser raíz del **polinomio característico**:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ las raices de este polinomio en el cuerpo de los complejos.

Posibilidades

a). Todas las raices son reales distintas. El conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}\}.$$

b). Todas las raices son reales y algunas de ellas coincidentes. Entonces, por cada raíz λ_k, de multiplicidad n_k, hay n_k soluciones de la ecuación linealmente independientes asociadas a esta raíz:

$$\{e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, x^2 e^{\lambda_k x}, \cdots, x^{n_k-1}e^{\lambda_k x}\}$$

c). Hay al menos una raíz compleja $\lambda_k = p + qi$ de multiplicidad n_k (el conjugado de λ_k, $p - qi$, es también una raíz de multiplicidad n_k). Entonces, hay $2n_k$ soluciones linealmente independientes de la ecuación asociadas a ambas raices:

$$\{e^{px}\cos(qx), e^{px}\sin(qx), xe^{px}\cos(qx), xe^{px}\sin(qx), x^2e^{px}\cos(qx), x^2e^{px}\sin(qx), \cdots\cdots, x^{n_k-1}e^{px}\cos(qx), x^{n_k-1}e^{px}\sin(qx)\}.$$

▶ **La ecuación de Euler de orden n:**

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_n y = 0$$

Hacer $x = e^t$ para $x > 0 \rightarrow$ coeficientes constantes

Resolución de ecuaciones lineales de n, $\forall n \geq 2$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad \textbf{(LH)}$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = r(x) \qquad \textbf{(LNH)}$$

REDUCCIÓN DEL ORDEN para **(LH)**:

Método de variación de parámetros: Si se conoce una solución $y_1(x)$ de **(LH)**, se reduce a una ecuación lineal de orden $(n-1)$ haciendo: $y(x) = c(x)y_1(x)$ ($c(x)$ es la función incógnita en la nueva ecuación).

BÚSQUEDA DE SOLUCIÓN PARTICULAR de **(LNH)**:

- **Método de variación de parámetros** para cualquier ecuación lineal con a_i constantes o no y $\forall r(x) \neq 0$.
Se busca

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x),$$

con $c_i(x)$ a determinar substituyendo en **(LNH)**.

- **Método de coeficientes indeterminados** para a_i constantes y con *determinados términos* $r(x) \neq 0$:

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}$, se busca $y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}$
$s = 0$ si α no es raíz del polinomio característico
$s = n_i$ si α es raíz de multiplicidad n_i
$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

- Si $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ o $r(x) = p_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, se busca
$$y_p(x) = x^s P_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + x^s Q_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$
$s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raíz del polinomio característico
$s = n_i$ si $\alpha + i\beta$ es raíz de multiplicidad n_i.

$p_k(x)$, $P_k(x)$ y $Q_k(x)$ denotan polinomios de grado k:

$P_k(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k$, $Q_k(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$

con los coeficientes b_i y c_i a determinar substituyendo en **(LNH)**.

ED/GIC/13-14

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 4 - Tema 2: EDO de orden $n > 1$

Resolución y aproximación de soluciones

1. Que se puede decir de la existencia u unicidad de solución, y del intervalo de definición de ésta para los problemas de valores iniciales:

   $a).\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = e^x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ $\quad b).\begin{cases} (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 5x \\ y(-3) = 4, \quad y'(-3) = 1 \end{cases}$

   $c).\begin{cases} x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = \frac{1}{x^2-1} \\ y(5) = 0, \quad y'(5) = 1 \end{cases}$ $\quad d).\begin{cases} y'' + \frac{1}{x-3}y' + \sqrt{x}\,y = \ln x \\ y(1) = 3, \quad y'(1) = -3 \end{cases}$

   $n \in \mathbf{N}$, $\nu \in \mathbf{R}$ son constantes dadas.

2. Demostrar que $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $y'' + y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

3. Resolver la ecuación $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ sabiendo que una solución es un polinomio de primer grado. Escribir la ecuación de primer orden a la que se llega utilizando el método de variación de parámetros. Indicar en que intervalos se resuelve la ecuacion.

4. Resolver la ecuación $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = e^{-x^2}$ sabiendo que una solución de la ecuación homogénea asociada es de la forma $y = e^{\alpha x^2}$ para alguna constante α

5. Se sabe que una solución de la ecuación de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ (con n un número natural) es un polinomio de grado n, encontrar la solución de:

   $$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = e^{-x^2}$$

   para los valores de $n = 1$ y $n = 2$. ¿Cuántas soluciones verifican $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$?

6. Aplicar el método de variación de parámetros para resolver $x^3y''' + xy' - y = 1$.

7. Resolver las siguientes ecuaciones

   $a).\ x^2y'' - 2y = x^2$ $\quad f).\ y'' + y' + y = 1 + x + x^2$
   $b).\ y'' + 2y' + y = x\sinh x$ $\quad g).\ y'' + y = |x|$
   $c).\ y'' + y = \sec x$ $\quad h).\ y''' + y'' - 2y' = -2$
   $d).\ y'' - 3y' + 2y = xe^{3x} + 1$ $\quad k).\ y''' + y'' - 2y' = -2 - e^x$
   $e).\ y'' + 4y = x\sin(2x)$ $\quad l).\ y^{iv)} + 2y'' + y = e^{-x}\sin(x)$
   $m).\ y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$ $\quad n).\ y^{iv)} - y'' = 0$
   $o).\ y^{iv)} - 16y = 0$ $\quad p).\ y^{iv)} + y'' = e^x$

8. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales

$$a).\left\{\begin{array}{c} y''-6y'+9y=0 \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0 \end{array}\right. \qquad b).\left\{\begin{array}{r} y'''+y''-2y'=-2-e^{x} \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=0 \end{array}\right.$$

9. Resolver las siguientes ecuaciones

$$a). \quad y''+4y'+5y=\frac{e^{-2x}}{\cos x} \qquad b). \quad y''+4y'+13y=e^{x}\cos(3x)$$

10. Resolver el problema de Cauchy, razonando en qué intervalo existe solución única

$$\left\{\begin{array}{l} x^2y''-xy'+y=\dfrac{x}{\ln x} \\ \\ y(e)=1, \quad y'(e)=1 \end{array}\right.$$

11. Sabiendo que una solución de la ecuación $y''-y'+e^{2x}y=0$ es $y_1(x)=\sin(e^x)$, resolver los problemas de Cauchy:

$$a).\left\{\begin{array}{c} y''-y'+e^{2x}y=e^{2x} \\ \\ y(\ln\pi)=0, \quad y'(\ln\pi)=0 \end{array}\right. \qquad b).\left\{\begin{array}{c} y''-y'+e^{2x}y=e^{2x} \\ \\ y(0)=0, \quad y'(0)=0 \end{array}\right.$$

Intentar encontrar la solución (o una aproximación de ésta) en caso de no conocer $y_1(x)$. Razonar/ comprobar si ésta solución coincide la obtenida concociendo $y_1(x)$.

12. Utilizar los 6 primeros términos del desarrollo en serie de la solución $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, para aproximar la solución del problema de Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{c} y''+e^{x}y'+(1+x^2)y=0, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=0 \end{array}\right.$$

13. Resolver o aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$y''-y=x^2$$
$$y''-x^2y=0$$
$$y''+y'+x^3y=0$$
$$y''-\sin(x)y=0$$

En caso de aproximar, utilizar los 10 primeros términos del desarrollo en serie de la solución $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, y encontrar el término general a_n en función de los anteriores.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 5 - Tema 2: EDO de orden $n > 1$

Sobre modelos matemáticos

1. La ecuación que rige el movimiento que oscila excitado por una fuerza $p(t)$, suponiendo que la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad está dado por

$$my'' + ky' + cy = p(t)\,.$$

Estudiar las vibraciones dependiendo de la relación entre la masa m del cuerpo que pende del resorte, la constante de recuperación c y la constante amortiguación k (ver sección 2.5 del libro de apuntes).

a). Tomando $p(t) = 0$ identificar las distintas situaciones con las gráficas que se dan a continuación. Dichas gráficas representan vibraciones fuertemente amortiguadas, débilmente amortiguadas y sin amortiguación entre otras.

