Lecturas de Cálculo Integral y Series de Fourier
Ampliación de Matemáticas
Grado en Ingeniería Civil
Curso 2012-13

Septiembre 2012

Contenidos:

Cálculo Integral en una variable real

Conceptos ya vistos en la asignatura "Cálculo"

Definición

Dada $f(x)$ se llama primitiva (o antiderivada) de $f(x)$ en un intervalo I a toda función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ en I (salvo quizás en un número finito de puntos de I).

Definición

Si F es una primitiva de f, escribiremos

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,.$$

Cómo cálcular primitivas: ver, por ejemplo,

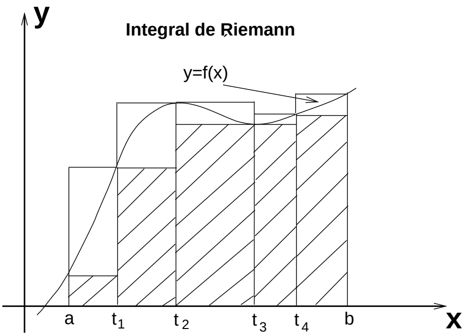
http://personales.unican.es/gila/primitivas.pdf
o también

http://personales.unican.es/gila/primitivasC2011.pdf

Cálculo Integral en una variable real

Conceptos ya vistos en la asignatura "Cálculo"

Integral de Riemann $\Rightarrow$ Motivada por el problema del cálculo del área del recinto determinado por la gráfica de una función $f(x)$ y el eje X:



Cálculo Integral en una variable real

Conceptos ya vistos en la asignatura "Cálculo"

Detalles sobre el concepto de integral de Riemann en una variable y aplicaciones:

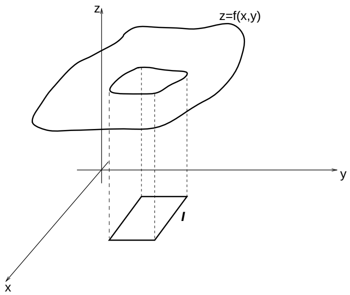
Contenidos ya desarrollados en

http://personales.unican.es/gila/Riemann1V2011.pdf

Cálculo Integral en más de una variable real

Integral de Riemann en dos variables

Extensión del correspondiente concepto de una variable: si $f(x, y)$ es una función continua y positiva en un rectángulo I de $\mathbb{R}^2$, la integral de f sobre este rectángulo es el volumen entre la gráfica de la función y el plano XY, dentro del rectángulo I:



Cálculo Integral en más de una variable real

Definición

Llamaremos *rectángulo* (I) de $\mathbb{R}^2$ a todo conjunto de la forma:

$$I = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d\}.$$

Cálculo Integral en más de una variable real

¿Cómo calcular integrales dobles sobre rectángulos?: Teorema de Fubini

Si $f : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable Riemann en I tal que para cualquier $x \in [a, b]$ (salvo a lo sumo un número finito de valores) la función $f_x : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_x(y) := f(x, y)$ es integrable Riemann en $[c, d]$, entonces la función $\int_c^d f_x(y)dy$ es integrable Riemann en $[a, b]$ y, además,

$$\int\int_I f = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)dy \right) dx \,.$$

De forma, similar, si $f_y(x) := f(x, y)$ resulta ser continua para cualquier $y \in [c, d]$ salvo un número finito de valores, entonces:

$$\int\int_I f = \int_c^d \left(\int_a^b f_y(x)dx \right) dy \,.$$

Cálculo Integral en más de una variable real

¿Cómo calcular integrales dobles de una función f sobre dominios más generales (D) de $\mathbb{R}^2$?:

Idea teórica: **a)** incluir D dentro de un rectángulo I de $\mathbb{R}^2$; **b)** extender la definición de la función f a I, asignando el valor 0 en aquellos puntos de I no incluidos en D; **c)** aplicar el Teorema de Fubini.

En la práctica: expresar una de las variables (x o y) que determinan el dominio D como función de la otra (y o x) e integrar respecto a esa variable. Posteriormente integrar la otra variable.

Mejor trabajemos con un ejemplo ...

Cálculo Integral en más de una variable real

Un primer ejemplo

Comentario previo: de acuerdo con lo discutido, el área de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ ($\mu(D)$) delimitado por una curva cerrada vendrá dada por:

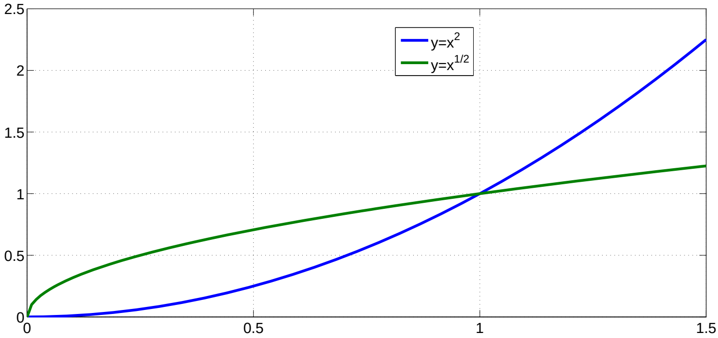
$$\mu(D) = \int\int_D 1 \, .$$

Ejemplo: Hallar el área de la superficie comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.
Este ejemplo se debería saber resolver con técnicas de integración en una variable (**hacer!**).

Las curvas se cortan en $(0, 0)$ y $(1, 1)$, como se muestra en la siguiente figura

Cálculo Integral en más de una variable real

Un primer ejemplo



Cálculo Integral en más de una variable real

Un primer ejemplo

El dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ se expresa como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ x^2 < y < \sqrt{x}\},$$

de modo que

$$\mu(D) = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \right) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx.$$

La última igualdad es lo que habríamos escrito, directamente, si hubiésemos razonado en términos de funciones de una sola variable. **El resultado de la última integral es $1/3$, que es el valor del área pedida.**

Cálculo Integral en más de una variable real
Cambio de variables

Idea básica: en ocasiones, la utilización de variables apropiadas en lugar de las originales, nos ayuda a simplificar la región de integración y/o el integrando (como ocurre con la integración en una variable).

