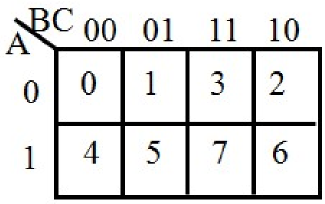
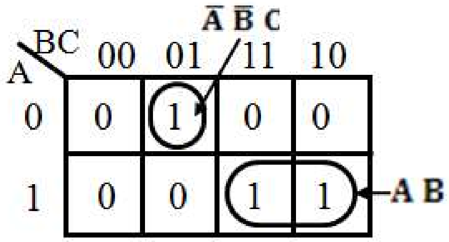
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación.
Electrónica Digital I. Problemas resueltos. Tema IIc

Página 1. Representar las siguientes funciones en Mapas de Karnaugh.

Las dos primeras son funciones de 3 entradas.

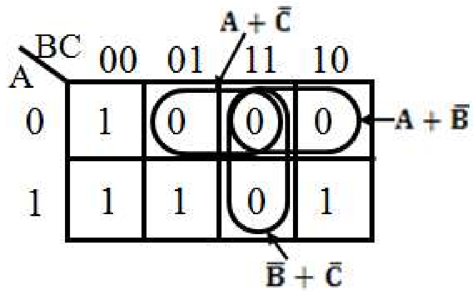


a) F(A, B, C) = $\mathbf{A\,B + \bar{A}\,\bar{B}\,C}$



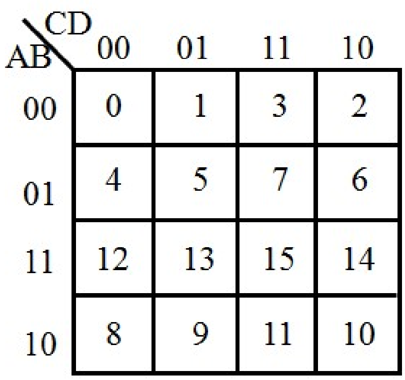
F(A, B, C) = $\sum(1, 6, 7)$

b) F(A, B, C) = $\mathbf{(A + \bar{B})\,(A + \bar{C})\,(\bar{B} + \bar{C})}$

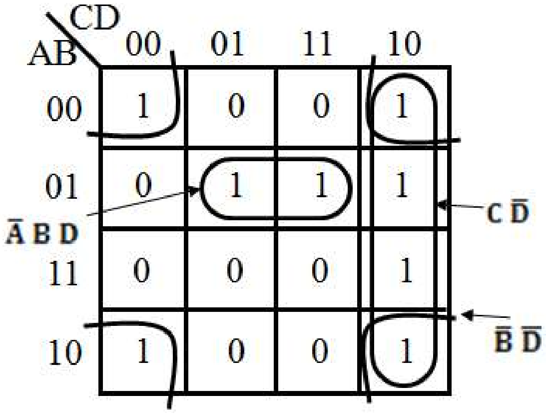


F(A, B, C) = $\prod(1, 2, 3, 7)$

Las siguientes funciones son de cuatro entradas

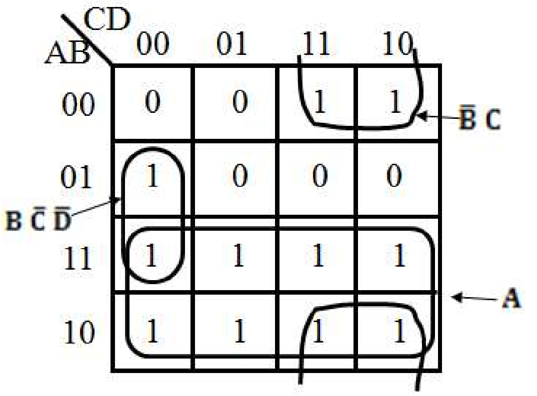


c) F(A, B, C, D) = $\overline{B}\,\overline{D} + C\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,D$



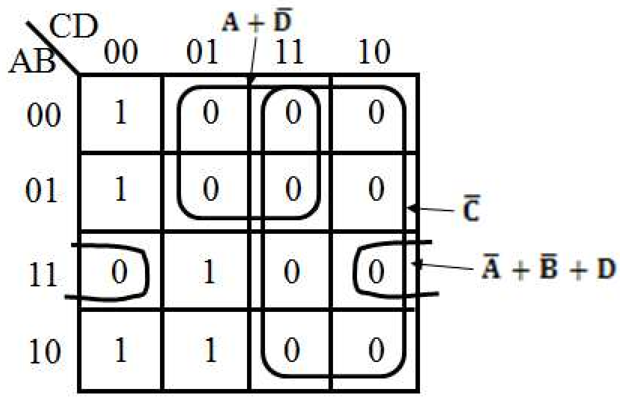
F(A, B, C, D) = ∑(0, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 14)

d) F(A, B, C, D) = $A + \overline{B}\,C + B\,\overline{C}\,\overline{D}$



F(A, B, C, D) = ∑(2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)

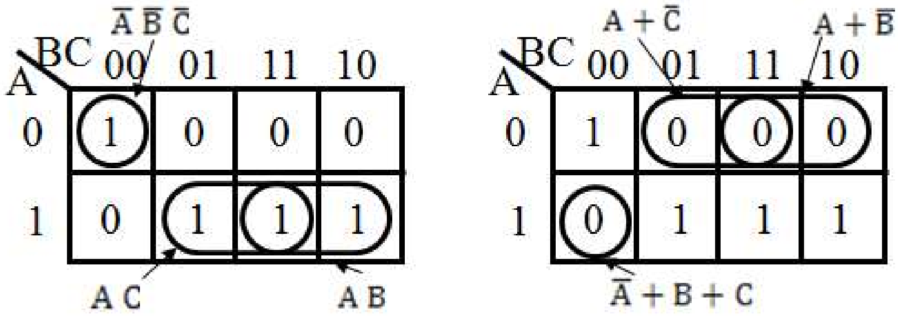
e) F(A, B, C, D) = $\overline{C}\,(A + \overline{D})\,(\overline{A} + \overline{B} + D)$



F(A, B, C, D) = ∏(1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15)

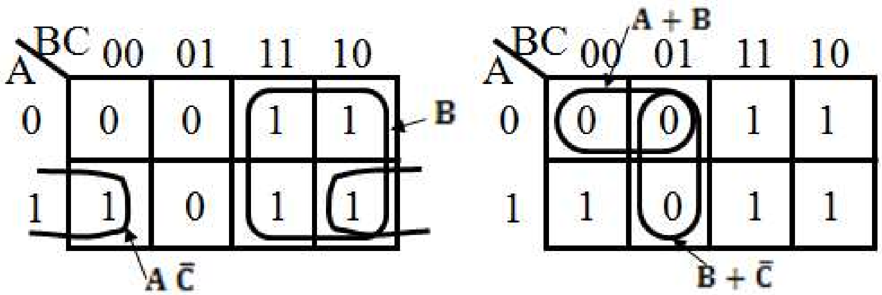
Página 2. Minimizar las siguientes funciones lógicas (formas SOP y POS).

a) F(A, B, C) = $\sum(0, 5, 6, 7)$



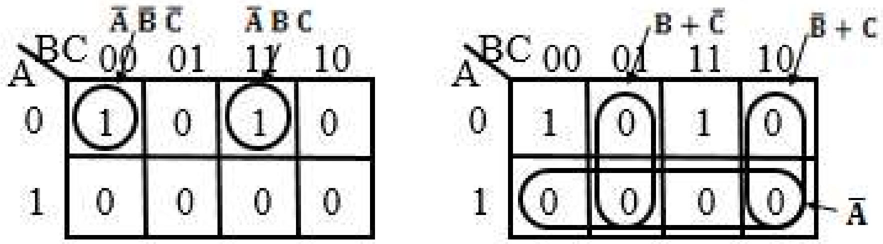
SOP. F(A, B, C) = $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,C + A\,B$
POS. F(A, B, C) = $(\overline{A} + B + C)(A + \overline{B})(A + \overline{C})$

b) F(A, B, C) = $\sum(2, 3, 4, 6, 7)$



SOP. F(A, B, C) = $B + A\,\overline{C}$
POS. F(A, B, C) = $(B + \overline{C})(A + B)$

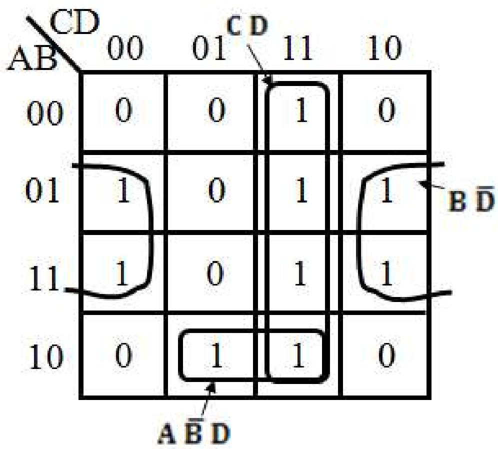
c) F(A, B, C) = $\prod(1, 2, 4, 5, 6, 7)$