En particular, considerar $p(t) = 0$, y las ecuaciones

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y'' + 4y = 0$$

y hacer una gráfica de las soluciones para distintas condiciones iniciales indicando cuándo el movimiento es débilmente amortiguado, fuertemente amortiguado o periódico.

b). Demostrar que en ausencia de amortiguación ($k = 0$), puede producirse el conocido fenómeno de la resonancia; tómese para ello $p(t) = \cos(\sqrt{c/m}\,t)$. Identificar la gráfica de la solución

c). Comparar el resultado del apartado anterior para $k = 0$, tomando $p(t)$ otra función periódica que no sea solución de la ecuación homogénea (ver ejercicio 2.)

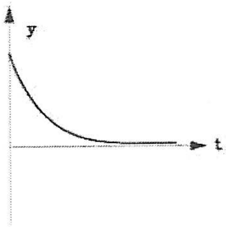
2. Estudiar las vibraciones que se producen en un resorte cuyo movimiento está descrito por los problemas de valores iniciales

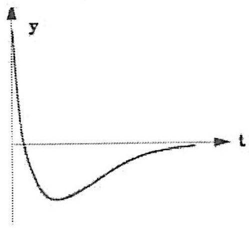
$$a).\begin{cases} y'' + 4y = \cos(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad b).\begin{cases} y'' + 4y = \cos(2t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

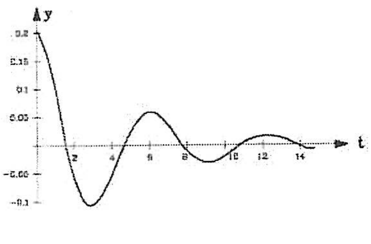
3. Comparar la ecuación del resorte lineal de los ejercicios anteriores con la que modela el paso de corriente por un circuito eléctrico:

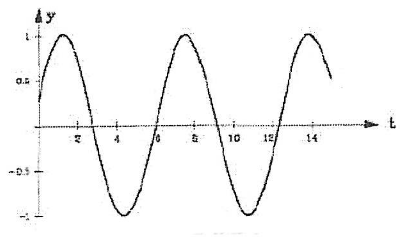
$$LQ''(t) + RQ'(t) + C^{-1}Q(t) = E(t)$$

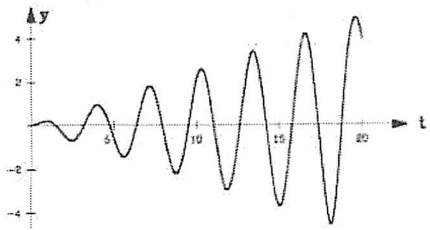
donde $Q(t)$ representa la carga en el tiempo t; $E(t)$ es la fuerza electromotriz, y las constantes L, R y C son las constantes de de inducción, de resitencia, y capacidad, respectivamente (ver secciones 1.6 y 2.5 del libro de apuntes).











4. Escribir la solución general que modela los desplazamientos de una viga sometida a una carga externa $p(x)$

$$EIy^{iv)} + Ty'' = p(x)$$

dependiendo de las constantes rigidez a flexión $EI > 0$ y esfuerzo axil T. Tomar para ello $p(x) = \cos x$ y $p(x) = e^x$.

5. Se considera un problema que sirve de modelo para describir las deformaciones de una viga (se supone situada en el eje de las x con los extremos fijos):

$$\begin{cases} y'' = \frac{M(x)}{EI}, x \in (0,3) \\ y(0) = 0 \quad , \quad y(3) = 0\,. \end{cases}$$

Encontrar la solución en caso de que exista y sea única para el valor de la constante $EI = 1$, y para el momento $M(x)$: $M(x) = 2x$ para $x \in [0,1]$, $M(x) = 3 - x$ para $x \in [1,3]$.

2). Se considera la ecuación diferencial de Hermite: $y'' - 2xy' + \nu y = 0$, con $\nu = \frac{1}{88}$

Buscar la solución mediante un desarrollo en serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

2.a).Escribir el término general de la serie a_n en función de los anteriores, indicando el valor de n para el que se obtiene dicho término.

2.b). Utilizar los 7 primeros términos del desarrollo en serie para aproximar la solución del problema de Cauchy asociado.

$$y'' - 2xy' + \nu y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Indicar el intervalo donde está definida la solución

2.c). Reducir la ecuación diferencial un sistema diferencial con dos ecuaciones. Escribir la aproximación de la solución del problema de Cacuchy asociado a dicho sistema utilizando 2.b).

$a_{n+2} =$ para $n \geq$...........

APROXIMACIÓN 2.b):
INTERVALO:

SISTEMA DIFERENCIAL SOLUCIÓN APROXIMADA

RAZONAMIENTOS BREVE para 2.b) y 2.c)

Teorema 5 *Sea la ecuación:*

$$x^2y'' + x(xp(x))y' + (x^2q(x))y = 0\,,$$

donde p y q son tales que las funciones $xp(x), x^2q(x)$ son analíticas en el punto $x = 0$, con $\rho > 0$ el mínimo radio de convergencia de las series de xp y x^2q. Sean p_0, q_0 los primeros términos de los desarrollos en serie de potencias de las funciones xp y x^2q respecivamente. Sean r_1 y r_2, $r_1 \geq r_2$, las raices reales del polinomio (polinomio indicial):

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0\,.$$

Entonces, la ecuación admite dos soluciones $y_1(x), y_2(x)$, linealmente independientes en $0 < |x| < \rho$, dadas de la forma:

1. *Si $r_1 - r_2$ no es un número entero o cero, entonces*

$$y_1 = |x|^{r_1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n)\,,$$

$$y_2 = |x|^{r_2}(\ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n).$$

2. *Si $r_1 = r_2$, entonces $y_1 = |x|^{r_1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n)$,*

$$y_2 = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n\,.$$

3. *Si $r_1 - r_2 \in \mathrm{N}$, entonces $y_1 = |x|^{r_1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n)$,*

$$y_2 = ay_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\,.$$

donde los coeficientes de las series a_i, b_i, c_i y la constante a se determinan por sustitución en la ecuación, y las series de potencias que aparecen tienen radio de convergencia al menos ρ. La constante a en principio podría ser 0 si la segunda solución no tiene un comportamiento logarítimico

Ecuaciones lineales de segundo orden: Solución por desarrollos en serie de potencias.

Definición: una función $f(x)$ es **analítica en el punto** $x = x_0$ cuando admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x - x_0)^n$$

convergente en algún entorno del punto x_0, con un *radio de convergencia* $\rho > 0$.

▶ Observaciones:

- La serie es convergente en $|x - x_0| < \rho$

- f_n son los coef. del desarrollo en serie de Taylor de f:

$$f_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

- El hecho de que una función $f(x)$ sea "regular" en todo $\mathbf{R} \not\Rightarrow$ que f sea analítica con radio de convergencia ∞

- Un test de convergencia de series de potencias es el **criterio del cociente**: supuesto que $f_n \neq 0$ para n suficientemente grande, si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = r \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x - x_0)^n$ tiene radio de convergencia de $\rho = \frac{1}{r}$.

▶ **Se buscan soluciones funciones analíticas** para ecuaciones diferenciales del tipo

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0,$$

cuando p y q son funciones analíticas en x_0

Para p y q analíticas en $x = 0$ ($x_0 \equiv 0$). BUSCAR:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

donde: $a_0 = y(0)$, $a_1 = y'(0)$

Solución por desarrollos en serie (continua).

Teorema 4 *Sean p y q funciones analíticas en el punto $x = x_0$. Sea ρ el mínimo de los radios de convergencia de las series de p y q, $\rho > 0$. Entonces, la solución general de la ecuación*

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \qquad \textit{es:}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, y y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes, analíticas en x_0 y con radio de convergencia al menos ρ. Los coeficientes de las series solución se calculan recursivamente substituyendo la serie y sus derivadas en la ecuación diferencial.

▶ Posibles extensiones:

- Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n > 2$

- Sistemas diferenciales lineales con n ecuaciones

- Ecuaciones no lineales: restricciones importantes!