Teorema del cambio de variable (Integrales Dobles)
Sean $D, E \subset \mathbb{R}^2$, y sea $T : E \longrightarrow D$ una aplicación biyectiva dada por $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Sea J el jacobiano de este cambio de variable; es decir,

$$J = det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)$$

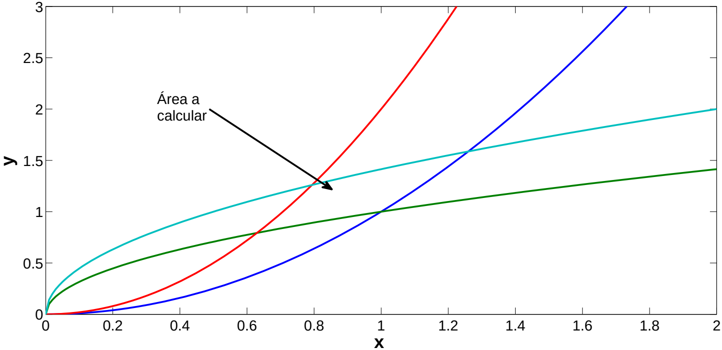
Supongamos, además, que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable. Entonces,

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_E f(x(u, v), y(u, v))\cdot \mid J \mid du\, dv\,.$$

Cálculo Integral en más de una variable real

Cambio de variables (Ejemplo 1)

Ejemplo 1: **Calcular** $\int\int_D dxdy$ **siendo** D **la región del plano limitada por las cuatro curvas;** $y = x^2$, $x = y^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2/2$.



Cálculo Integral en más de una variable real

Cambio de variables (Ejemplo 1)

Este problema se puede resolver: **a)** con técnicas de integración en una variable (hacer!); **b)** aplicando técnicas de dos variables en las variables originales (hacer!); **c)** considerando un cambio de variables. Por ejemplo:

$$u = x^2/y \ , \ v = y^2/x$$

Si nos restrigimos al primer cuadrante, donde se encuentra D, **estas ecuaciones efectivamente definen un cambio de variables** (aplicación biyectiva).

Los límites de la región D (cada una de las curvas), se corresponden con $u = 1$ ($y = x^2$), $u = 1/2$ ($y = 2x^2$), $v = 1$ ($x = y^2$) y $v = 2$ ($x = 2y^2$).

Es decir, conseguimos transformar el dominio original en un rectángulo.

Cálculo Integral en más de una variable real

Cambio de variables (Ejemplo 1)

$$\int\int_D dxdy = \int\int_{D'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

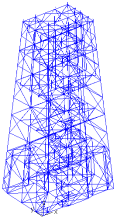
siendo $D' = \{(u,v)\,|\,1/2 \leq u \leq 1\,,1 \leq v \leq 2\}$.
Dado que $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 3$ (hacer!), tenemos que $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1/3$ y de esta forma

$$\int\int_D dxdy = \int\int_{D'} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1}\int_{1}^{2} = 1/6\,.$$

Cálculo Integral en más de una variable real

Cambio de variables

Un comentario: Este tipo de transformaciones son de gran utilidad en, por poner un ejemplo, **Métodos de Elementos Finitos** en más de una dimensión (técnicas numéricas para resolver, normalmente, problemas vinculados a EDPs), de gran utilidad en geometrías variadas ...



Un ejemplo de cálculo de estructuras: triangularización para el diseño de una plataforma que ha de someterse a vibraciones de diverso tipo.

Cálculo Integral en más de una variable real

Cambio de variables

En este tipo de cálculos interesa transformar triángulos y cuadriláteros con vértices de coordenadas cualesquiera a triángulos y cuadriláteros "de referencia" ...

Cálculo Integral en más de una variable real
Cambio de variables

Ejemplo-Ejercicio 2:
Calcular $\int\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dxdy$ donde D es el triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $x+y=1$.

En este caso, el dominio D es muy sencillo y la dificultad se plantea con el integrando. Un cambio de variables que resulta útil es $u=y-x$, $v=y+x$. Continuar y comprobar que la solución que se obtiene es $\frac{e-e^{-1}}{4}$.

Cálculo Integral en más de una variable real
Aplicaciones de la integral doble

Por ejemplo:

1. Cálculo de áreas de superficies en $\mathbb{R}^2$: como ya comentamos, la superficie de la región $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitada por una curva cerrada es: $\mu(D) = \int\int_D dxdy$.
2. Cálculo de volúmenes: $\int\int_D f(x,y)dxdy$ es el volumen comprendido entre la gráfica de $f(x,y)$ (supuesta positiva en D), el plano XY y la superficie lateral (perpendicular al plano XY) de base D.
3. Cálculo de áreas de superficies en $\mathbb{R}^3$ dadas por $z = f(x,y)$ con x e y en una región D;

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy\,.$$

Cálculo Integral en más de una variable real

Integrales triples

Generalización del concepto de integral de Riemann a tres variables: muy sencillo conceptualmente!. **Las correspondientes particiones definirían ahora cubos en** $\mathbb{R}^3$ (recordemos que eran segmentos en una dimensión y rectángulos en dos dimensiones). De este modo,

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz$$

se obtendrá sumando los valores ínfimos u supremos de la función pesados en los "cubos elementales" de la partición.

Importante: los teoremas de Fubini y del cambio de variable son aplicables, con la correspondiente extensión. Así, por ejemplo, para integrales en volumen, cuando se aplica cambio de variables hay que obtener la matriz Jacobiana, que en este caso será una matriz tres por tres.

Cálculo Integral en más de una variable real

Integrales triples

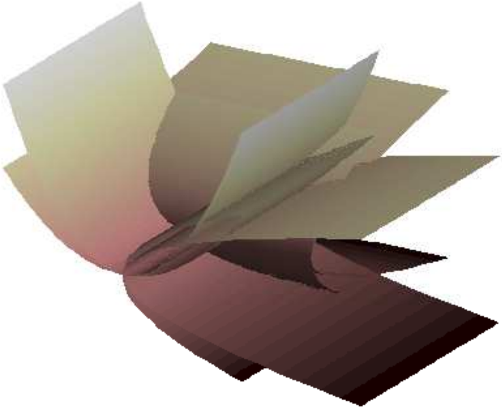
Ejemplo: Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies: $y = z^2$, $2y = z^2$, $z = x^2$, $2z = x^2$, $x = y^2$, $2x = y^2$.