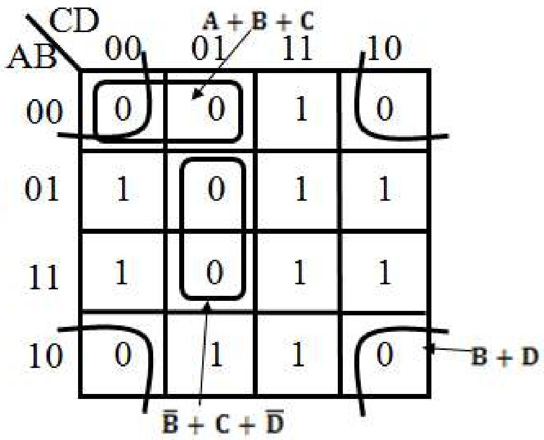


SOP. F(A, B, C) = $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,C$
POS. F(A, B, C) = $\overline{A}\,(B + \overline{C})(\overline{B} + C)$

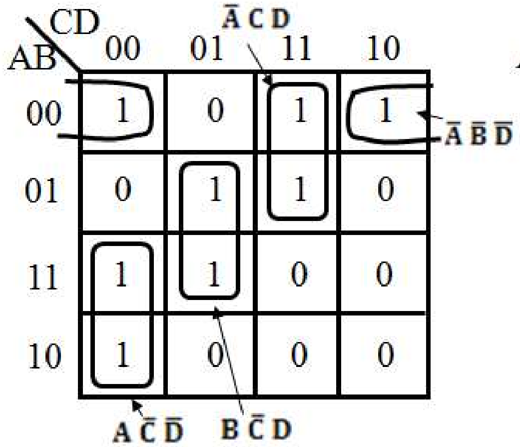
d) F(A, B, C, D) = $\sum(3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15)$

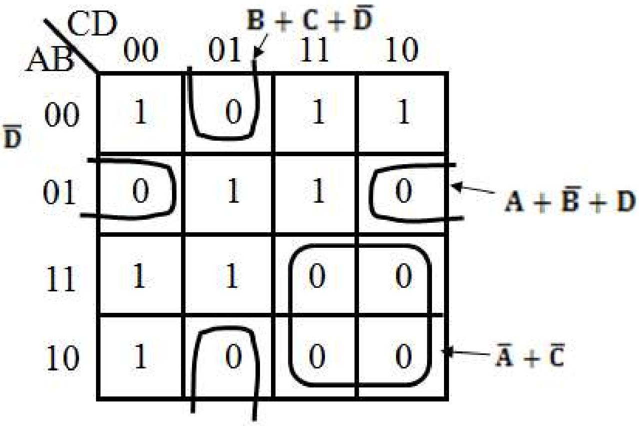
SOP. F(A, B, C, D) = $C\,D + B\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,D$
POS. F(A, B, C, D) = $(B + D)(\overline{B} + C + \overline{D})(A + B + C)$ -- Hay otra solución mínima POS





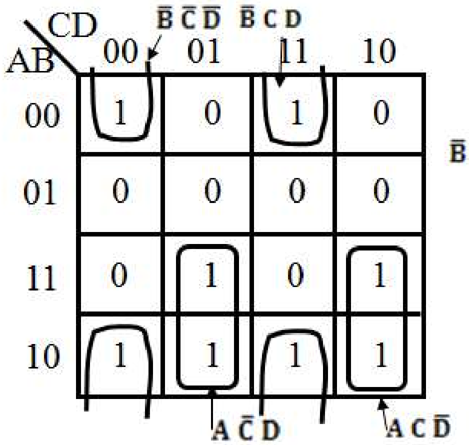
e) F(A, B, C, D) = ∑(0, 2, 3, 5, 7, 8, 12, 13)

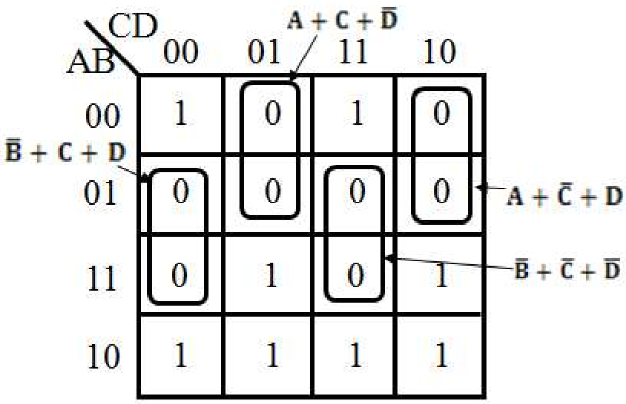




SOP. F(A, B, C, D) = $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + A\,\overline{C}\,\overline{D} + B\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,C\,D$ -- Hay otra solución mínima SOP
POS. F(A, B, C, D) = $(\overline{A} + \overline{C})(B + C + \overline{D})(A + \overline{B} + D)$

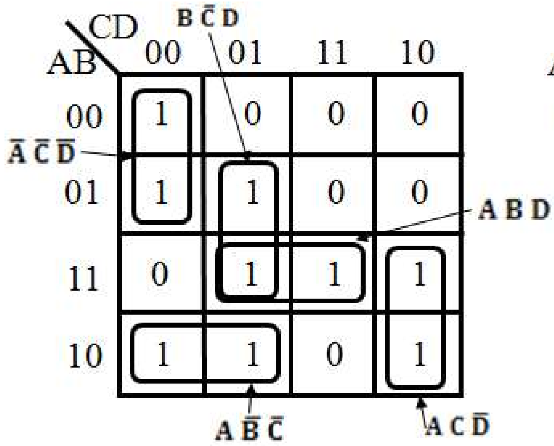
f) F(A, B, C, D) = ∏(1, 2, 4, 5, 6, 7, 12, 15)

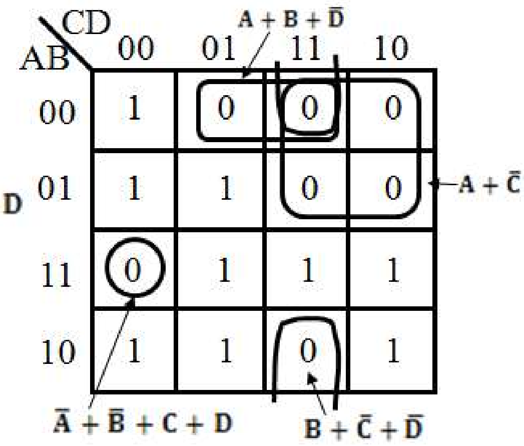




SOP. F(A, B, C, D) = $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{C}\,D + \overline{B}\,C\,D + A\,C\,\overline{D}$
POS. F(A, B, C, D) = $(\overline{B} + C + D)(A + C + \overline{D})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})(A + \overline{C} + D)$

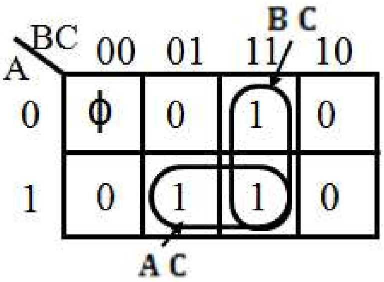
g) F(A, B, C, D) = ∑(0, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15)

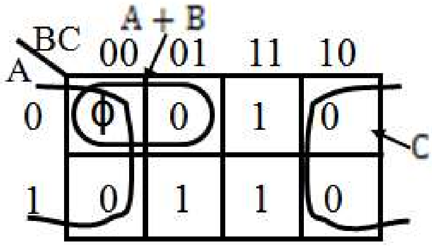




-- Hay varias funciones SOP mínimas
SOP. F(A, B, C, D) = $\bar{A}\,\bar{C}\,\bar{D} + B\,\bar{C}\,D + A\,B\,D + A\,\bar{B}\,\bar{C} + A\,C\,\bar{D}$
POS. F(A, B, C, D) = $(A + \bar{C})(A + B + \bar{D})(B + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + C + D)$

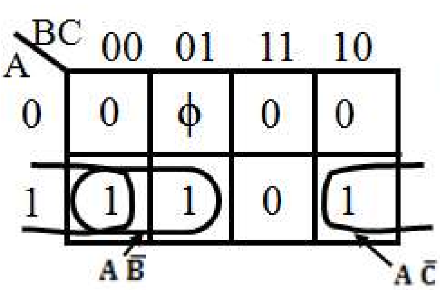
h) F(A, B, C) = ∑(3, 5, 7) + ∑$_\phi$(0)

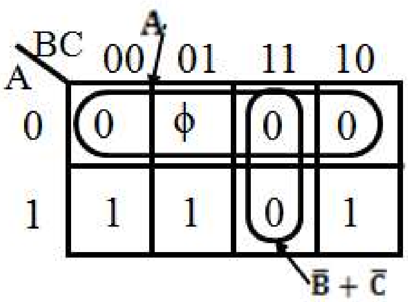




SOP. F(A, B, C) = $A\,C + B\,C$
POS. F(A, B, C) = $C\,(A + B)$

i) F(A, B, C) = ∏(0, 2, 3, 7) • ∏$_\phi$(1)