- Otros tipos de coeficientes p y q:

e.g., *puntos singulares regulares*

Definición: un punto $x = x_0$ se dice que es un **punto singular regular** de $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ cuando la ecuación se puede escribir de la forma:

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) p(x) y' + q(x) y = 0,$$

donde $p(x), q(x)$ son funciones analíticas en x_0.

SE BUSCAN soluciones:

$$y = |x - x_0|^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) (x - x_0)^n.$$

EXAMEN PARCIAL DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.
21 DE NOVIEMBRE DE 2013

Apellidos y nombre:..
DNI:..
Número de orden:...

Instrucciones y comentarios:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes de ningún tipo.
2. Se ha de contestar en las hojas de enunciados (sólo se recogerán esas hojas).

Contestar brevemente donde se pide y escribir resolución y razonamiento en hojas grapadas

EJERCICIO 3 (**10 ptos.**)

3.1.- Resolver el problema de Cauchy

$$y' - 2y = -2x, \quad y(0) = 1$$

indicando el intervalo de definición de la solución.

SOLUCIÓN e INTERVALO:

3.2.- Resolver la ecuación diferencial $y' + y = xy^3$

SOLUCION GENERAL:

3.3.- Encontrar la solución o soluciones explícitas de la ED 3.2 que verifiquen $y(0) = 1$ e $y(0) = 0$. Razonar la respuesta.

SOLUCIONES de $y' + y = xy^3, \quad y(0) = 1$
e INTERVALO:

SOLUCIONES de $y' + y = xy^3, \quad y(0) = 0$
e INTERVALO:

3.4.- Encontrar las curvas donde las soluciones de la ED 3.2, $y' + y = xy^3$, pueden cambiar el crecimiento (curvas isoclinas para la pendiente 0), y dibujar la región del plano donde las curvas son crecientes.

CURVAS:

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 6- Temas 2/4 : Sobre problemas de contorno

1. Considerando las distintas funciones $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = 2$, $f(x) = e^{5x}$, resolver los problemas de contorno que se pueda de los que se dan a continuación, determinando si tienen solución única.

$$1). \quad y'' + 9y = f(x), \quad x \in (0, \pi)$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$
$$2). \quad y'' + 4y = f(x), \quad x \in (0, \pi)$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$
$$3). \quad y'' - 9y = f(x), \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$
$$4). \quad y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$
$$5). \quad \left(\frac{y'}{cos(x)}\right)' = 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{4})$$
$$y(0) + y'(0) = 3, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0$$
$$6). \quad (x-1)^3 y'' + 3(x-1)^2 y' + (x-1)y = (x-1)^2, \quad x \in (2, 3)$$
$$y(2) = 5, \quad y(3) + 2y'(3) = 0$$

2. Se considera el modelo de deformaciones de una viga de longitud l, sujeta en los extremos $x = 0$ y $x = l$, y sometidas a fuerzas externas que generan un momento:

$$EIy'' + Ty = p(x), \quad x \in (0, l)$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

Tomando $l = \pi$ y $p(x) = e^x$ ($p(x) = \sin(2x)$, respectivamente) calcular la deformación $y(x)$ supuesto que la relación entre las constantes rigidez a flexión EI y esfuerzo axil T es tal que $T/EI = 1$. Hacer lo mismo para $T/EI = -1$. Razonar a qué se deben los resultados.

2.a.-Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = \pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

2.b.- Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = -\pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

3. Encontrar las relaciones entre T y EI en el ejercicio anterior, de manera que la viga se deforme para $p(x) = 0$. Tomar $l = 1$ y $l = \pi$.

   Para $l = 1$, desarrollar las funciones $f(x) = x(x-1)$, $f(x) = x$ y f definida como:

$$f(x) = x \text{ si } x \in [0, 1/2], \quad f(x) = 0 \text{ si } x \in (1/2, 1],$$

   en serie de Fourier de las funciones propias obtenidas.

4. Encontrar los valores propios y las funciones propias de los siguientes problemas de Sturm-Liouville

$$a). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, \pi) \\ y'(0) = 0, & y(\pi) = 0 \end{cases} \qquad b). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, \pi) \\ y(0) = 0, & y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$c). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0, 2) \\ y'(0) = 0, & y'(2) = 0 \end{cases} \qquad b). \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (-1, 1) \\ y(-1) = 0, & y(1) = 0 \end{cases}$$

   Desarrollar las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = e^x$ y $f(x) = x$ en serie de Fourier de las funciones propias de los problemas (a)–(d).

5. Encontrar los valores propios y las funciones propias asociadas del problema con condiciones de contorno periódicas:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

   5.1.- Desarrollar en serie de Fourier de las funciones propias del problema dado, las siguientes funciones:

$$(a) \qquad f(x) = x, \text{ si } x \in [-\pi, 0], \quad f(x) = 0, \text{ si } x \in [0, \pi]$$

$$(b) \qquad f(x) = -1, \text{ si } x \in [-\pi, 0], \quad f(x) = 1, \text{ si } x \in (0, \pi]$$

$$(c) \qquad f(x) = x^2 - \pi^2, \text{ si } x \in [-\pi, \pi]$$

   5.2.- Expresar la función $f(x) = x + \pi$ definida en $[-\pi, \pi]$ en serie de Fourier de las funciones propias de dicho problema.

   5.3.- Expresar la función $g(t) = (t-2)\pi$ definida en $[2, 4]$ en serie de las funciones propias obtenidas (para ello, hacer un cambio de variable $x = \alpha t + \beta$, para constantes α y β a determinar, que transforme el intervalo $[2, 4]$ en $[-\pi, \pi]$).

6. Escribir en forma autoadjunta las siguientes ecuaciones:
   Ecuación de Legendre: $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
   Ecuación de Bessel: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$
   Ecuación de Hermite: $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$
   n (ν) denota un número natural (real).

PROBLEMAS DE CONTORNO*

La forma más general de un problema de contorno para una ecuación de segundo orden es:

$$(\mathrm{PC})\left\{\begin{array}{rcl} a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = h(x) & , & x\in(a,b),\\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)+\alpha_3 y(b)+\alpha_4 y'(b) & = & \gamma_1\,,\\ \beta_1 y(a)+\beta_2 y'(a)+\beta_3 y(b)+\beta_4 y'(b) & = & \gamma_2\,,\end{array}\right.$$

$a_0(x)\neq 0$ en $[a,b]$ y las constantes α_i, β_i afectando a a (b respectivamente) no todas nulas. γ_i constantes

Definiciones:

- En el caso $h(x)=0, \gamma_1=0, \gamma_2=0$ se dice que el problema (**PC**) es **un problema de contorno homogéneo**.
- Si en las condiciones de contorno $\alpha_3=\alpha_4=\beta_1=\beta_2=0$, se dice que las **condiciones** son **de tipo separado**.
- Si $y(a)=y(b)$, $y'(a)=y'(b)$ se dice que las **condiciones de contorno** son **periódicas**.
- (**PC**) es un **problema de contorno regular** si:

$$(\mathrm{PC}R)\left\{\begin{array}{rcl} (\widetilde{p}(x)y')'+q(x)y & = & h(x)\,, \quad x\in(a,b),\\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a) & = & \gamma_1\,,\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b) & = & \gamma_2\,,\end{array}\right.$$

  $\widetilde{p}(x), \widetilde{p}'(x), q(x), h(x)$ funciones continuas en $[a,b]$, $\widetilde{p}(x)>0\,,\ \forall x\in[a,b]$, $-\infty<a<b<\infty$, y $|\alpha_1|+|\alpha_2|\neq 0$, $|\beta_1|+|\beta_2|\neq 0$.

- Es un problema de contorno **singular** si no es regular.

* **Resúmenes / Capítulo 5 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

- **Ecuación en forma autoadjunta:**

$$(\widetilde{p}(x)y')'+q(x)y=h(x)$$

REDUCCION A FORMA AUTOADJUNTA:

$$a_0y''+a_1y'+a_2y=h \longrightarrow (py')'+qy=\tilde{h}$$

multimplicando por

$$r(x)=\frac{\exp(\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx)}{a_0(x)}\,,$$

$\widetilde{p}(x)=\exp\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx$, $q(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}\exp\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx$,
$\tilde{h}(x)=\frac{h(x)}{a_0(x)}\exp\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx$.