Indicación: efectuar un cambio de variables de forma que el nuevo recinto de integración sea el cubo $[1, 2]^3$. Hallar el jacobiano del cambio inverso.

Cálculo Integral en más de una variable real

Integrales triples

Una representación gráfica de las superficies en cuestión ...



Cálculo Integral en más de una variable real
Integrales triples

El cambio de variables que permite obtener el dominio que se sugiere es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{z^2}{y}=1 & \dfrac{z^2}{y}=2 \\ & \\ \dfrac{x^2}{z}=1 & \dfrac{x^2}{z}=2 \\ & \\ \dfrac{y^2}{x}=1 & \dfrac{y^2}{x}=2 \end{array}\right. \rightarrow D_1 \left\{\begin{array}{l} 1 \leq u = \dfrac{z^2}{y} \leq 2 \\ \\ 1 \leq v = \dfrac{x^2}{z} \leq 2 \\ \\ 1 \leq w = \dfrac{y^2}{x} \leq 2 \end{array}\right.$$

Cálculo Integral en más de una variable real

Integrales triples

El jacobiano del cambio inverso vendrá dado por

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{z^2}{y^2} & \dfrac{2z}{y} \\ \dfrac{2x}{z} & 0 & -\dfrac{x^2}{z^2} \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} & 0 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7.$$

Cálculo Integral en más de una variable real

Integrales triples

Por lo tanto

$$V = \iiint_D dxdydz = \iiint_{D_1} \frac{1}{\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}} dudvdw = \iiint_{D_1} \frac{1}{7} dudvdw =$$

$$= \frac{1}{7}\left[\int_1^2 du\right]\left[\int_1^2 dv\right]\left[\int_1^2 dw\right] = \frac{1}{7}$$

Cálculo Integral en más de una variable real

Un último comentario sobre notación habitual en Física/Ingeniería

Es habitual escribir las integrales en dos variables de la forma:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D f(x,y)dS\,,$$

y, de esta forma, escribir el teorema de cambio de variables como sigue:

$$\int\int_D f(x,y)dS = \int\int_{D'} f(u,v)dS\,,$$

donde D' es la región D escrita en las variables u, v, $f(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ y donde tenemos la regla de cálculo:

$$dS = dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv\ .$$

Llamaremos a *dS* Elemento de Superficie, que se "escribe de distinto modo según las coordenadas que se elijan".

Cálculo Integral en más de una variable real

Un último comentario sobre notación habitual en Física/Ingeniería

De igual forma, escribiremos:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int f(x,y,x)dV \ ,$$

de modo que si se realiza un cambio de variables, escribiríamos:

$$dV = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw \ .$$

Llamaremos a dV Elemento de Volumen.

Cálculo Integral en más de una variable real

Un último comentario sobre notación habitual en Física/Ingeniería

Ejercicio 1: Deducir los elementos de volumen en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Solución:

1. Cilíndricas: $dV = rdrdzd\phi$.
2. Esféricas: $dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$.

Ejercicio 2: Calcular, mediante integrales triples, el volumen de una esfera de radio R. Comentario: lógicamente, si D es la esfera, su volumen será $\int\int\int_D dV$.

Integrales de línea y de superficie

Motivación: muchas ecuaciones y propiedades fundamentales de la Física (y, en consecuencia, de aplicación en Ingeniería) se derivan a partir de integrales de campos escalares y vectoriales sobre líneas, superficies y volúmenes.

Ejemplos:

1. Mecánica de Fluidos: Ecuación de continuidad.
2. Termodinámica: Ecuación de conducción del calor.
3. Mecánica: Campos de fuerza conservativos.

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

Integral de línea: va a generalizar el concepto de integral de Riemann en una variable. El dominio de integración será ahora una curva en $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$ en las aplicaciones que consideremos).

Curva en $\mathbb{R}^n$

Es una función $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que existen las derivadas de sus componentes y son continuas (es decir, que es de clase $\mathcal{C}^1$, a lo cual nos referiremos diciendo que la curva es suave).

En particular, una **curva en $\mathbb{R}^2$** es una función:

$$\begin{array}{rcl} C : D \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & (x(t), y(t)) \end{array}$$

siendo t el parámetro, que al ser variado va generando los puntos (x, y) de la curva.

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

Integral de línea de una función escalar (para curvas en $\mathbb{R}^2$)

Sea una curva en $\mathbb{R}^2$ que une los puntos A y B dada en forma paramétrica $t \to (x(t), y(t))$, definimos la integral de línea de una función continua $f(x, y)$ sobre la curva C entre $A = (x(a), y(a))$ y $B = (x(b), y(b))$ como:

$$\int_{C_{AB}} f\, dl = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

Casos particulares:

1. Si el parámetro de la curva es x, es decir, $t = x$, entonces $\int_{C_{AB}} f\, dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}dx$.
2. Si sobre la curva f una de las variables fuera constante (por ej. y) entonces: $\int_{C_{AB}} f\, dl = \int_a^b f(x(t), k)\sqrt{x'(t)^2}dt = \pm \int_{x_a}^{x_b} f(x, k)dx$ que es la conocida integral de Riemann en una variable.

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

La definición puede, por supuesto, extenderse a fácilmente a curvas en $\mathbb{R}^3$ o sin más a $\mathbb{R}^n$:
Sea la curva

$$\begin{array}{rcl} C : D \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \rightarrow & \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \end{array}$$

Consideremos $\boldsymbol{x}'(t) = (x_1'(t), ..., x_n'(t))$ y sea $||\boldsymbol{x}'(t)||$ el módulo de este vector. Entonces

Integral de línea de una función escalar (para curvas en $\mathbb{R}^n$)

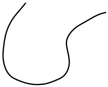
$$\int_{C_{AB}} f dl = \int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))||\boldsymbol{x}'(t)||dt \qquad (1)$$

Comentario: **$\boldsymbol{x}'(t_0)$ es un vector tangente a la curva $\boldsymbol{x}(t)$ en $t = t_0$ (es el** *vector velocidad de la curva* **en ese punto).**

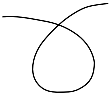
Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

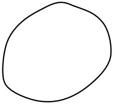
Comentario: en los cálculos consideraremos siempre que las curvas son *suaves* y *simples* (o la unión de curvas suaves y simples).



suave y simple



suave pero no simple



simple y cerrada

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

En las definiciones anteriores asumimos que f era una función *escalar* (es decir, los valores de la función eran números reales). Es posible extender la definición de integral de línea a funciones (*campos*, por su aplicación en Física) vectoriales (es decir, los valores de la función son elementos de $\mathbb{R}^n$)...