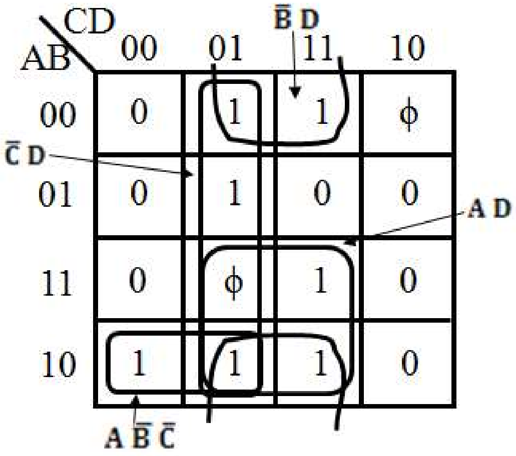


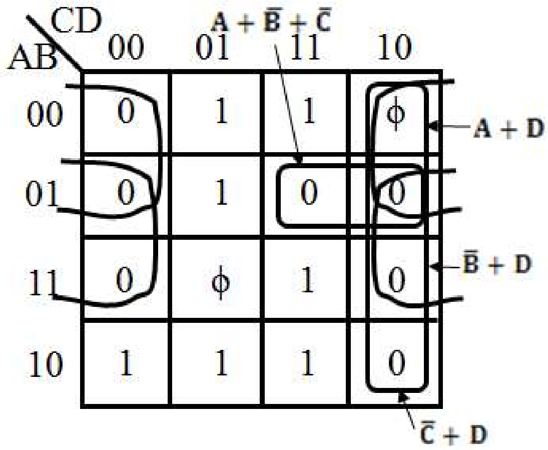


SOP. F(A, B, C) = $A\,\bar{B} + A\,\bar{C}$ -- Hay otra función SOP mínima
POS. F(A, B, C) = $A\,(\bar{B} + \bar{C})$

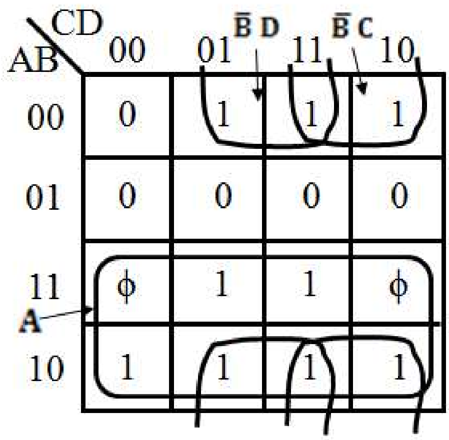
j) F(A, B, C, D) = ∑(1, 3, 5, 8, 9, 11, 15) + ∑$_\phi$(2, 13)

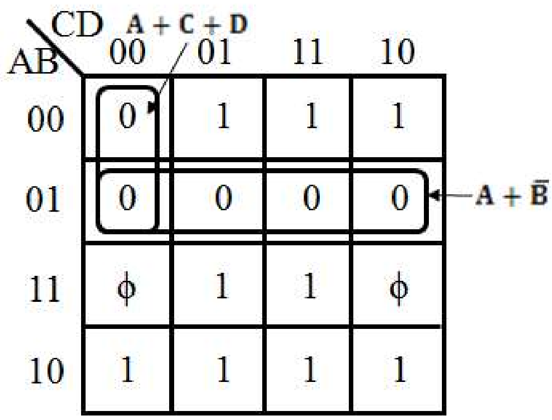
SOP. F(A, B, C, D) = $\bar{C}\,D + \bar{B}\,D + A\,D + A\,\bar{B}\,\bar{C}$
POS. F(A, B, C, D) = $(\bar{C} + D)(A + D)(\bar{B} + D)(A + \bar{B} + \bar{C})$





k) F(A, B, C, D) = $\prod(0, 4, 5, 6, 7) \bullet \prod_{\phi}(12, 14)$





SOP. F(A, B, C, D) = $A + \overline{B}\,D + \overline{B}\,C$
POS. F(A, B, C, D) = $(A + \overline{B})(A + C + D)$

Página 3_1. Se dispone de un código con pesos (7, 4, -1, -2). Calcular la función lógica mínima en dos niveles que permite indicar cuando el dígito BCD es potencia de 2.

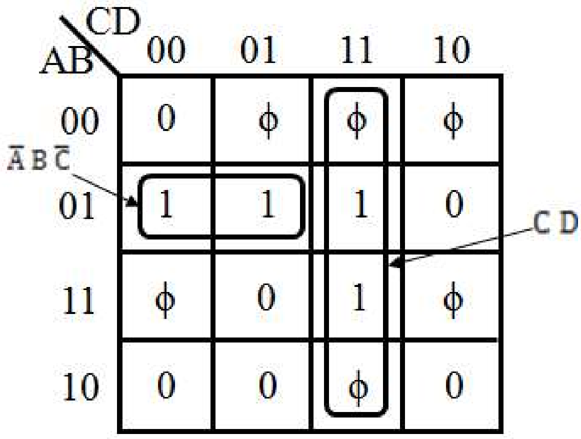
Hay que encontrar la tabla de verdad del problema y encontrar a función lógica SOP mínima con ayuda de un mapa de Karnaugh. Calculo el código BCD (7, 4, -1, -2); hay dos posibilidades para el 4 pero solo utilizo una.

D	7	4	-1	-2	Z	Decimal
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	7
2	0	1	0	1	1	5
3	0	1	1	0	0	6
4	0	1	0	0	1	4
5	1	0	0	1	0	9
6	1	0	1	0	0	10
7	1	0	0	0	0	8
8	1	1	1	1	1	15
9	1	1	0	1	0	13

Los dígitos 1 (7 en decimal), 2 (5 en decimal), 4 (4 en decimal), 8 (15 en decimal) son potencia de 2 por lo que la salida Z es 1. Para el resto de los dígitos (0, 3, 5, 6, 7, 9) la salida es 0. Para las combinaciones de valores de los bits, que no son parte del código BCD (en decimal 1, 2, 3, 11, 12, 14) el valor de la salida no importa luego es ϕ. Llamando a las entradas A (peso 7), B (peso 4), C (peso -1) y D (peso -2), en notación decimal la función queda:

$Z = F(A, B, C, D) = \sum(4, 5, 7, 15) + \sum_{\phi}(1, 2, 3, 11, 12, 14)$

Se resuelve con un mapa de Karnaugh y se encuentra una forma SOP mínima.



$F(A, B, C, D) = C\,D + \bar{A}\,B\,\bar{C}$

La forma POS es mayor (tiene tres términos suma). Queda propuesto.

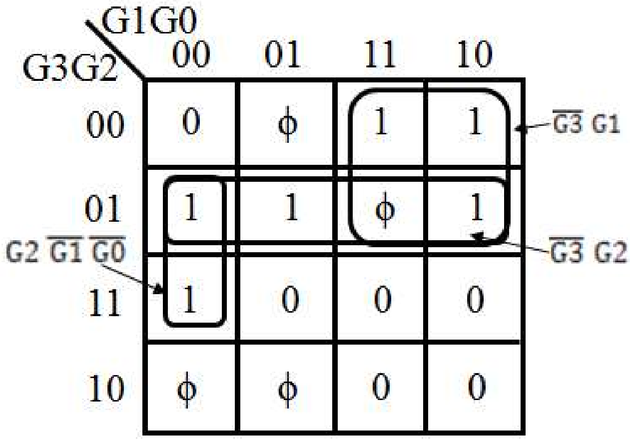
Página 3_2. Obtener la expresión lógica mínima que permite obtener si un número está en unos intervalos dados, produciendo 1 lógico en los intervalos [2, 4] y [6, 8], y 0 lógico en los intervalos [0] y [9, 13]. Dichos números están codificados mediante el código Gray.

Gray	G3	G2	G1	G0	Decimal	Z
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	ϕ
2	0	0	1	1	3	1
3	0	0	1	0	2	1
4	0	1	1	0	6	1
5	0	1	1	1	7	ϕ
6	0	1	0	1	5	1
7	0	1	0	0	4	1
8	1	1	0	0	12	1
9	1	1	0	1	13	0
10	1	1	1	1	15	0
11	1	1	1	0	14	0
12	1	0	1	0	10	0
13	1	0	1	1	11	0
14	1	0	0	1	9	ϕ
15	1	0	0	0	8	ϕ

Este problema ha sido ya estudiado y explicado en el problema 9_1(a) del tema IIa, en el que se había obtenido la tabla de verdad del problema que también muestro ahora (aunque cambio el orden de los códigos). La función lógica en notación decimal también se había calculado como:

$Z = F(G3, G2, G1, G0) = \sum(2, 3, 4, 5, 6, 12) + \sum_{\phi}(1, 7, 8, 9)$

El mapa de Karnaugh y una función lógica SOP mínima son:

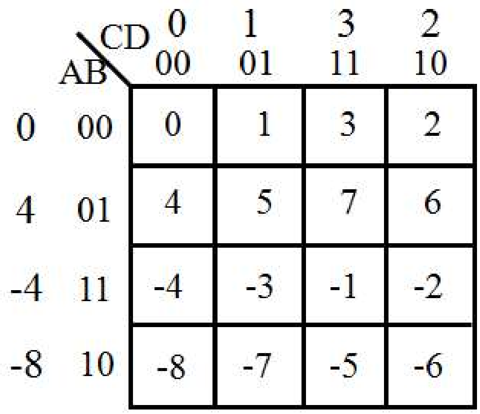


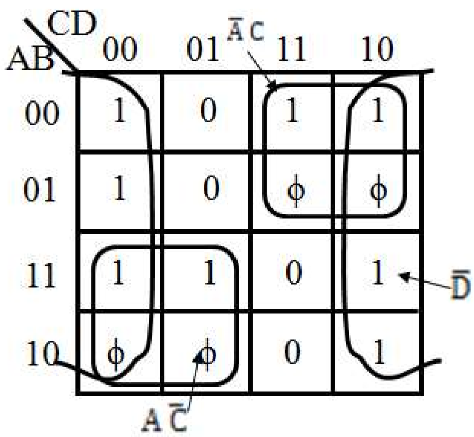
$F(G3, G2, G1, G0) = \overline{G3}\,G1 + \overline{G3}\,G2 + G2\,\overline{G1}\,\overline{G0}$

En este problema hay más funciones SOP mínimas; al menos otras dos. Sólo hay una forma mínima POS y es un literal menor. Queda propuesto.