De manera general, el problema de contorno homogéneo asociado a (**PC**R) *o* (**PC**) *tiene especial interés:* la alternativa de Fredholm*!*

Se consideran $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ funciones continuas en [a,b], $-\infty<a<b<\infty$, y $|\alpha_1|+|\alpha_2|\neq 0$, $|\beta_1|+|\beta_2|\neq 0$.

$$(\mathrm{PC})\left\{\begin{array}{rcl} y''+p(x)y'+q(x)y & = & r(x)\,, \quad x\in(a,b),\\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a) & = & \gamma_1\,,\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b) & = & \gamma_2\,,\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{PCH})\left\{\begin{array}{rcl} y''+p(x)y'+q(x)y & = & 0\,, \quad x\in(a,b),\\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a) & = & 0\,,\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b) & = & 0\,.\end{array}\right.$$

Teorema 1 *El problema de contorno* (**PC**) *admite solución y ésta es única para cualesquiera valores de las constantes* γ_1,γ_2 *y de la función* $r(x)$ *si y sólo si el problema homogéneo asociado* (**PCH**) *admite sólo la solución trivial* $y\equiv 0$.

ED/GIC/UC/13-14

Definición: problemas de valores propios regulares

Encontrar los valores λ (*valores propios*) tales que existe una solución no nula $y(x)$ (*función propia*) de:

$$(\text{PVP})\left\{\begin{array}{rcll} (p(x)y')' + q(x)y + \lambda s(x)y & = & 0\,, & x \in (a,b), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) & = & 0\,, & \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) & = & 0\,, & \end{array}\right.$$

$p(x), p'(x), q(x), s(x)$ funciones continuas en $[a,b]$,
$s(x), p(x) > 0\,,\ \forall x \in [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$,
y $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

Teorema

1. *Existe una infinidad numerable de valores propios que convergen a infinito:*
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to \infty\,, k \to \infty.$$
2. *Para cada valor propio, λ_k, hay una única función propia asociada, $\phi_k(x)$, linealmente independiente.*
3. *Funciones propias asociadas a distintos valores propios son ortogonales entre sí en el intervalo (a,b), para el peso s; es decir:*
$$\int_a^b \phi_k(x)\phi_j(x)s(x)\,dx = \delta_{kj}Cte.\,, \forall k,j = 1,2,3,\cdots.$$
4. *Para cada función $f(x)$ continua a trozos en $[a,b]$ admite un* desarrollo en serie de Fourier de las funciones propias $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:
$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k(x)\,,$$
donde las constantes c_n son los llamados coeficientes de Fourier *y están dados por la fórmula:*
$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\phi_k(x)s(x)\,dx}{\int_a^b \phi_k(x)^2 s(x)\,dx}.$$
La convergencia de la serie en hacia la función f tiene lugar en el sentido de la media cuadrática*; es decir:*
$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k\phi_k(x)|^2 s(x)\,dx \to 0 \text{ cuando } N \to \infty\,.$$

Extensiones: sobre convergencia serie / sobre c.c. periódicas

Observación:

- Si las condiciones de contorno son periódicas ($y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$), se tienen los resultados del teorema: ahora para cada valor propio $\lambda_k > \lambda_1$ puede haber dos funciones propias linealmente independientes asociadas.

- El sumatorio del desarrollo en serie se extiende a todas las funciones propias.

Desarrollo clásico de Fourier en $[-\pi,\pi]$ en término de las funciones $\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$:

Dada $f(x)$ continua a trozos en el intervalo $[-\pi,\pi]$,

$$f(x) \approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)\,,$$

donde

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,, \qquad \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\,,$$

$\{1, \cos(kx), \sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$ son funciones propias del PVP:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + \lambda y & = & 0\,, \quad x \in (-\pi,\pi), \\ y(-\pi) = y(\pi) & , & y'(-\pi) = y'(\pi)\,. \end{array}\right.$$

$\phi_{0,0}(x) = 1$ asociada al valor propio $\lambda_0 = 0$

$\phi_{k,1}(x) = \cos(kx)$, $\phi_{k,2}(x) = \sin(kx)$ f.p. linealmente independientes asociadas al valor propio $\lambda_k = (k\pi)^2$.

Ortogonales!: para $k,j = 0,1,2\cdots$, $m,n = 0,1,2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_{k,m}(x)\phi_{j,n}(x)\,dx = 0, \qquad \text{si } (k,m) \neq (j,n)$$

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 7 - Tema 3: Sistemas de ED lineales

1. Resolver los siguientes sistemas lineales de coeficientes constantes, comprobando que las soluciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$.

$$a).\ \bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \bar{y}\,, \qquad b).\ \bar{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{y}\,, \qquad c).\ \bar{y}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \bar{y}\,,$$

2. Resolver los siguientes problemas de Cauchy:

$$a).\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 - 3y_2 + 3e^x \\ y_2' & = & 3y_1 + y_2 \\ y_1(0) & = & 1\,, y_2(0) = 1 \end{array} \right. \qquad b).\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 + 2y_2 + e^{-x} \\ y_2' & = & 2y_1 + y_2 + e^{-x} \\ y_1(0) & = & -\frac{1}{4}\,, y_2(0) = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$c).\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 3y_1 + 2y_2 + 3e^x \sin x \\ y_2' & = & -2y_1 - y_2 - e^x \sin x \\ y_1(0) & = 0 & , y_2(0) = 0 \end{array} \right. \qquad d).\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 4y_1 + 5y_2 + e^x \\ y_2' & = & -2y_1 - 2y_2 \\ y_1(0) & = & 3\ y_2(0) = -2 \end{array} \right.$$

3. Resolver los siguientes sistemas y problemas de Cauchy

$$a).\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_3 \\ y_2' & = & y_1 - 3y_3 \\ y_3' & = & y_2 + 3y_3\,, \end{array} \right. , \qquad b).\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 3y_1 - y_2 + y_3 + 1 \\ y_2' & = & 2y_1 - y_3 \\ y_3' & = & y_1 - y_2 + 2y_3 + x \end{array} \right.$$

$$c).\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & 2y_1 + y_3 \\ y_2' & = & y_1 + y_3 \\ y_3' & = & y_1 - 2y_2 \end{array} \right. \qquad d).\ \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_1 + y_3 \\ y_2' & = & 2y_2 \\ y_3' & = & y_1 + 5y_3 \\ y_1(0) & = & 1,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$e).\ \left\{ \begin{array}{rcl} z'' + z' + y' - 2y & = & 0 \\ z' - y' + z + x & = & 0 \end{array} \right. , \qquad f).\ \left\{ \begin{array}{rcl} y'' & = z & \\ z'' & = & 16y \\ y(0) = 1 & , & y'(0) = z(0) = z'(0) = 0, \end{array} \right.$$

4. Reducir el ejercicio $3 - f)$. a una ecuación diferencial y resolver. Deducir la solución del sistema comprobando que que se obtiene el mismo resultado.

5. Resolver los sistema de tipo Euler:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xy_1' & = & y_1 - y_2 + x^3 \\ xy_2' & = & -y_1 + y_2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} xy_1' & = & y_1 \\ xy_2' & = & y_1 + y_2\,. \end{array} \right.$$

SISTEMAS DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN CON n ECUACIONES y n INCÓGNITAS *

Sistema con n ecuaciones **en forma normal**:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ & \cdots & \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{array}\right.$$

x **variable independiente,**

$\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\}$ **funciones incógnita**

Reducción de una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}),$$

a un sistema: Hacer

$$y_1 = y,\ y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ & \cdots & \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n). \end{array}\right.$$

Si $f_i = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$ se tiene un **sistema diferencial lineal**:

$$(\text{SLNH}) \left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' & = & a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ & \cdots & \\ y_n' & = & a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x). \end{array}\right.$$

Un problema de Cauchy asociado: Resolver (**SLNH**) con los *datos iniciales* dados:

$$(\text{DI}) \qquad y_1(x_0) = y_0^1,\ y_2(x_0) = y_0^2, \cdots, y_n(x_0) = y_0^n.$$

Teorema 1 *Cuando todas las funciones a_{ij}, b_j, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, de (**SLNH**) son continuas en el intervalo (α, β), $x_0 \in (\alpha, \beta)$, y, $(y_0^1, y_0^2, \cdots, y_0^n)$ es cualquier punto de $\mathbf{R}^n$, entonces, existe una única solución de (**SLNH**)-(**DI**) definida en (α, β).*

* **Resúmenes / Capítulo 3 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

Sistemas diferenciales lineales con n ecuaciones.