Integrales de línea y de superficie
Integrales de línea

Integral de línea de una función vectorial (para curvas en $\mathbb{R}^n$)

Sea $\boldsymbol{r} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva suave que une los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Denotamos por C_{AB} el lugar de los puntos de la curva desde $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$. Sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Definimos la integral de línea de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva $\boldsymbol{r}$ entre los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{R}^n$ como:

$$\int_{C_{AB}} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_{C_{AB}} (\boldsymbol{F}.\boldsymbol{T})\, dl$$

representando $\boldsymbol{T}$ el vector unitario (variable) tangente a la curva. Es decir, que la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva $\boldsymbol{r}(t)$ es la integral de línea de la función escalar $\boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}$ (proyección de $\boldsymbol{F}$ sobre la tangente) sobre la curva.

Integrales de línea y de superficie
Integrales de línea

Comentario: Asumiendo que $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$, es claro que el vector unitario tangente a la curva en $t = t_0$ es $\boldsymbol{T}(t_0) = \boldsymbol{r}'(t_0)/||\boldsymbol{r}'(t_0)||$ y por lo tanto, podemos escribir:

$$\int_{C_{AB}} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)).\boldsymbol{r}'(t)dt$$

donde $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{r}(b) = \boldsymbol{B}$.

Ejemplo: Sea $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (z, y, x)$. Calcular la integral de línea de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva $y = x^2$, $z = x$ entre $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

Solución:

Escogemos como parámetro $t = x$ de forma que $\boldsymbol{r}'(t) = (1, 2t, 1)$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = (t, t^2, t)$ y $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}(1) = (1, 1, 1)$. Luego $\boldsymbol{F}.\boldsymbol{r}' = t + 2t^3 + t$ y entonces

$$\int_C \boldsymbol{F}\boldsymbol{dr} = \int_0^1 (2t + 2t^3)dt = 3/2\,.$$

Integrales de línea y de superficie
Integrales de línea

Un teorema fundamental es la **regla de Barrow para integrales de línea**.

Regla de Barrow

Sea ϕ una función escalar tal que la función $\nabla\phi$ es continua y sea C un camino suave que une los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, entonces:

$$\int_{C_{AB}} \nabla\phi \, \boldsymbol{dr} = \phi(\boldsymbol{B}) - \phi(\boldsymbol{A})$$

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

La regla de Barrow nos garantiza que **si una función vectorial continua se puede escribir como el gradiente de una función escalar, entonces la integral de camino entre A y B es la misma para cualquier camino suave a trozos uniendo estos dos puntos, es decir, que sólo depende de los puntos iniciales y finales del camino**. **Una función vectorial que cumple esta propiedad se dice que es un campo conservativo**.

Integrales de línea y de superficie
Integrales de línea

Campo conservativo: definición

Diremos que un campo vectorial es **conservativo** si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones (equivalentes entre sí).

1. $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de un campo escalar ϕ, al que se le llama función escalar del campo conservativo $\boldsymbol{F}$.
2. Para cualesquiera caminos suaves C_{AB}, $\bar{C}_{AB}$ que unan los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ (desde $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, por ejemplo), se tiene que $\int_{C_{AB}} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int_{\bar{C}_{AB}} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}$
3. Si C es una curva cerrada (que empieza y termina en un mismo punto) entonces $\int_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} \equiv \oint_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} (\textit{Integral de Circulación}) = 0.$

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

Campo conservativo: propiedad 1

Si $\boldsymbol{F}$ es un campo conservativo con función potencial ϕ, entonces $\phi + K$, siendo K una constante, también es una función potencial del mismo campo $\boldsymbol{F}$.

Campo conservativo: condición (necesaria) de Green para campos de $\mathbb{R}^2$

Si $\boldsymbol{F} = (F^x, F^y)$, $\boldsymbol{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, es conservativo en el dominio D, teniendo F^x y F^y derivadas parciales continuas en D, entonces $F^y_x = F^x_y$.

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

Campo conservativo: condición (suficiente) de Green para campos de $\mathbb{R}^2$

Sea $\boldsymbol{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial con dominio D **simplemente conexo** de tal forma que las derivadas parciales de sus componentes F^x, F^y tienen primeras derivadas parciales continuas en D cumpliéndose que $F^y_x = F^x_y$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo.

Dominio simplemente conexo: dominio ***sin agujeros*** **y sin** ***piezas separadas*****.**

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

Ejemplo: Estudiar si el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = (2xy, x^2)$ es un campo conservativo. Obtener su función potencial.

Solución:

$\boldsymbol{F}$ es un campo $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^2$ y se cumple que $F^y_x = F^x_y$, luego es un campo conservativo. Calculemos la función potencial $\phi(x, y)$:
Como $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\phi(x, y)$, se verifica que

$$\phi_x = F^x = 2xy \Rightarrow \phi(x, y) = x^2 y + C(y)$$

y derivando $\phi_y = x^2 + C'(y)$, pero $\phi_y = F^y = x^2$ luego $C'(y) = 0$ y $C(y)$ es una constante (podemos tomarla cero), de modo que una función potencial es

$$\phi(x, y) = x^2 y.$$

Integrales de línea y de superficie
Integrales de línea

Comentario: **Para campos vectoriales de $\mathbb{R}^2$ la definición de los campos conservativos no cambia, aunque sí ligeramente la condición de Green: se deberá verificar $F_x^y = F_y^x$, $F_z^y = F_y^z$, $F_x^z = F_z^x$ simultáneamente. Estas condiciones se pueden escribir de modo más simple introduciendo el operador rotacional.**

Integrales de línea y de superficie

Integrales de línea

Rotacional de un campo vectorial: definición

Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que escribimos como $\boldsymbol{F} = F^x\boldsymbol{i} + F^y\boldsymbol{j} + F^z\boldsymbol{k}$, siendo $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ la base canónica. Definimos el campo rotacional de $\boldsymbol{F}$ como:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^x & F^y & F^z \end{vmatrix} = (F^z_y - F^y_z)\boldsymbol{i} + (F^x_z - F^z_x)\boldsymbol{j} + (F^y_x - F^x_y)\boldsymbol{k}$$

Un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de una función escalar $\longleftrightarrow$ $\nabla\times\boldsymbol{F} = 0$.