Página 3_3. Se dispone de un número de 4 bits en complemento-2. Teniendo en cuenta que el intervalo de números válidos está entre [-6, +5] se quiere saber cuándo el número es múltiplo de 2 o de 3. Indicar la tabla de verdad del problema en notación decimal y encontrar una forma SOP mínima.

En los números en complemento-2 de 4 bits las 4 entradas A, B, C y D tienes pesos respectivos de (-8 4, 2, 1) y el número resultante tiene valores entre [-8, +7]. Como los números válidas están entre [-6, +5], la salida para -8, -5, 6 y 7 se debe considerar como ϕ.





Los números múltiplos de 2 ó 3 en el intervalo son 0 (es múltiplo de todos los números), 2, 3, 4, -2, -3, -4 y -6, que producirán 1 en la salida y el resto de valores (1, 5, -1, -5) producirán 0. Obtengo en el mapa de Karnaugh directamente donde están los números en complemento-2. Por filas tengo -8 A + 4 B, y por columnas 2 C + 1 D. En cada casilla el número será la suma de los pesos de filas y columnas. Una vez que se dónde está cada número relleno las casillas del mapa de Karnaugh con 0, 1 o ϕ, y minimizo.

$F(A, B, C, D) = \overline{D} + A\,\overline{C} + \overline{A}\,C$

La función mínima POS es más pequeña, tiene sólo dos términos suma, aunque tiene más literales. Queda propuesto.

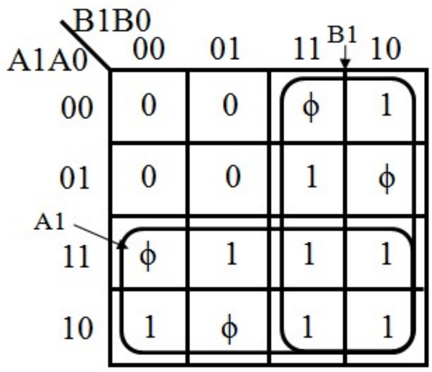
Página 4_1. Encontrar las funciones lógicas SOP mínimas que definen un circuito digital que muestra en sus salidas en binario el valor máximo de dos números A y B binarios de 2 bits, sabiendo que la suma de A y B no puede ser 3.

Este problema fue planteado en el problema de la página 9_1_c, del tema IIa. En el que se planteó el problema y se encontró la tabla de verdad, que se reproduce ahora.

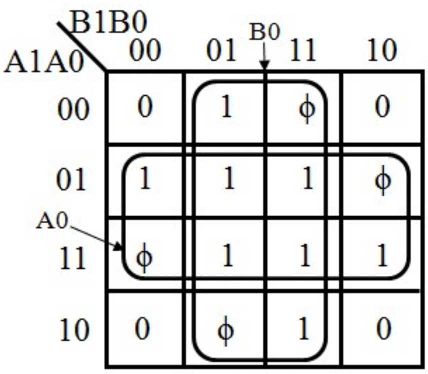
Decimal	A1	A0	B1	B0	A	B	A+B	MAX	Z1	Z0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
2	0	0	1	0	0	2	2	2	1	0
3	0	0	1	1	0	3	3	-	ϕ	ϕ
4	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
5	0	1	0	1	1	1	2	1	0	1
6	0	1	1	0	1	2	3	-	ϕ	ϕ
7	0	1	1	1	1	3	4	3	1	1
8	1	0	0	0	2	0	2	2	1	0
9	1	0	0	1	2	1	3	-	ϕ	ϕ
10	1	0	1	0	2	2	4	2	1	0
11	1	0	1	1	2	3	5	3	1	1
12	1	1	0	0	3	0	3	-	ϕ	ϕ
13	1	1	0	1	3	1	4	3	1	1
14	1	1	1	0	3	2	5	3	1	1
15	1	1	1	1	3	3	6	3	1	1

$$Z1 = F(A1, A0, B1, B0) = \sum(2, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15) + \sum_{\phi}(3, 6, 9, 12) = \prod(0, 1, 4, 5) \bullet \prod_{\phi}(3, 6, 9, 12)$$

$$Z0 = F(A1, A0, B1, B0) = \sum(1, 4, 5, 7, 11, 13, 14, 15) + \sum_{\phi}(3, 6, 9, 12) = \prod(0, 2, 8, 10) \bullet \prod_{\phi}(3, 6, 9, 12)$$



Z1



Z0

Este problema de 4 entradas y dos salidas, se puede resolver usando dos mapas de Karnaugh, uno para Z1 y otro para Z0. No se considera aquí, la opción de resolver de forma conjunta los dos mapas, que podría hacerse usando herramientas de minimización en dos niveles como espresso. La solución queda:

Z1 = F1(A1, A0, B1, B0) = A1 + B1
Z0 = F0(A1, A0, B1, B0) = A0 + B0

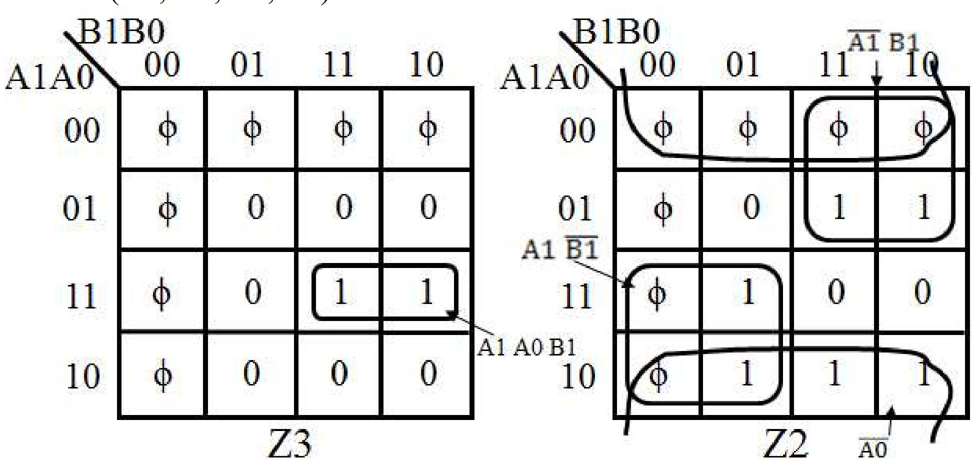
Página 4_2. Encontrar las funciones lógicas mínimas en dos niveles que definen las salidas de un circuito que calcula la operación aritmética Z = 2 * A + B, donde A y B son números binarios positivos de 2 bits con la condición adicional de que ninguna de las dos entradas puede tener el valor 0.

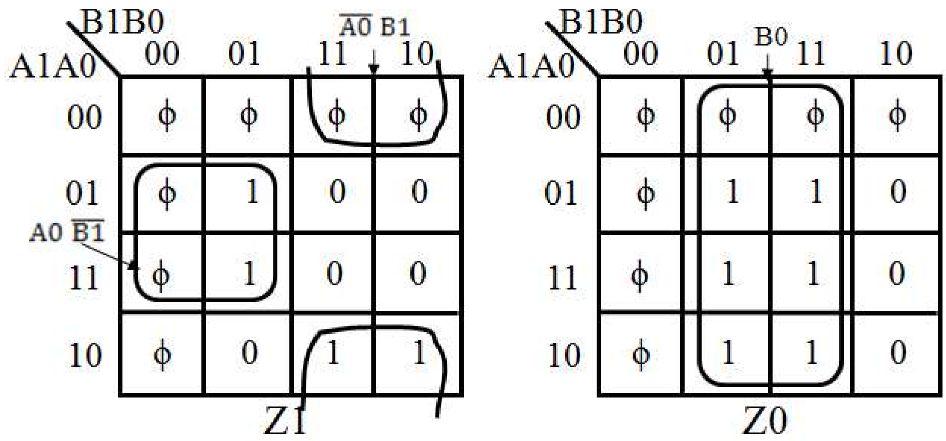
En este problema se tienen 4 bits de entrada, dos correspondientes a A (A1A0) y 2 a B (B1B0), con valores entre 0 y 3. El número de salidas Z depende del valor máximo, que se produce cuando A y B toman el valor 3. Así, Z_{max} = 2 * 3 + 3 = 9, por lo que se necesitan 4 bits (Z3 Z2 Z1 Z0) para codificar Z en binario. Como A o B no pueden ser 0, para esos valores el resultado en Z es "don't care" (ϕ). Se puede plantear el problema en una tabla de verdad, pero yo lo hago en el mapa de Karnaugh donde, para cada casilla, calculo el valor decimal de Z (2*A+B), que luego desarrollo en binario en las salidas Z3, Z2, Z1 y Z0.