Sistema no homogéneo:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x) \qquad\qquad (\text{SLNH})$$

en notación vectorial, donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$\bar{y}, \bar{b}$ son los vectores columna:

$\bar{y}(x) = (y^1(x), y^2(x), \cdots, y^n(x))^T$, y $\bar{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \cdots, b_n(x))^T$,

$$a_{i,j},\ b_j : I = (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbf{R} \text{ funciones continuas}$$

Problema de Cauchy: dados $x_0 \in I$, $\bar{y}_0 \in \mathbf{R}^n$.

$$(PC) \left\{\begin{array}{rcl} \bar{y}' & = & A(x)\bar{y} + \bar{b}(x), \\ \bar{y}(x_0) & = & \bar{y}_0, \end{array}\right.$$

Solución general de (**SLNH**):

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_{GH}(x) + \bar{y}_p(x),$$

$\bar{y}_p(x)$ es una solución particular de (**SLNH**)
$\bar{y}_{GH}(x)$ es la solución general del **sistema homogéneo** asociado:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} \qquad\qquad (\text{SLH})$$

Si $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n\}$ son n soluciones de (**SLH**), se denomina **matriz solución** del sistema homogéneo:

$$\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)).$$

Se verifica: $\quad \Phi'(x) = A(x).\Phi(x)$

$\Phi(x)$ es una **matriz fundamental** de (**SLH**) si $det(\Phi(x)) \neq 0$

El **Wronskiano** de $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)$ es la función:

$$W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x) = |\Phi(x)| = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & y_2^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ y_1^2(x) & y_2^2(x) & \cdots & y_n^2(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^n(x) & y_2^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{vmatrix}$$

Sistema homogéneo con coeficientes constantes.

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

donde A es una matriz constante $n \times n$

Se busca $\bar{y} = e^{\lambda x}\bar{c} \Rightarrow \lambda$ debe ser un valor propio de A $\bar{c}$ un vector propio asociado.

$$|A - \lambda I| = 0, \qquad (A - \lambda I)\bar{c} = 0$$

Posibilidades para $n = 2$:

1. Hay dos valores propios reales distintos λ_1, λ_2.

   $\bar{c}_i$ un vector propio asociado a λ_i, $i = 1, 2$- El conjunto fundamental de soluciones:

   $$\{e^{\lambda_1 x}\bar{c}_1, e^{\lambda_2 x}\bar{c}_2\}$$

2. Hay un valor propio de A real, $\lambda_1 = \lambda_2$.

   Si hay dos vectores propios lineal. independ., $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$, asociados a λ_1, el conjunto fundamental de soluciones:

   $$\{e^{\lambda_1 x}\bar{c}_1, e^{\lambda_1 x}\bar{c}_2\}$$

   Si sólo hay un vector propio, $\bar{c}_1$, una solución es $e^{\lambda_1 x}\bar{c}_1$. Se busca la otra lineal. indep. de la forma

   $$\bar{y}_2 = (\bar{a}_1 x + \bar{a}_2)e^{\lambda_1 x} \quad \Rightarrow$$

   $$(A - \lambda_1 \mathcal{I})\bar{a}_1 = 0 \quad \text{y} \quad (A - \lambda_1 \mathcal{I})\bar{a}_2 = \bar{a}_1.$$

   El conjunto fundamental de soluciones:

   $$\{\bar{c}_1 e^{\lambda_1 x}, (\bar{a}_1 x + \bar{a}_2)e^{\lambda_1 x}\}$$

3. Los valores propios de A son complejos conjugados.

   Sea $\bar{c}$ el vector propio asociado a uno de ellos λ. Conjunto fundamental de soluciones:

   $$\{Re(e^{\lambda x}\bar{c}), Im(e^{\lambda x}\bar{c})\}.$$

▶ Sistema homogéneo con coeficientes constantes

$$\bar{y}' = A\bar{y}, \qquad An \times n, \qquad \geq 2$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz A en el cuerpo de los complejos.

Posibilidades:

1. Se trata de n valores propios reales distintos. Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, sea $\bar{c}_i$ el vector propio asociado a λ_i. El **conjunto fundamental de soluciones**:

   $$\{e^{\lambda_1 x}\bar{c}_1, e^{\lambda_2 x}\bar{c}_2, \cdots, e^{\lambda_n x}\bar{c}_n\}.$$

2. Hay algún valor propio complejo λ_i simple. Entonces su conjugado $\bar{\lambda}_i$ también es valor propio y los vectores propios asociados son conjugados uno del otro. Para este valor propio hay dos soluciones reales linealmente independientes asociadas:

   $$\{Re(e^{\lambda_i x}\bar{c}_i), Im(e^{\lambda_i x}\bar{c}_i)\}$$

3. Hay un valor propio λ_i real o complejo de multiplicidad k. Supongamos primero que es real y que *hay l vectores propios linealmente independientes con $l \leq k$.* $\bar{c}_{i_1}, \bar{c}_{i_2}, \cdots, \bar{c}_{i_l}$. Entonces,

   $$\{e^{\lambda_i x}\bar{c}_{i_1}, e^{\lambda_i x}\bar{c}_{i_2}, \cdots, e^{\lambda_i x}\bar{c}_{i_l}\}$$

   son k soluciones linealmente independientes asociadas a λ_i. Si $k = l$, éstas son todas las que buscamos.

   Si $l < k$, obtenemos las $k - l$ soluciones restantes linealmente independientes buscando soluciones de la forma:

   $$(\bar{a}_1 x + \bar{a}_2)e^{\lambda_i x}, \ (\bar{d}_0 x^2 + \bar{d}_1 x + \bar{d}_2)e^{\lambda_i x}, \cdots,$$

   $$(\bar{f}_0 x^{k-l-1} + \cdots + \bar{f}_{k-l-1}x + \bar{f}_{k-l})e^{\lambda_i x}$$

4. En el caso de que λ_i sea complejo de multiplicidad $k > 1$, se procede como en 2 y 3

▶ Sistemas homogéneos de tipo Euler: $x\bar{y}' = A\bar{y}$

Hacer $x = e^t$ para $x > 0 \rightarrow$ coeficientes ctes. $\dfrac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$

Definición: k funciones vectoriales $\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \cdots, \bar{\varphi}_k(x)$ son **linealmente independientes** en el intervalo $I = (\alpha, \beta)$ cuando

$$\alpha_1\bar{\varphi}_1(x) + \alpha_2\bar{\varphi}_2(x) + \cdots + \alpha_k\bar{\varphi}_k(x) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE $\bar{y}' = A(x)\bar{y}$:

1. Si $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_k(x)$ son soluciones de (**SLH**) en I, entonces cualquier combinación lineal de ellas $\alpha_1\bar{y}_1(x) + \alpha_2\bar{y}_2(x) + \cdots + \alpha_k\bar{y}_k(x)$ es también solución de (**SLH**) en I.

2. n soluciones $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)$ de (**SLH**) son linealmente independientes en I si y sólo si para cualquier punto $x_0 \in I$ se verifica $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x_0) \neq 0$.

3. n soluciones $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)$ de (**SLH**) son linealmente independientes en I si y sólo si para cualquier punto $x_0 \in I$, los vectores $\bar{y}_1(x_0), \bar{y}_2(x_0), \cdots, \bar{y}_n(x_0)$ son linealmente independientes en $\mathbf{R}^n$.