Integrales de línea y de superficie

Integrales de Superficie

Acabamos de generalizar el concepto de integral de Riemann "adaptándolo" a la integración sobre curvas en el espacio, no necesariamente rectas. Es de esperar que podamos también encontrar una generalización del concepto de integral doble que nos permita integrar sobre superficies curvadas en el espacio.
Un elemento esencial del cálculo será la parametrización de las superficies

Superficie parametrizada: definición

Una superficie parametrizada en $\mathbb{R}^3$ es una función $\boldsymbol{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
La superficie S correspondiente a la función $\boldsymbol{r}$ es la imagen $S = \boldsymbol{r}(D)$.
Escribiremos

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

y si $\boldsymbol{r}$ es diferenciable se dirá que S es una superficie diferenciable.

Integrales de línea y de superficie
Integrales de Superficie

Dos ejemplos sencillos de parametrización de superficies son los siguientes:

1. **Parametrización del plano en coordenadas polares**. El plano $z = k$ se puede parametrizar utilizando coordenadas polares:
$$\{(x, y, k)\,,\ \ x, y \in \mathbb{R}\} = \{(r\cos\phi, r\sin\phi, k)\,,\ \ r \geq 0, 0 \leq \phi < 2\pi\}\,.$$
2. **Parametrización de una esfera mediante coordenadas esféricas**. Una esfera de radio R se puede parametrizar utilizando dos ángulos:
$$\begin{aligned} x(\theta, \phi) &= R\sin\theta\cos\phi \\ y(\theta, \phi) &= R\sin\theta\sin\phi \\ z(\theta, \phi) &= R\cos\theta \end{aligned}$$
De modo que la esfera S es:
$$S = \{(x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi))\ 0 \leq \theta < \pi\,,\ \ 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

Integrales de línea y de superficie
Integrales de Superficie

Observación: Consideraremos en todo momento superficies diferenciables $S = S(u, v)$. Fijado uno de los parámetros, pongamos que v, al variar el otro obtendríamos una curva en $\mathbb{R}^3$.
Las tangentes a esta curva en cada punto se pueden obtener por derivación respecto a u:

$$\boldsymbol{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k}$$

y de similar forma podríamos obtener el vector tangente a la superficie a lo largo de la dirección de v:

$$\boldsymbol{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k}$$

Integrales de línea y de superficie

Integrales de Superficie

Dado un punto de la superficie S, como ambos vectores $\boldsymbol{T}_u$ y $\boldsymbol{T}_v$ son tangentes a dos curvas contenidas en S, **ambos son ortogonales al vector normal a la superficie** en ese punto y por lo tanto, por las propiedades del producto vectorial,

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v$$

es normal a las superficie, siempre, claro está, que $\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v \neq 0$ en el punto en cuestión (si esto es así, diríamos que la superficie parametrizada no es suave; consideraremos que esto no ocurre).

Comentario: Esto nos permite obtener la ecuación del plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0):

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\boldsymbol{N} = 0$$

donde $\boldsymbol{N}$ se evalúa en (x_0, y_0, z_0).

Integrales de línea y de superficie

Integrales de Superficie

Ejemplo:

Considerando la parametrización de la esfera antes considerada, tendríamos que

$$\boldsymbol{T}_\theta = R(\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, -\sin\theta)$$
$$\boldsymbol{T}_\phi = R(-\sin\phi\sin\theta, \cos\phi\sin\theta, 0)$$

y $\boldsymbol{T}_\theta \times \boldsymbol{T}_\phi = R\sin\theta(R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta) = R\sin\theta\boldsymbol{r}$. *Por lo tanto, si* $\sin\theta \neq 0$*, se trata de un vector proporcional al vector* (x, y, z) *que tiene la dirección radial, como cabría esperar del vector normal a la superficie de una esfera.*

El caso $\sin\theta = 0$ $(\theta = 0, \pi)$ *presenta un problema en la parametrización: diríamos que la superficie parametrizada no es suave para esos valores de* θ.

Ya estamos en condiciones de definir la integral de una función escalar sobre una superficie parametrizada ...

Integrales de línea y de superficie

Integrales de Superficie

Integral de una función escalar sobre una superficie parametrizada: definición

Si $f(x, y, z)$ es una función escalar continua, definida sobre una superficie S, estando S parametrizada por el campo vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$, con u y v variando en un dominio D, se define la integral de f sobre S como:

$$\int_S f(x, y, z)dS = \int\int_D f(\boldsymbol{r}(u, v))||\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v||dudv$$

Observaciones:

1. La integral doble de Riemann puede verse como un caso particular de esta definición (yendo a una dimensión más, eso sí).
2. La fórmula de cambio de variable está, de algún modo, contenida en esta definición.

Integrales de línea y de superficie

Integrales de Superficie

Integral de una función vectorial sobre una superficie parametrizada: definición

Si $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial continuo, definido sobre una superficie S, estando S parametrizada por el campo vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$, con u y v variando en un dominio D, se define la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre S como:

$$\int_S \boldsymbol{F}(x, y, z) d\boldsymbol{S} = \int\int_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u, v)).(\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v) dudv$$

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Comentario: De la misma forma que las integrales de línea pueden reducirse al problema de calcular una función (potencial) en dos puntos (regla de Barrow) cuando el campo vectorial es conservativo, es tentador pensar que semejante "reducción de dimensión" puede aplicarse para relacionar determinadas integrales de superficie con integrales de línea e integrales de volumen con integrales de superficie. Veremos que este tipo de relaciones son establecidas en los teoremas de Gauss y Stokes (Green).