A1A0 \ B1B0	0 00	1 01	3 11	2 10
0 00	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
1 01	ϕ	3	5	4
3 11	ϕ	7	9	8
2 10	ϕ	5	7	6

Las funciones mínimas SOP son:

Z3 = F3(A1, A0, B1, B0) = A1 A0 B1
Z2 = F2(A1, A0, B1, B0) = $\overline{A1}\ B1 + A1\ \overline{B1} + \overline{A0}$
Z1 = F1(A1, A0, B1, B0) = A0 $\overline{B1}$ + $\overline{A0}$ B1
Z0 = F0(A1, A0, B1, B0) = B0



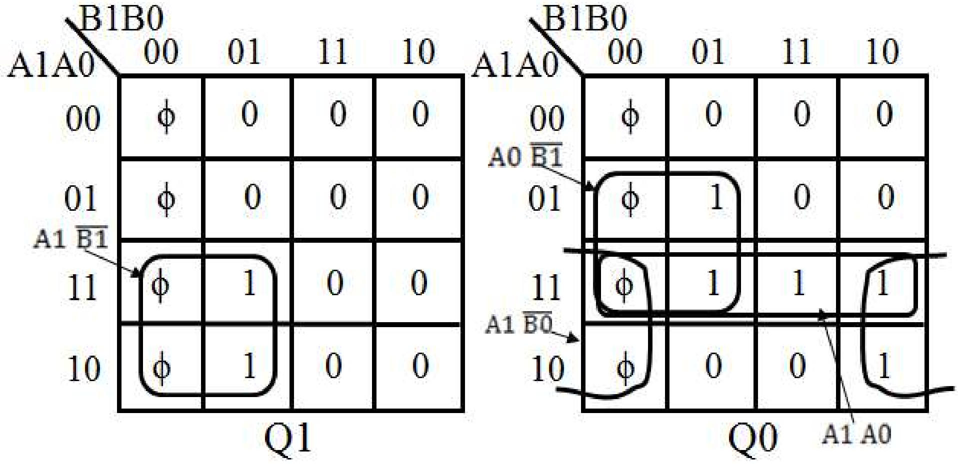


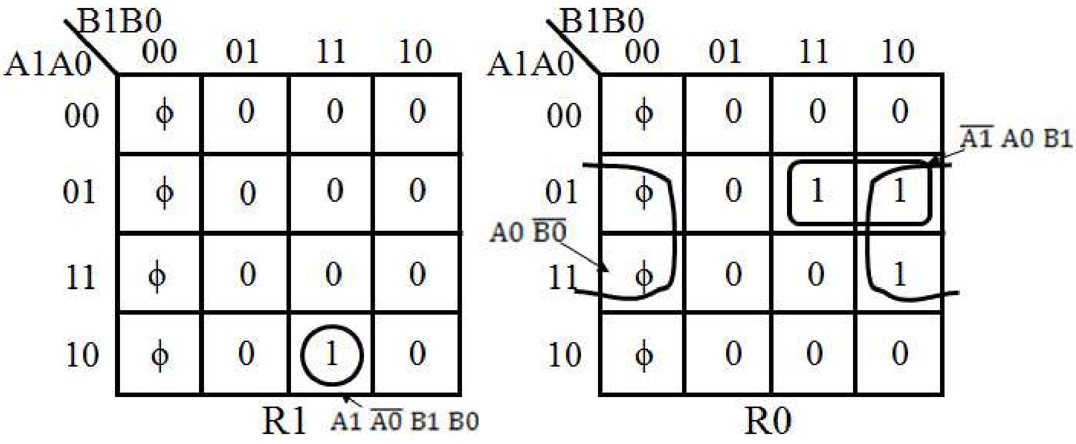
Página 4_3. Encontrar las funciónes lógicas que definen un sistema que genera la división A/B de dos números positivos binarios A (A1A0) y B (B1B0) de dos bits (sabiendo que B no puede ser 0), encontrando el cociente de la división Q (Q1Q0) y el resto R (R1R0), también como números positivos binarios de 2 bits.

Este problema se podría plantear en una tabla de verdad, pero yo lo hago en el mapa de Karnaugh donde, para cada fila indica el valor de A y por columnas el valor de B. Dentro de las casillas indico los valores del cociente y del resto en decimal en formato Q/R, que luego desarrollo en binario para los mapas de Q1, Q0, R1 y R0. Como la división entre 0 no es posible, para la columna de B = 0 (B1B0 = 00) todas las salidas son “don’t care” (ϕ).

	B1B0	0	1	3	2
	A1A0	00	01	11	10
0	00	ϕ	0/0	0/0	0/0
1	01	ϕ	1/0	0/1	0/1
3	11	ϕ	3/0	1/0	1/1
2	10	ϕ	2/0	0/2	1/0

Q/R





Las funciones mínimas SOP son:

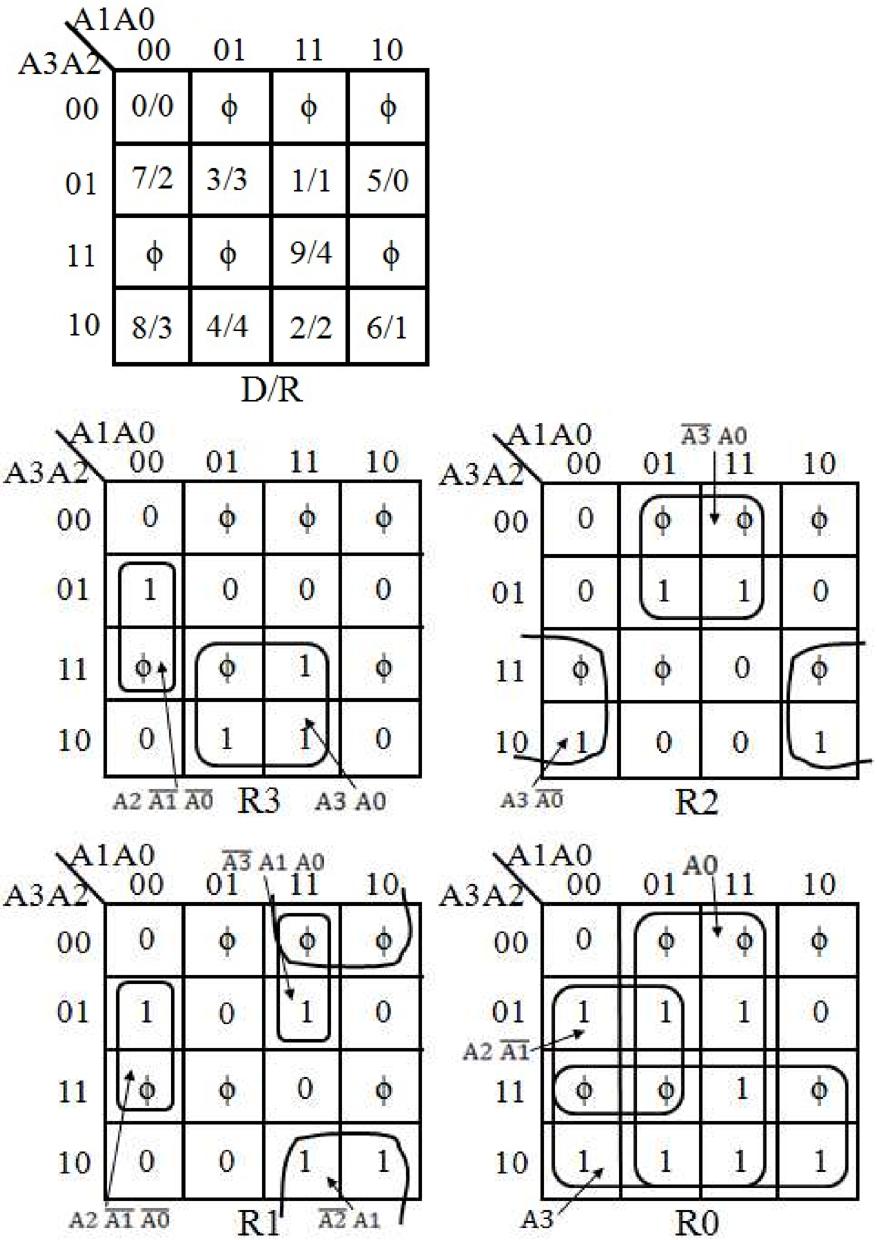
Q1 = F3(A1, A0, B1, B0) = $A1\ \overline{B1}$
Q0 = F2(A1, A0, B1, B0) = $A0\ \overline{B1} + A1\ \overline{B0} + A1\ A0$
R1 = F1(A1, A0, B1, B0) = $A1\ \overline{A0}\ B1\ B0$
R0 = F0(A1, A0, B1, B0) = $A0\ \overline{B0} + \overline{A1}\ A0\ B1$

Página 5_1. Dado un dígito D (entre 0 y 9) en código BCD con pesos (8, 7, -2, -4) encontrar las funciones lógicas SOP mínimas que permiten encontrar el resto de la división D/5 en ese mismo código.