4. Dadas n soluciones $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)$ de (**SLH**) linealmente independientes en I, cualquier otra solución $\bar{y}(x)$ es:

$$\bar{y}(x) = \alpha_1\bar{y}_1(x) + \alpha_2\bar{y}_2(x) + \cdots + \alpha_n\bar{y}_n(x), \ \forall x \in I,$$

para algunas constantes α_i.

$\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n\}$ son un **conjunto fundamental de soluciones de (SLH) en** I.

$\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x))$ es una **matriz fundamental** de (**SLH**), y $\bar{y}(x) = \Phi(x)\bar{\alpha}$, donde $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)^T$

5. **Identidad de Abel**: dado un punto cualquiera $x_0 \in I$, y n soluciones de (**SLH**), se verica

$$W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x) = e^{\int_{x_0}^{x} Traza(A(s))ds} W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x_0)$$

6. Sean $\{\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x)\}$ n soluciones de (**SLH**) en I, son linealmente independientes si y sólo si $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x) \neq 0, \forall x \in I$ (evidentemente, basta con comprobar que el Wronskiano es no nulo en un punto fijo cualquiera x_0 de I).

7. Hay n soluciones linealmente independientes de (**SLH**) y no más: $\exists$ n vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^n$.

SOLUCION DEL SISTEMA NO HOMOGENEO:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} + \bar{b}(x) \quad \textbf{(SLNH)}$$

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} \quad \textbf{(SLH)}$$

Si se conocen n soluciones de (**SLH**), $\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n\}$, linealmente independientes en I ($\Leftrightarrow W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x) \neq 0, \forall x \in I \Leftrightarrow \exists x_0 \in I / W[\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n](x_0) \neq 0$) la solución geneneral de (**SLNH**) es:

$$\bar{y}_{GNH}(x) = \alpha_1\bar{y}_1(x) + \alpha_2\bar{y}_2(x) + \cdots + \alpha_n\bar{y}_n(x) + \bar{y}_p(x),$$

donde los α_i son constantes y $\bar{y}_p(x)$ es una solución particular de (**SLNH**).

En notación vectorial: $\Phi(x) = (\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \cdots, \bar{y}_n(x))$ es la matriz fundamental de (**SLH**), y la solución general del sistema (**SLH**):

$$\bar{y}_{GH}(x) = \Phi(x).\bar{k} \quad \text{con } \bar{k} \text{ vector constante.}$$

La solución general del sistema (**SLNH**):

$$\bar{y}_{GNH}(x) = \Phi(x).\bar{k} + \bar{y}_p(x)$$

BÚSQUEDA de SOLUCIÓN PARTICULAR de (**SLNH**) $\bar{y}_p(x)$, por el **método de variación de parámetros**:

$$\bar{y}_p(x) = \Phi(x).\bar{c}(x) = c_1(x)\bar{y}_1(x) + c_2(x)\bar{y}_2(x) + \cdots + c_n(x)\bar{y}_n(x),$$

donde $\bar{c}(x) = (c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x))^T$.

$\bar{c}(x)$ se determina derivando y substituyendo en (**SLNH**)

$$\Phi(x).\bar{c}'(x) = \bar{b}(x).$$

$$\bar{y}_p(x) = \Phi(x). \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx,$$

y la solución general del sistema (**SLNH**) es

$$\bar{y}_{GNH}(x) = \Phi(x).(\bar{k} + \int \Phi(x)^{-1}.\bar{b}(x)dx).$$

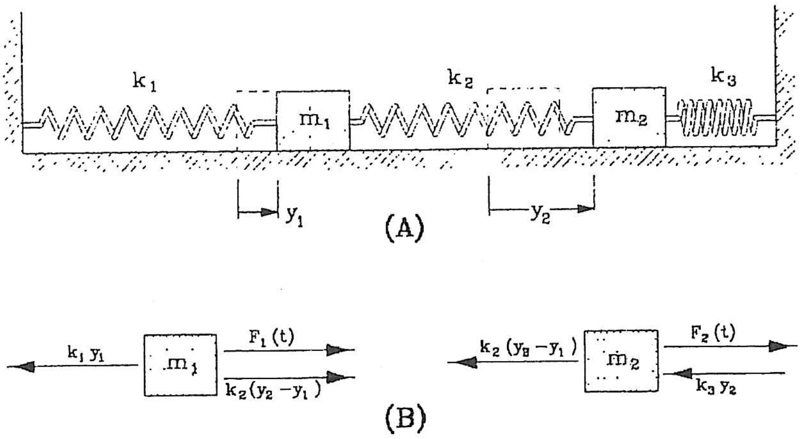


Figura 39 *Movimiento del sistema masas-resortes acoplados.*

Si denotamos por $y_1(t)$ el desplazamiento del primer bloque y por $y_2(t)$ el del segundo (ver figura 39), observamos que, sobre el primer cuerpo, las fuerzas que actuan son la fuerza de recuperación del primer muelle, $-k_1y_1$, la fuerza de recuperación del segundo $k_2(y_2-y_1)$ y $F_1(t)$. Sobre el segundo cuerpo actuan la fuerza de recuperación del segundo muelle $-k_2(y_2-y_1)$, $F_2(t)$, y la fuerza de recuperación del tercer muelle $-k_3y_2$. Así las ecuaciones buscadas son:

$$m_1y_1'' = k_2(y_2 - y_1) - k_1y_1 + F_1(t)$$

$$m_2y_2'' = -k_3y_2 - k_2(y_2 - y_1) + F_2(t)$$

y sacando factor común a y_1 e y_2 en el lado derecho de la ecuación, y haciendo los cambios $z_1 = y_1, z_2 = y_1', z_3 = y_2, z_4 = y_2'$, tenemos un sistema del tipo (3.3) con cuatro ecuaciones y coeficientes constantes:

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = -\frac{k_2 + k_1}{m_1}z_1 + \frac{k_2}{m_1}z_3 + \frac{F_1(t)}{m_1}$$

$$z_3' = z_4$$

$$z_4' = \frac{k_2}{m_2}z_1 - \frac{k_2 + k_3}{m_2}z_3 + \frac{F_2(t)}{m_2}.$$

□

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
CON 2 VARIABLES INDEPENDIENTES *

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0$$

x, t **variables independientes;**

$u(x,t)$ **función incógnita** $(t \equiv y)$

▶ **EDP de primer orden**

$$u_t - cu_x = 0\,, \qquad u(x,0) = f(x)$$

Soluciones: *ondas* $u(x,t) = f(x+ct)$

▶ **EDP de segundo orden**

Ecuación de ondas: $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x)$

Ecuación del calor: $u_t - a^2 u_{xx} = f(t,x)$

Ecuación de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$

SOLUCIÓN: Buscar u(x,t) que admita derivadas parciales segundas "verificando la ecuación"

SEPARACIÓN DE VARIABLES:

Buscar u(x,t)=X(x).T(t) y llegar a una ecuación diferencial ordinaria en la variable independiente x y otra en la variable independiente t

En general, nos lleva al cálculo de valores propios y funciones propias para problemas de contorno en EDO, y a los desarrollos en serie de Fourier de funciones

* **Resúmenes / Capítulo 6 / Ecuaciones Diferenciales!?. Una introducción. UC, Mª Eugenia Pérez Martínez**

Ejemplos

- Propagación de ondas en una cuerda, de logitud infinita, (*problema de Cauchy / valores iniciales*)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & x \in (-\infty,\infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x)\,, & u_t(x,0) = 0\,,\ x \in (-\infty,\infty)\,. \end{cases}$$

$u(x,t) = \sin(x)\cos(t)$

- Propagación del calor en una barra conductora de longitud infinita, (*problema de Cauchy*)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,, & x \in (-\infty,\infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) = \cos(x), & x \in (-\infty,\infty)\,. \end{cases}$$

$u(x,t) = e^{-t}\cos(x)$

- Modelo de calor estacionario:*problema de contorno*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{en} \quad x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) = 1, & \text{en} \quad x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

$u(x,y) = 1$

- Modelo de vibraciones de una viga, con extremos simplemente soportados (*problema mixto*)

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0\,, x \in (0,\pi), t > 0\,, \\ u(x,0) = \sin 2x\,,\ x \in [0,\pi]\,, \\ u_t(x,0) = 3\sin 2x\,,\ x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, t \geq 0\,, \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0\,, t \geq 0\,. \end{cases}$$

$u(x,t) = \sin(2x)(\cos(4t) + \frac{3}{4}\sin(4t))$

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14
Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES
HOJA 1 - Preliminares / EDO con MATLAB

1. Operaciones con variables simbólicas y numéricas: analizar el área de trabajo (*workspace*) en MATLAB

2. Definir una función de una variable independiente, por ejemplo $h(t) = 2\sin(t)+t^2+e^{-t}$

3. Calcular las derivadas sucesivas de h: h', h'',... (*diff*).

4. Calcular las integrales $\int h(t)dt$, $\int_0^2 h(t)dt$ y el valor numérico de esta integral (*int*, *double*, *format*...).