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Teorema de Green

Sea D una región en el plano delimitada por una curva C suave a trozos y cerrada y sea $\boldsymbol{F}(x, y) = (F^x(x, y), F^y(x, y))$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ en D. Entonces

$$\oint_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y} \right) dxdy$$

donde la curva C se recorre en el sentido tal que si nos moviéramos sobre la curva en este sentido, el dominio D quedaría a nuestra izquierda.

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Teorema de Green (Continuación)

Si D está delimitada por varias curvas suaves y cerradas $C_1, ..., C_n$, entonces

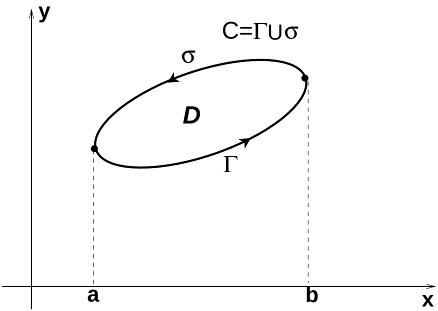
$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int \int_D \left(\frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y} \right) dxdy$$

donde cada curva se recorre en el sentido tal que la región D quede a la izquierda (diremos que éste es el sentido positivo).

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Un dibujo sirve para aclarar qué entendemos por *sentido positivo de recorrido* ...



Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Como vemos, el teorema de Green relaciona integrales dobles con integrales de línea sobre curvas planas. En realidad es un caso particular del teorema de Stokes, que enunciaremos más adelante. Una primera aplicación del Teorema de Green es el **cálculo de áreas planas.**

Cálculo de áreas planas

Sea una región D para la que se puede aplicar el teorema de Green, delimitada por curvas $C_1,\ldots C_n$, entonces el área de la superficie, se puede obtener de siguiente modo:

$$\mu(D) = \int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i}[xdy - ydx]$$

donde las integrales de línea se recorren en el sentido positivo (teorema de Green).

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Ejemplo: Calcular el área de una elipse de semiejes a y b.

Solución:

Una parametrización conveniente para la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *es la siguiente*

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \to dx = -a\sin t\,dt \\ y &= b\sin t \to dy = b\cos t\,dt \end{aligned}$$

variando t *desde* 0 *hasta* 2π *se recorre la elipse en el sentido positivo. Aplicando el anterior corolario:*

$$S = \frac{1}{2}\oint [xdy - ydx] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t(b\cos t dt) - b\sin t(-a\sin t dt)] = ab\pi.$$

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Una consecuencia del teorema de Green es la fórmula de la integral doble del Laplaciano. Antes,**recordemos qué es un Laplaciano**: **Sea f una función escalar dos veces derivable dependiente de n variables, se define la actuación del Laplaciano Δ sobre f como:**

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \, .$$

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Integral doble del Laplaciano

Sea D una región plana delimitada por una curva parametrizada suave C con orientación positiva y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ entonces

$$\int\int_D \Delta f dxdy = \oint D_{\boldsymbol{n}} f \, dl$$

donde la integral de la derecha es la integral de línea de la función escalar $D_{\boldsymbol{n}} f$ (derivada direccional de f según el vector unitario normal a la curva en cada punto y apuntando hacia el exterior).

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

El teorema de Gauss relaciona integrales en volumen con integrales de superficie. Para enunciarlo es conveniente recordar la definición de **divergencia de un campo vectorial:**

Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ dependiente de n variables, $\boldsymbol{F} = (F^{x_1}, ..., F^{x_n})$. Se define su divergencia como:

$$div(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^{x_i}}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} F^{x_i}_{x_i} .$$

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Teorema de Gauss o de la divergencia

Sea una región V en $\mathbb{R}^3$ encerrada por una superficie S parametrizada con parámetros u y v, de tal modo que el vector normal $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_u$ apunta hacia el exterior del volumen V. Sea un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ que es de clase $\mathcal{C}^1$ en V, entonces:

$$\int\int\int_V \nabla \boldsymbol{F} dV = \int\int_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dS}$$

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Comentario: La integral de $\boldsymbol{F}$ a la derecha de la expresión del Teorema de Gauss recibe el nombre de **flujo de $\boldsymbol{F}$ sobre la superficie $\boldsymbol{S}$**.

Ejercicio: Verificar el teorema de la divergencia para el siguiente campo vectorial: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ siendo S la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 5$ junto con sus bases $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 4, z = 5\}$ y $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$.

Hacer!

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

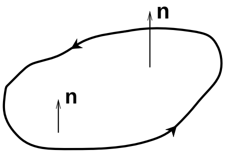
El **teorema de Stokes** va a relacionar integrales de superficie en $\mathbb{R}^3$ con integrales de línea en $\mathbb{R}^2$; el teorema de Green no será más que un caso particular de este caso más general.
Antes de enunciar el teorema, necesitamos introducir el concepto de *superficie suave orientable*:

1. De igual forma que decíamos que una curva era suave si admitía tangente en todo punto de la curva, siendo la tangente una función continua, diremos que **una superficie es suave si existe la normal a la superficie en cada punto y esta varía de forma continua al movernos sobre la superficie**.
2. Es evidente que dada una superficie y $\boldsymbol{n}$ el vector unitario perpendicular a la superficie en un punto, también podríamos escoger $-\boldsymbol{n}$ como vector normal; cada una de estas opciones dará normales de sentido opuesto en cada punto. **Escoger una de estas dos opciones se dice que es escoger una orientación de la superficie**.

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Consideremos una superficie S cuya frontera es una curva suave simple y cerrada. Escogida la parametrización de la curva $\boldsymbol{r}(t)$ diremos que **la orientación de la curva es positiva respecto a la orientación de la superficie** (o que tiene el sentido inducido por la superficie orientada) **si los vectores normales $\boldsymbol{n}$ a la superficie cercanos a esta curva son tales que $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{n}$ apunta alejándose de la superficie** o, dicho de otra forma, si *al caminar sobre la curva frontera de la superficie, el vector normal apunta hacia arriba y la superficie queda a la izquierda*.



Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Teorema de Stokes

Sea una superficie S limitada por una curva suave y cerrada Γ y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ en S entonces

$$\int\int_S (\nabla \times \boldsymbol{F})\, \boldsymbol{dS} = \oint_\Gamma \boldsymbol{F}\boldsymbol{dr}$$

donde la orientación de Γ es la inducida por la orientación de la superficie.