El código BCD con pesos (8, 7, -2, -4) ya apareció en el tema I, problema 2_3. En este problema, hay que tomar los dígitos decimales D (de 0 a 9) codificados en este código en 4 entradas D3, D2, D1 y D0, y encontrar el resto de la división de D entre 5. En esta operación el resto puede tomar valores entre 0 y 4 en el código BCD de entrada, por lo que la salida R necesita 4 bits (R3 R2 R1 R0) que codifiquen números entre 0 y 4 en binario.

	8	7	-2	-4		8	7	-2	-4
D	A3	A2	A1	A0	D mod 5	R3	R2	R1	R0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
2	1	0	1	1	2	1	0	1	1
3	0	1	0	1	3	0	1	0	1
4	1	0	0	1	4	1	0	0	1
5	0	1	1	0	0	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1	0	1	1	1
7	0	1	0	0	2	1	0	1	1
8	1	0	0	0	3	0	1	0	1
9	1	1	1	1	4	1	0	0	1

Como en el problema 3_1, al introducir este problema en los mapas de Karnaugh, las combinaciones que no pertenecen al código BCD no se usan y para ellas las salidas se definen como "don't care" (ϕ). En las casillas de mapa de Karnaugh en formato D/R se indica el dígito de entrada (D) y el resultado (R). En los siguientes mapas se indican los valores para R2, R1 y R0 y se minimizan las funciones lógicas.



R3 = F3(A3, A2, A1, A0) = $A3\ A0 + A2\ \overline{A1}\ \overline{A0}$
R2 = F2(A3, A2, A1, A0) = $A3\ \overline{A0} + \overline{A3}\ A0$
R1 = F1(A3, A2, A1, A0) = $\overline{A3}\ A1\ A0 + A2\ \overline{A1}\ \overline{A0} + \overline{A2}\ A1$
R0 = F0(A3, A2, A1, A0) = $A3 + A0 + \ A2\ \overline{A1}$

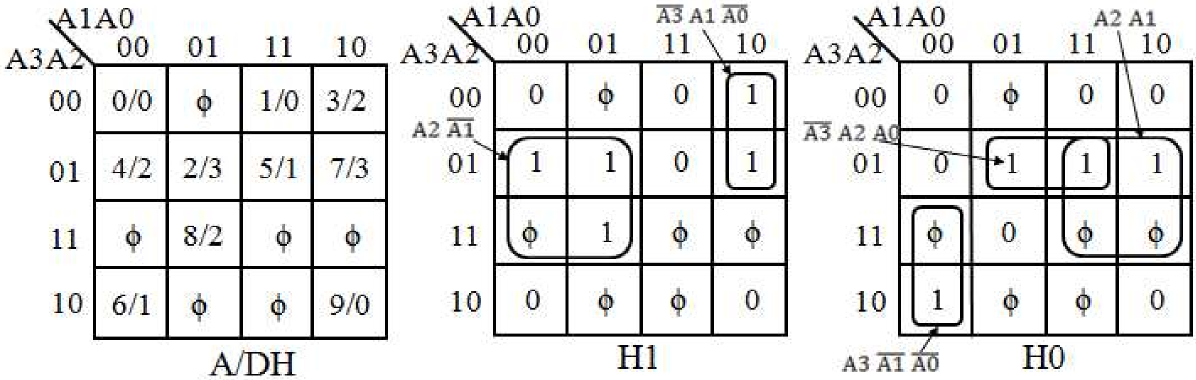
Página 5_2. Dadas las entradas A (A3 A2 A1 A0) correspondientes a los bits del código BCD con pesos (6, 4, 3, -2), hay que encontrar las funciones mínimas en dos niveles que generen para cada dígito de entrada la distancia de Hamming (entre 0 y 4) en binario con la codificación del mismo dígito en el código BCD con pesos (7, 3, 2, -1). En el caso de que un dígito se pueda codificar de varias formas hay que elegir solo una de ellas, indicando cuál es.

El enunciado requiere generar las combinaciones en bits A3 A2 A1 A0 para el código BCD con pesos (6, 4, 3, -2), y B3 B2 B1 B0 para el código BCD con pesos (7, 3, 2, -1), y calcular la distancia de Hamming DH (número de posiciones distintas) entre los mismos dígitos de A y B. Los dígitos 4 y 7 de A, y los dígitos 2 y 9 de B se pueden formar mediante dos combinaciones, por lo que existen varias posibilidades distintas para este problema (hasta 16). El problema está resuelto con las combinaciones que aparecen en la tabla.

Ya que DH tiene valores entre 0 (todos los bits iguales) y 4 (todos los bits distintos). Para codificar el valor en binario de DH necesito en principio 3 bits H2, H1 y H0, pero si DH no fuese nunca 4 bastaría con 2 bits. El problema se representa en una tabla como esta:

	6	4	3	-2	7	3	2	-1		4	2	1
D	A3	A2	A1	A0	B3	B2	B1	B0	DH	H2	H1	H0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	1	0	3	0	1	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1	2	0	1	0
5	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1
6	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
7	0	1	1	0	1	0	0	0	3	0	1	1
8	1	1	0	1	1	0	1	1	2	0	1	0
9	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0

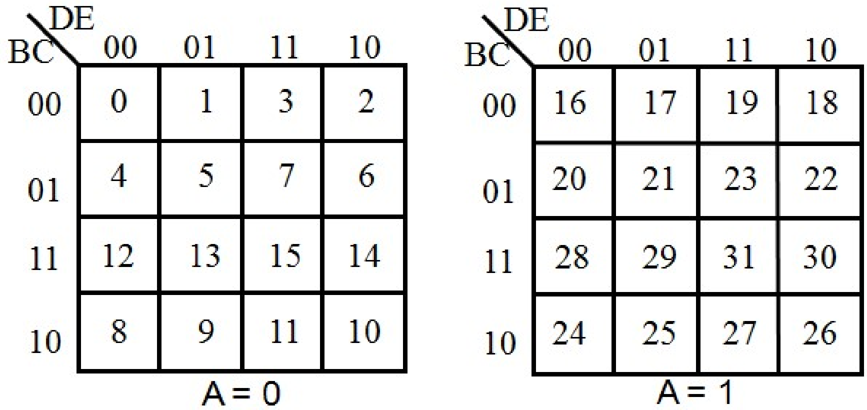
En esta tabla se ve que DH nunca es 4, por lo que H2 es 0 y no hace falta generar su mapa de Karnaugh. En los mapas de Karnaugh, las combinaciones de la entrada A que no pertenecen al código BCD no se usan y para ellas las salidas se definen como “don’t care” (ϕ). En las casillas de mapa de Karnaugh en formato A/DH se indica el dígito decimal de entrada (A) y el resultado (DH) para ese dígito. En los siguientes mapas se indican los valores para H1 y H0 y se minimizan las funciones lógicas.



H2 = F2(A3, A2, A1, A0) = 0
H1 = F1(A3, A2, A1, A0) = $A2\,\overline{A1} + \overline{A3}\,A1\,\overline{A0}$
H0 = F0(A3, A2, A1, A0) = $A2\,A1 + A3\,\overline{A1}\,\overline{A0} + \overline{A3}\,A2\,A0$ -- Hay más funciones mínimas

Página 6_1. Minimizar las siguientes funciones lógicas (formas SOP y POS)

Las primeras 4 funciones de este ejercicio son de funciones de 5 variables que, aunque se puede hacer de otras formas, suelo disponer como el siguiente mapa de Karnaugh, siendo A la variable más significativa y E la menos significativa. Dentro de cada casilla está su notación decimal, para minimizar se rellenará con 1, 0 ó ϕ,



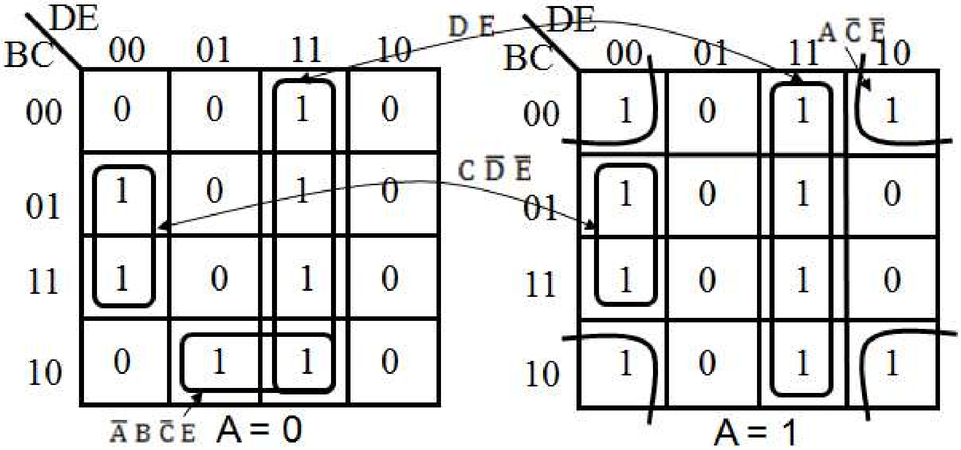
a) F(A, B, C, D, E) = ∑(3, 4, 7, 9, 11, 12, 15, 16, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 27, 28, 31)

Forma SOP. Hay implicantes primos esenciales para las casillas 3 (D E), 4 ($C\,\overline{D}\,\overline{E}$) y 9 ($\overline{A}\,B\,\overline{C}\,E$).