5. Evaluar las funciones $\sin(t)$ y $h(t)$ en $t = 2$.

6. Hacer la gráfica de la función $h(t)$ en el intervalo $[0, 2]$. Usar los comandos *ezplot* y *plot* y comparar las gráficas (*hold on / hold off*). Repetir cambiando de intervalo.

7. Definir una función de dos variables independientes t, x: e.g., $u(t, x) = \sin(x)\cos(t)+t^2$. Calcular distintas derivadas parciales de u, integrales dobles, integrales definidas,... Evaluar u en distintos puntos.

8. Hacer la gráfica de la superficie $z = u(t, x)$ para $(t, x) \in [0, 3] \times [0, 1]$. Dibujar distintas curvas de nivel, cortes por planos t (o x) constante , ...(*ezsurf / ezplot*).

9. Resolver una ecuación diferencial de primer orden: por ejemplo, la ecuación lineal $y' = t + y$, siendo t variable independiente (*dsolve*)

10. Resolver un problema de Cacuchy asociado: por ejemplo, $y' = t + y$, $y(0) = 1$. Hacer una gráfica de la solución en distintos intervalos.

11. Resolver la ecuación de Riccati
$$y' = -\frac{y}{t} + y^2 - \frac{1}{t^2},$$
y los distintos problemas de Cauchy asociados con las condiciones inciales $y(2) = 1$, $y(1) = 1$ (dibujar las soluciones).

12. Resolver (aplicar cambios de variable y/o fórmulas integrales si se necesita, y comprobar si la solución obtenida verifica la ecuación diferencial):
$$y' = \frac{t+y}{t-y} \quad , \quad y' = \frac{t-y}{t+y}$$

13. Utilizando MATLAB, resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del libro de apuntes (o de las hojas de problemas de clase). Verificar si son soluciones y comparar con la solución obtenida en clase y/o utilizando las fórmulas integrales. Dibujar algunas soluciones.

Prácticas con MATLAB: algunos comandos útiles

- Variables numéricas y simbólicas: *syms / ans*.
- Comandos útiles: *diary, help, help elfun, dir, type, delete, who, load, save, clear, ;, pretty, simplify, simple, vpa, format long,....*
- Gráficos: *plot, ezplot, hold on, hold off, surf, ezsuf,...*
- Resolución explícita de ecuaciones diferenciales (cálculo simbólico): *int, diff, dsolve, subs, double, solve, taylor,...*
- Campos de direcciones *dfield*5–*dfield*8 ;
- Funciones MATLAB / Ficheros *M-files*
- Resolución numérica de ecuaciones diferenciales: *eul, rk2, rk4, ode45, ode23,.../ ffinitge, bvp4c,...*
- Vectores y matrices: *eye, ones, zeros, diag, inv, det, eig,...*
  Resolución de sistemas: $c = A\backslash b$ (Ac=b)
- Sobre transformada de Laplace: *laplace*(f), *ilaplace*(F), *laplace*(*sym*(1)), *laplace*(*heaviside*(t)), *laplace*(*dirac*(t))

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 2 - Campos de direccciones asociados a EDO

1.- Utilizando MATLAB (*dfield*), dibujar los campos de direcciones asociados a las ecuaciones cuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del libro de apuntes (o de las hojas de problemas de clase). En particular, dibujar los campos de direcciones asocidados a las siguientes ecuaciones:

1. La ecuación de Riccati: $y' = y^2 - t$

   Utilizar el comando *ezplot* para dibujar curvas isoclinas para distintas pendientes, e.g., pendiente 0, ± 1, ± 2,

   Dar un punto y dibujar la solución pasando por él en un intervalo. Elegir los distintos métodos numéricos que permite el entorno, variando tamaños de paso e intervalos de aproximación.

2. La ecuación lineal $y' = -y + 3 + \cos(t)$, para $(t, y) \in [-2, 14] \times [-2, 6]$.

   Calcular con *dsolve* y dibujar con *ezplot* la curva hacia la que tienden asintóticamente todas las soluciones cuando $t \to \infty$

3. La ecuación homogénea $y' = \dfrac{y+t}{t-y}$. Considerar $y, t \in [-4, 4]$

   Dibujar la solución del problema de Cauchy : $y' = (t+y)/(t-y), \quad y(-2) = 0$, en [-2.5, -1.5]. Ampliar el intervalo.

4. La ecuación de Bernouilli $y' = y(1 - y^2)$ para $y \in [0, 0.1]$ y $t \in [0, 2]$.

   En particular dibujar y comparar las soluciones pasando por (0, 0.01), (0, 0.001). .

5. La ecuación de variables separadas $y' = -\frac{y}{\sin(t)}$. Considerar $(t, y) \in [-2\pi, 2\pi] \times [-4, 4]$.

   Dibujar las isoclinas para las pendientes $k = 0,\ -2,\ 1/2,\ \infty$.

   Encontrar los puntos del plano donde el campo de direcciones no está definido.

Interpretar los resultados obtenidos.

2.- Dibujar el campo de direcciones asociados a los modelos de Malthus y Verhulst para crecimiento de poblaciones:

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N$$

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)$$

(ver sección 1.6.1 del libro de apuntes). Tomar $t \in [0, 10]$, $N \in [0, 6]$, y los distintos valores de las constantes $N_\infty = 2$, $\gamma = \pm 0.3$. Interpretar los resultados en términos del comportamiento de la población.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 3 - Resolución numérica de EDO

1. Considerar el problema de Cauchy

$$y' = t + y, \quad y(0) = 1,$$

Comparar la solución exacta con la aproximada obtenida por el método de Euler para distintos tamaños del paso h.

Repetir con los métodos de Euler mejorado y Runge-Kutta.

Comparar la solución con la obtenida utilizando la función MATLAB *ode*45

2. Considerar el problema de Cauchy :

$$y' = x^2 + y^2 , \quad y(0) = 1$$

Comprobar usando *dfield* que la solución no está definida en $[0, 1]$ (ver ejemplo 13 de la sección 1.7 del libro de apuntes; ver también el ejercicio 10 de la sección 1.7)

Aplicar el método de Runge-Kutta, para distintos tamaños del paso, viendo como la solución crece muy deprisa en el intervalo $[0.9, 1]$. Hacer gráficas de las soluciones.

Establecer un control de paso que nos permita tomar h tal que $y(0.9) \approx 14.27$.

Considerar el problema de Cauchy: $y' = x^2 + y^2$, $\quad y(0.9) = 14.27$. Aplicar el método de Runge-Kutta para distintos tamaños del pasos en $[0.9, 1]$. Tomar, e.g., $h = 0.001$

Utilizando las soluciones numéricas de los apartados anteriores, dibujar la aproximación de la solución de $y' = x^2 + y^2$, $\quad y(0) = 1$, en $[0, 0.96]$.

Utilizar la funcionón MATLAB *ode*45, para resolver numericamente.

3. Resolver explícita o numericamente los problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= x + y - 3 \\ y(0) &= 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' &= x + y - 3 \\ y(0) &= 2.001, \end{cases}$$

Comparar las soluciones mediante una gráfica en los intervalos [0,5], [0,10], [0,100]. Comparar las soluciones en $x = 1$ y en $x = \log 10^6$.