Nota: en muchas ocasiones abreviaremos la notación utilizada para las integrales de superficie o las de volumen, de forma que sólo hagamos uso de un símbolo integral (se entenderá por el contexto que son integrales múltiples).

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Ejemplo: **Considerar el campo vectorial**

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(y,\ x^2,\ (x^2+y^4)^{3/2}\sin\left(e^{\sqrt{xyz}}\right)\right).$$

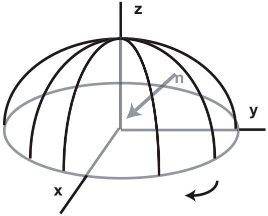
Calcular $\int_S (\nabla \times \boldsymbol{F})\, \boldsymbol{dS}$**, donde** S **denota la normal interior al semielipsoide**

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36,\ z \geq 0\right\}.$$

Sol:
Vamos a aplicar el Teorema de Stokes para calcular la integral que se pide.

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial



Al ser la normal la “interior”, el sentido de recorrido de la curva es el antihorario, por lo que la parametrización de la curva ha de ser

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \rightarrow x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 3\sin\theta \\ y = 2\cos\theta \end{cases}$$

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

luego

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2\cos\theta,\ 3^2\sin^2\theta,\ \left(3^2\sin^2\theta + 2^4\cos^4\theta\right)^{3/2} \sin\left(e^{\sqrt{3\sin\theta\, 2\cos\theta\, 0}}\right)\right.$$

$$\cdot\,(3\cos\theta,\ -2\sin\theta,\ 0)\, d\theta$$

luego

$$I = \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2\theta - 18\sin^3\theta\right) d\theta = 6\pi.$$

Integrales de línea y de superficie

Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Ejercicio: Utilizar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_C (-y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz) \,,$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$. La orientación de C es tal que gira en el sentido que lleva el eje X al eje Y. Verificar el resultado haciendo directamente la integral de línea.

Hacer!

Series de Fourier

Motivación: las series de Fourier constituyen una importante herramienta para la obtención de soluciones de ecuaciones diferenciales. Su teoría básica concierne a la expresión de una función como una superposición de senos y cosenos.

Series de Fourier

Comencemos con una definición que ya conocemos ...

Función periódica: definición

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *periódica* de periodo T si satisface la relación

$$f(t+T) = f(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: *la función $f(t) = \sin(t)$ es (trivialmente) periódica de periodo 2π. A partir de esto es fácil comprobar que la función $f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ es periódica de periodo T puesto que:*

$$\sin\left(\frac{2\pi(t+T)}{T}\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Series de Fourier

Más generalmente, si k es cualquier entero positivo, las funciones

$$\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \text{ y } \sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

son también periódicas de periodo T.

Necesitamos también otra definición ..

Función *suave a trozos*: definición

Una función $f(t)$ periódica de periodo T se dice que es *suave a trozos* si es continua y tiene derivada continua $f'(t)$ excepto a lo sumo en un número finito de puntos de discontinuidad de tipo "salto finito".

Series de Fourier

Con estas definiciones previas, ya estamos en condiciones de establecer el siguiente resultado:

Serie de Fourier de una función $f(t)$

Si $f(t)$ es una función periódica de periodo T *suave a trozos*, se verifica que $f(t)$ puede expresarse como una combinación de senos y cosenos,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \ldots \\ &\quad + b_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

donde los coeficientes a_k's y b_k's son constantes. En esta expresión la igualdad quiere decir que la suma infinita del lado derecho converge a $f(t)$ en los puntos de continuidad de la función. Si la función es discontinua en t_0, su serie de Fourier convergerá al promedio de los límites laterales de $f(t)$ cuando $t \to t_0$.

Series de Fourier

Veamos cómo se calculan los coeficientes de la serie de Fourier:
Por simplicidad, restringiremos nuestra atención al caso en el que el periodo T es 2π, de modo que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \ldots + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \ldots \qquad (3)$$

Las fórmulas que se obtienen para un periodo T general son śolo ligeramente más complicadas y se basan exactamente en las mismas ideas.
El coeficiente a_0 es particularmente sencillo de evaluar. Integrando simplemente ambos lados de (3) de $-\pi$ a π:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos t\,dt + \ldots \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} b_1 \sin t\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_2 \sin 2t\,dt + \ldots \end{aligned}$$

Series de Fourier

Puesto que la integral de $\cos kt$ o $\sin kt$ en el intervalo $-\pi$ a π se anula, concluimos que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt.$$

Para obtener el resto de coeficientes de Fourier, necesitamos utilizar otras fórmulas integrales:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\,dt = \begin{cases} \pi, & \text{para } m = n, \\ 0, & \text{para } m \neq n, \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt\,dt = \begin{cases} \pi, & \text{para } m = n, \\ 0, & \text{para } m \neq n, \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\,dt = 0. \tag{6}$$

Series de Fourier

Para obtener ahora las expresiones para los coeficientes de Fourier a_k, $k > 0$, multiplicamos ambos lados de (3) por $\cos kt$ e integramos desde $-\pi$ a π. De acuerdo con las anteriores expresiones integrales, sólo hay un término que sobrevive:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kt \cos kt \, dt = \pi a_k .$$

De este modo, obtenemos la siguiente expresión para a_k:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt.$$

y un argumento muy similar nos lleva a:

Series de Fourier

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt.$$

Ejemplo: Determinar los coeficientes de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -\pi, & \textbf{para } -\pi < t < 0, \\ \pi, & \textbf{para } 0 < t < \pi, \\ 0, & \textbf{para } t = 0, \pi, \end{cases}$$

para un periodo $T = 2\pi$.