$F(A, B, C, D, E) = D\,E + C\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,E + \cdots$

Una vez cubiertas las casillas por estos implicantes, el resto de 1s se puede cubrir con un único implicante ($A\,\overline{C}\,\overline{E}$), que genera la solución mínima.

$F(A, B, C, D, E) = D\,E + C\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,E + A\,\overline{C}\,\overline{E}$

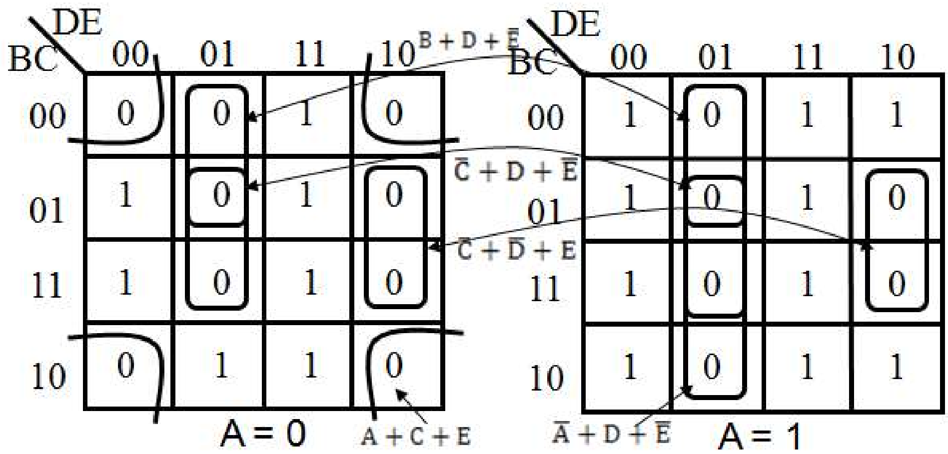


Forma POS. Hay implicantes primos esenciales para las casillas 8 ($A + C + E$), 13 ($\overline{C} + D + \overline{E}$), 22 ($\overline{C} + \overline{D} + E$) y 25 ($\overline{A} + D + \overline{E}$).

$F(A, B, C, D, E) = (A + C + E)\,(\overline{C} + D + \overline{E})\,(\overline{C} + \overline{D} + E)(\overline{A} + D + \overline{E}) \cdot\ \ldots$

Sólo queda la casilla 1 por cubrir. Se puede cubrir de dos formas, pero una es un 2-cubo y otra un 1-cubo. Elijo la más grande, el 2-cubo, y obtengo la única función mínima:

$F(A, B, C, D, E) = (A + C + E)\,(\overline{C} + D + \overline{E})\,(\overline{C} + \overline{D} + E)\,(\overline{A} + D + \overline{E})\,(B + D + \overline{E})$



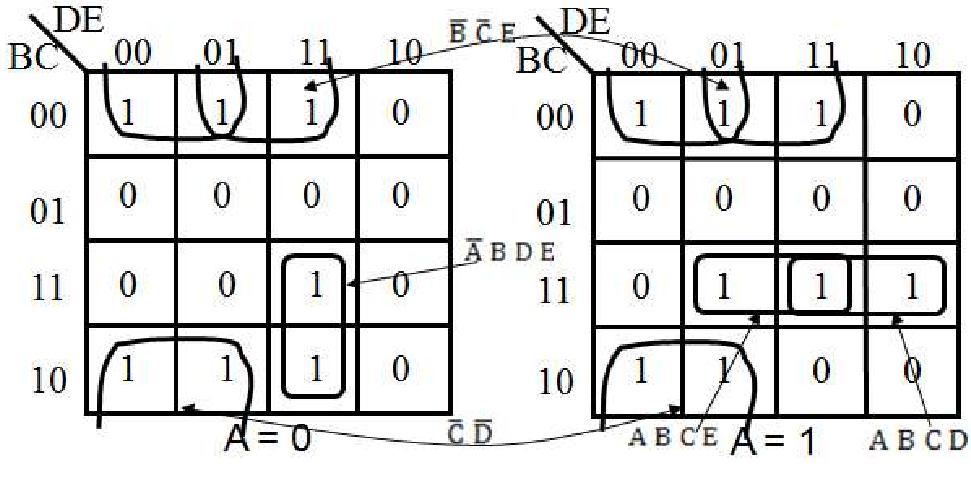
b) F(A, B, C, D, E) = ∑(0, 1, 3, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 19, 24, 25, 29, 30, 31)

Forma SOP. Hay implicantes primos esenciales para las casillas 0 ($\overline{C}\,\overline{D}$), 19 ($\overline{B}\,\overline{C}\,E$) y 30 (A B C D).

F(A, B, C, D, E) = $\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}\,E + A\,B\,C\,D + \cdots$

El resto de 1s se puede cubrir de forma mínima con dos 1-cubos. Uno es forzado ($\overline{A}\,B\,D\,E$), y hay dos opciones para el otro (2 funciones mínimas). Elijo uno (A B C E), y obtengo la solución mínima.

F(A, B, C, D, E) = $\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}\,E + A\,B\,C\,D + \overline{A}\,B\,D\,E + A\,B\,C\,E$

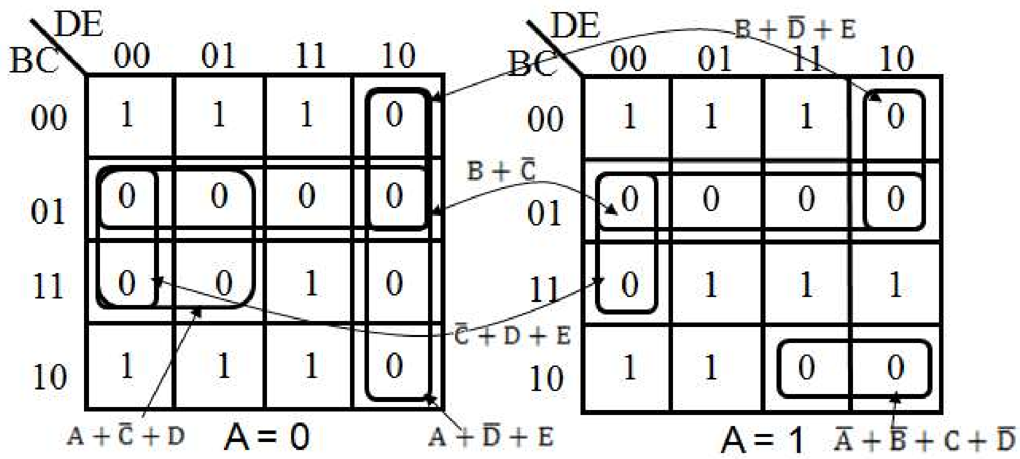


Forma POS. Hay implicantes primos esenciales para las casillas 7 ($B + \overline{C}$), 13 ($A + \overline{C} + D$), 27 ($\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D}$), y 28 ($\overline{C} + D + E$).

F(A, B, C, D, E) = $(B + \overline{C})(A + \overline{C} + D)(\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D})(\overline{C} + D + E) \cdot$ ...

Las casillas que quedan por cubrir se pueden cubrir con varias combinaciones de dos 2-cubos. Elijo una y genero una de las funciones mínimas:

F(A, B, C, D, E) = $(B + \overline{C})(A + \overline{C} + D)(\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D})(\overline{C} + D + E)(A + \overline{D} + E)(B + \overline{D} + E)$



c) F(A, B, C, D, E) = ∑(7,8,9,12,13,14,19,23,24,27,29,30) + ∑$_\phi$(1,10,17,26,28,31)

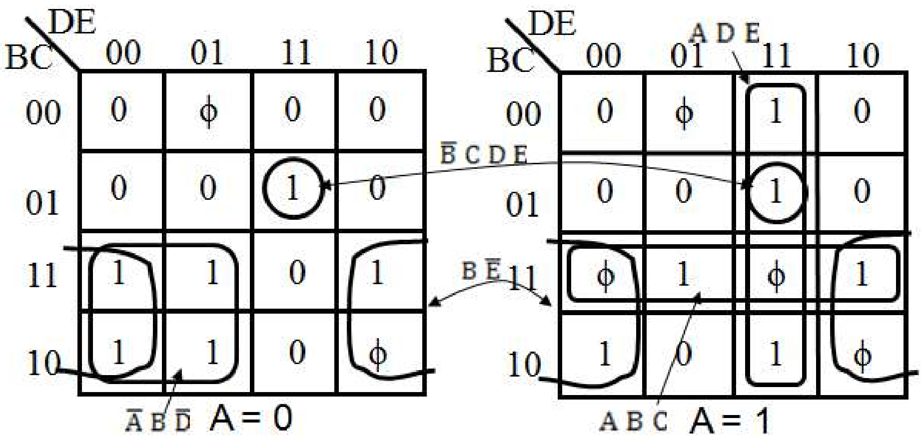
Forma SOP. Hay implicantes primos esenciales para las casillas 7 ($\overline{B}$ C D E) y 14 (B $\overline{E}$).