4. Para otros errores que pueden aparecer con los métodos numéricos, como son los de redondeo, o los de propagación de los errores en los datos de un problema ver, por ejemplo, ejercicios 1 y 12 de las secciones 1.6 y 1.7 respectivamente del libro de apuntes

5. Utilizar una función MATLAB para resolver numericamente, en el intervalo $[0.5, 1.5]$ los problemas de Cauchy:

$y' = y^2 - x^2$, $y(1) = 1.1$, / $\quad y' = ye^{-x^2}$, $y(1.1) = 1$, / $\quad y' = -y + 3\cos(x)$, $y(1) = 1$

Cambiar de condición inicial, intervalo, método y ecuación.

EXAMEN PARCIAL DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.
21 DE NOVIEMBRE DE 2013

Apellidos y nombre:..
DNI:..
Número de orden:..

Instrucciones y comentarios:

1. No se permite el uso de calculadora, libros y/o apuntes de ningún tipo.
2. Se ha de contestar en las hojas de enunciados (sólo se recogerán esas hojas).

Contestar brevemente donde se pide y escribir resolución y razonamiento en hojas grapadas

EJERCICIO 3 **(10 ptos.)**
3.1.- Resolver el problema de Cauchy

$$y' - 2y = -2x, \quad y(0) = 1$$

indicando el intervalo de definición de la solución.

SOLUCIÓN e INTERVALO:

3.2.- Resolver la ecuación diferencial $y' + y = xy^3$

SOLUCION GENERAL:

3.3.- Encontrar la solución o soluciones explícitas de la ED 3.2 que verifiquen $y(0) = 1$ e $y(0) = 0$. Razonar la respuesta.

SOLUCIONES de $y' + y = xy^3, \quad y(0) = 1$
e INTERVALO:

SOLUCIONES de $y' + y = xy^3, \quad y(0) = 0$
e INTERVALO:

3.4.- Encontrar las curvas donde las soluciones de la ED 3.2, $y' + y = xy^3$, pueden cambiar el crecimiento (curvas isoclinas para la pendiente 0), y dibujar la región del plano donde las curvas son crecientes.

CURVAS:

NOMBRE.. Número.........

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2012/13

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES
Interrogación de Prácticas II

Observaciones:
- Al final de la sesión guardar el diario.
- PONER valores numéricos de referencias en los ejes de las gráficas que se pidan.
- USAR format short
- Escribir un resumen de los comandos utilizados

1.-Se considera un problema que sirve de modelo para describir las deformaciones de una viga situada en el eje de las x con extremos fijos

$$y'' = f(x), \quad x \in (0,3)$$

$$y(0) = 0, \quad y(3) = 0$$

donde $f(x) = 2x$ si $x \in [0,1]$, $f(x) = 3 - x$ si $x \in [1,3]$. Demostrar que tiene solución única y resolver. (Una idea es: escribir f(x) en términos de la función escalón o Heaviside).

SOLUCION para $x < 1$

SOLUCION en $x = 2$

SOLUCIÓN:

UNICIDAD DE SOLUCION / RAZONAMIENTOS / COMANDOS

2). Utilizar $rk4$ para encontrar la aproximación de la solución del problema de Cauchy en $x = 0.5$. Tomar el tamaño del paso $h = 0.1$. Repetir con $ode45$

$$\begin{aligned} y_1' &= ty_1 + y_2 + 1 \\ y_2' &= y_1 + ty_2 + \sin(t) \\ y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

$y_1(0.5) \approx$ .... $y_2(0.5) \approx$ ....con $rk4$

$y_1(0.5) \approx$ .... $y_2(0.5) \approx$ ....con $ode45$

RAZONAMIENTOS, FICHEROS

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 4 - Resolución numérica de EDO y sistemas

1. Resolver numéricamente el problema de Cauchy
$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$
en el intervalo $[0, 1/2]$, utilizando las funciones MATLAB eul, $rk2$ y $rk4$, para distintos tamaños de paso $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.001$.

   Utilizar también $ode45$ y comparar las distintas aproximaciones con la solución exacta mediante gráficas. Comparar valores en $x = 1/2$. (solución exacta: $y = 1/(1-x)$, ver ejemplo 21, Sección 2.1 del libro de apuntes).

2. Resolver numéricamente el problema de Cauchy relativo a la ecuación del péndulo
$$y'' + sin(y) = 0,$$
con condiciones inciales $y(0) = 0, y'(0) = 0.2$. Utilizar $ode45$ y el intervalo $[0, 6\pi]$.

   Comparar la solución con con la del problema de Cauchy para la ecuación linealizada:
$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.2$$

3. Se considera el problema de valor inicial
$$y'' - x^2 y = e^x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = \beta$$
Tomando los distintos valores de $\beta = \pm 1$, ± 0.5, ± 0.25, aproximar numéricamente la solución en [0,1] (utilizar $ode45$.)

   Indicar qué valor de β es el mejor para aproximar la solución del problema de contorno
$$y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$
Intentar mejorar β, y escribir el valor aproximado de la solución obtenida en $x = 1$.

   Utilizar *dsolve* para comprobar que el problema de contorno dado tiene solución única.

4. Usando la técnica del ejercicio anterior resolver
$$y'' - y = x^2, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$
Empezar con valores de $\beta = \pm 0.1$. Comparar con la solución exacta.

5. Utilizar un método en diferencias finitas de orden 2 para resolver los dos ejercicios anteriores. Comparar solución exacta y soluciones aproximadas, para distintos tamaños de paso h, para la ecuación $y'' - y = x^2$.

   Considerar otras ecuaciones y otras condiciones de contorno.

6. Encontrar la solución exacta y numérica de un problema de Cauchy para uno de los sistemas diferenciales resueltos en clase, comparando soluciones.

2^0 Curso - Grado I. CIVIL - Curso 2013/14

Ampliación de Matemáticas: ECUACIONES DIFERENCIALES

HOJA 5 - Modelos Matemáticos y T. de Laplace

1.- Estudiar el comportamiento de las vibraciones del modelo de resorte lineal

$$my'' + ky' + cy = p(t)$$

dependiendo de la relación entre las constantes masa m, recuperación c y amortiguación k (ver sección 2.5 del libro de apuntes).

Tomando $p(t) = 0$, y las ecuaciones

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y'' + 4y = 0$$

hacer una gráfica de las soluciones para distintas condiciones iniciales indicando cuándo el movimiento es débilmente amortiguado, fuertemente amortiguado o periódico.

En ausencia de amortiguación, comparar los distintos comportamientos para distintas fuerzas actuando sobre el sistema resorte-masa: e.g., tomar $k = 0$, $m = 1$, $c = 4$, $p(t) = cos(t)$ y $p(t) = cos(2t)$

2.- Utilizar la transformada de Laplace para resolver los problemas que se enuncian a continuación. Si se pueden resolver con el comando *dsolve*, comprobar que la solución que se obtiene es la misma. Hacer una gráfica de la solución en un intervalo que contenga puntos de discontinuidad de los datos.

1. $y' - y = 1, \qquad y(0) = A$, siendo A una constante
2. $y'' - 3y' + 2y = 4te^{3t}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
3. $y'' + 2y' + 2y = 3\delta(t - pi), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

   (ver ejercicio 7 de la sección 2.7 del libro de apuntes, relativo a modelos de resortes o circuitos)
4. $y'' + y = -u(t) + u(t-1), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

   (ver ejercicio 16, sección 7.2 del libro de apuntes, relativo a modelos de resortes lineales)
5. $$y^{iv} = \delta(x-1), \quad x \in (0,2)$$
   $$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(2) = y'''(2) = 0$$

   (problema de contorno relativo a un modelo de vigas; ver sección 2.7 del libro de apuntes).
6. $$\begin{cases} y + z' &= e^{-t} \\ 3y + y' &= z - 3z' \\ y(0) = 1 \quad , & z(0) = 1. \end{cases}$$

   (Problema de Cauchy para un sistema diferencial lineal de primer orden; ver ejercicio 10-a de la sección 2.7 del libro de apuntes)