Solución:

Trivialmente, $a_0 = 0$. *Por otra parte,*

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\, dt\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos mt\, dt\right] + \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \pi\cos mt\, dt\right] = 0. \end{aligned}$$

Series de Fourier

y

$$
\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin mt\,dt\right] + \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \pi\sin mt\,dt\right] = \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{m}\cos mt|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{-\pi}{m}\cos mt|_{0}^{\pi} = \frac{2}{m} - \frac{2}{m}\cos m\pi = \\
&= \frac{2}{m}(1-(-1)^m) = \begin{cases} \frac{4}{m}, & \textit{si m es impar,} \\ 0, & \textit{si m es par.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

De modo que la serie de Fourier de f(t) es:

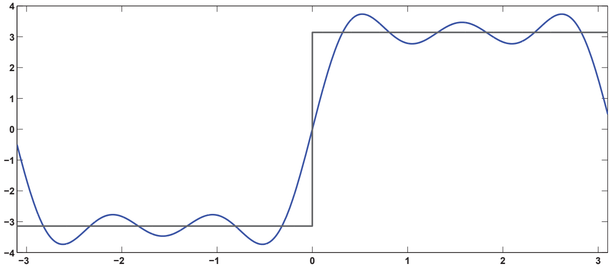
$$f(t) = 4\sin t + \frac{4}{3}\sin 3t + \frac{4}{5}\sin 5t + \ldots$$

Series de Fourier

Los polinomios trigonométricos

$$\phi_1(t) = 4\sin t,\ \ \phi_2(t) = 4\sin t + \frac{4}{3}\sin 3t,\ \ \phi_3(t) = 4\sin t + \frac{4}{3}\sin 3t + \frac{4}{5}\sin 5t$$

son aproximaciones a $f(t)$ que son progresivamente mejores según va creciendo el número de términos.
En la figura se muestra la aproximación de $\phi_3(t)$ a $f(t)$.



Series de Fourier seno y coseno

Veamos ahora que, bajo ciertas condiciones, una función $f(t)$ puede expresarse como superposición únicamente de funciones seno (coseno), lo que da origen a las denominadas series de Fourier seno (coseno).

Sea $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave a trozos **que se anula en** 0 **y en** L. Se verifica entonces que f puede expresarse como una superposición de funciones seno:

Serie de Fourier seno de $f(t)$

$$f(t) = b_1 \sin\left(\frac{\pi t}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + ... + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + ...$$

Los coeficientes b_n vendrán dados por:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right), dt.$$

Series de Fourier seno y coseno

La justificación de esta propiedad es sencilla haciendo uso de las correspondientes propiedades de las funciones pares e impares: evidentemente $f(t)$ puede "extenderse" a una función impar $\tilde{f} : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiendo

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t \in [0, L], \\ -f(-t), & \text{si } t \in [-L, 0], \end{cases}$$

y a partir de aquí puede ampliarse esta extensión a una función periódica de periodo $2L$ exigiendo que:

$$\tilde{f}(t + 2L) = \tilde{f}(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esta función periódica **pertenece al subespacio lineal de las funciones impares**. Por lo visto en la sección anterior, $\tilde{f}$ posee una expansión en series de Fourier y dado que $\tilde{f}$ es impar, **todos los coeficientes a_n de su expansión (los que van con las funciones coseno) son cero**.

Series de Fourier seno y coseno

En el intervalo $[0, L]$, $\tilde{f}(t)$ se restringe a la función $f(t)$ y la expansión en series de Fourier de $\tilde{f}$ se restringe a una expansión de f en términos exclusivamente de funciones seno. Llamaremos entonces a esta expansión la **serie de Fourier seno de** $f(t)$.

Un argumento similar (pero ahora relacionado con las funciones pares!) puede utilizarse para expresar una función suave a trozos $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ como una **superposición de funciones coseno**,

Serie de Fourier coseno de $f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{L}\right) + \ldots + a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \ldots$$

Los coeficientes a_n vendrán dados por:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right), dt.$$

Series de Fourier seno y coseno

Ejercicio: Determinar las series de Fourier seno y coseno de la función

$$f(t) = \begin{cases} t, & \textbf{para } 0 \leq t \leq \pi/2, \\ \pi - t, & \textbf{para } \pi/2 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Hacer!

Series de Fourier: versión compleja

La expresión que hemos visto anteriormente de la serie de Fourier de una función, se dice que es la *forma real* **de la serie. Sin embargo, a veces resulta bastante más cómodo trabajar con la** *forma compleja* **de la serie. La obtención de esta forma supone, esencialmente, hacer uso de la** *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Series de Fourier: versión compleja

La fórmula de Euler nos permite obtener las siguientes relaciones:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

de modo que la expansión en series de Fourier de una función $f(t)$ periódica, de periodo 2π, puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1\frac{(e^{it} + e^{-it})}{2} + a_2\frac{(e^{i2t} + e^{-i2t})}{2} + \ldots + \\ &\quad + b_1\frac{(e^{it} - e^{-it})}{2i} + b_2\frac{(e^{i2t} - e^{-i2t})}{2i} + \ldots \end{aligned}$$

Agrupando términos, llegamos a:

Series de Fourier: versión compleja

Forma compleja de la serie de Fourier

$$f(t) = \ldots + c_{-2}e^{-2it} + c_{-1}e^{-it} + c_0 + c_1e^{it} + c_2e^{2it} + \ldots$$

La relación de los coeficientes a_k y b_k ($k \neq 0$) con los coeficientes c_k que aparecen en esta expresión es

$$a_k = c_k + c_{-k}, \;\; b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Y el cálculo directo de estos coeficientes se hace a través de:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt.$$

Series de Fourier: versión compleja

Ejemplo: Obtener los coeficientes complejos de la serie de Fourier de

$$f(t) = t, \quad -\pi < t \leq \pi,$$

extendida para ser periódica de periodo 2π. A partir de los coeficientes complejos, obtener los coeficientes de la forma real de la serie de Fourier.

Tendremos que

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\, dt.$$

Haciendo uso de integración por partes,

Series de Fourier: versión compleja

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\left[(it/k)e^{-ikt}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(i/k)e^{-ikt}\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi i}{k}e^{-i\pi k} - \frac{-\pi i}{k}e^{i\pi k}\right] = \\ &= i\frac{(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$a_k = c_k + c_{-k} = 0,\ \ b_k = i(c_k - c_{-k}) = 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Comentario: Este ejemplo ilustra como en un buen número de ocasiones trabajar con la forma compleja de la serie de Fourier es bastante menos “complejo” que trabajar con la forma real (valga la paradoja).