F(A, B, C, D, E) = $\overline{B}\,C\,D\,E + B\,\overline{E} + \cdots$

Además, hay dos implicantes primos que son claramente mejores para las casillas 9 ($\overline{A}$ B $\overline{D}$) y 19 (A D E).

F(A, B, C, D, E) = $\overline{B}\,C\,D\,E + B\,\overline{E} + \overline{A}\,B\,\overline{D} + A\,D\,E + \cdots$

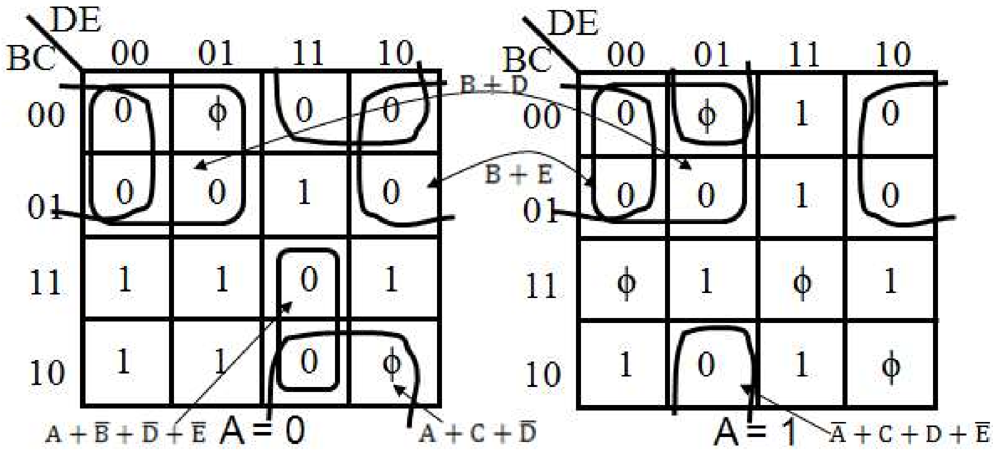
El último 1 que queda sin cubrir se puede cubrir por dos 2-cubos. Elijo uno de ellos (A B C) y genero una solución mínima. F(A, B, C, D, E) = $\overline{B}\,C\,D\,E + B\,\overline{E} + \overline{A}\,B\,\overline{D} + A\,D\,E + A\,B\,C$



Forma POS. Hay implicantes primos esenciales para las casillas 5 (B + D), 6 (B + E) y 25 ($\overline{A}$ + C + D + $\overline{E}$).

F(A, B, C, D, E) = $(A + B + D)(B + E)(\overline{A} + C + D + \overline{E}) \cdot$ ...

Las 3 casillas que quedan se pueden cubrir de varias formas usando un 2-cubo y un 1-cubo. Elijo para la casilla 3 (A + C + $\overline{D}$), y para la casilla 15 (A + $\overline{B}$ + $\overline{D}$ + $\overline{E}$) y genero una de las funciones mínimas:
F(A, B, C, D, E) = $(B + D)(B + E)(\overline{A} + C + D + \overline{E})(A + C + \overline{D})(A + \overline{B} + \overline{D} + \overline{E})$



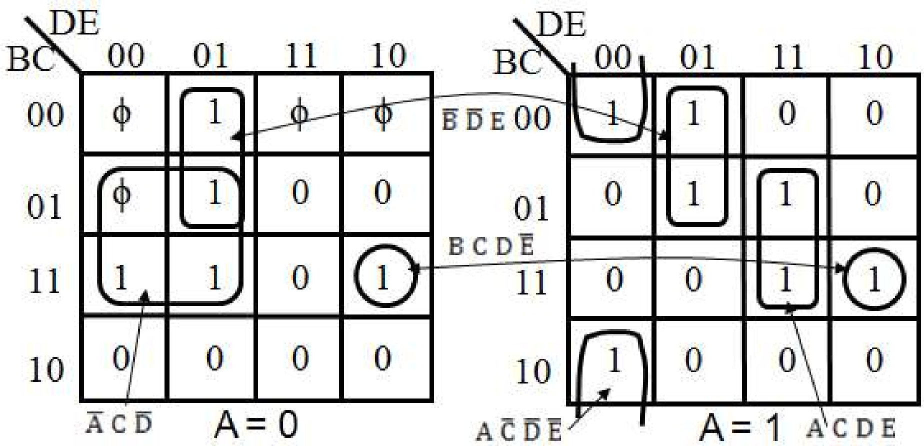
d) F(A, B, C, D, E) = ∑(1,5,12,13,14,16,17,21,23,24,30,31) + $\sum_\phi$(0,2,3,4)

Forma SOP. Hay implicantes primos esenciales para las casillas 13 ($\bar{A}\,C\,\bar{D}$) y 24 ($A\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}$).

F(A, B, C, D, E) = $\bar{A}\,C\,\bar{D} + A\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E} + \cdots$

Para el resto de los 1s se puede aplicar la regla 2. Se puede empezar por la casilla 1 o por la casilla 14, obteniendo la misma solución. Utilizo la casilla 1, para cubrirla hay tres implicantes primos 2-cubos, pero lo mejor es utilizar $\bar{B}\,\bar{D}\,E$, que también cubre a las casillas 17 y 21. Aplico el mismo razonamiento y uso $A\,C\,D\,E$ para la casilla 23 (y 31), y ahora $B\,C\,D\,\bar{E}$ para la casilla 30 (y 14), y obtengo la solución mínima de la función.

F(A, B, C, D, E) = $\bar{A}\,C\,\bar{D} + A\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E} + \bar{B}\,\bar{D}\,E + A\,C\,D\,E + B\,C\,D\,\bar{E}$

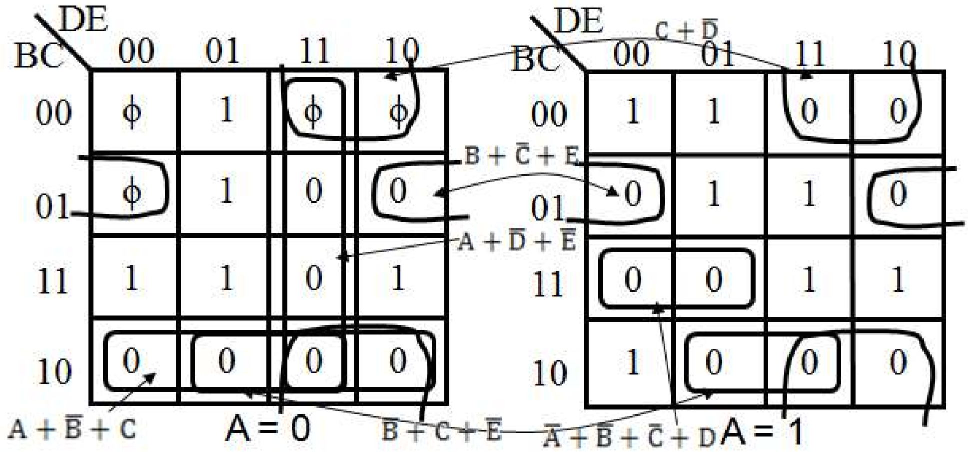


Forma POS. Hay implicantes primos esenciales para las casillas 15 ($A + \bar{D} + \bar{E}$) y 26 ($C + \bar{D}$).

F(A, B, C, D, E) = $(A + \bar{D} + \bar{E})(C + \bar{D}) \cdot$ ...

Aplico la regla 2 sobre la casilla 22 y elijo $(B + \bar{C} + E)$. Ahora, elijo $(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D)$ para la casilla 28 y para $(\bar{B} + C + \bar{E})$ la casilla 25. Solo queda por cubrir la casilla 12 que se puede cubrir de 2 maneras (2-cubos); elijo una de ellas $(A + \bar{B} + C)$ y consigo una de las funciones mínimas.

F(A, B, C, D, E)=$(A + \bar{D} + \bar{E})(C + \bar{D})(B + \bar{C} + E)\,(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D)(\bar{B} + C + \bar{E})(A + \bar{B} + C)$



Las dos últimas funciones son de 6 entradas. Aunque se puede hacer de otras formas, utilizo 4 mapas de 4 variables en cuadrado, y saco las entradas más significativas A y B fuera del mapa con valores 00, 01 10 y 11. Las variables internas de los 4 mapas son siempre C, D, E y F, en ese orden. Dentro de cada casilla está su notación decimal; para minimizar se rellenará con 1, 0 ó ϕ.

CD \ EF	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

AB = 00

CD \ EF	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

AB = 01

CD \ EF	00	01	11	10
00	32	33	35	34
01	36	37	39	38
11	44	45	47	46
10	40	41	43	42

AB = 10

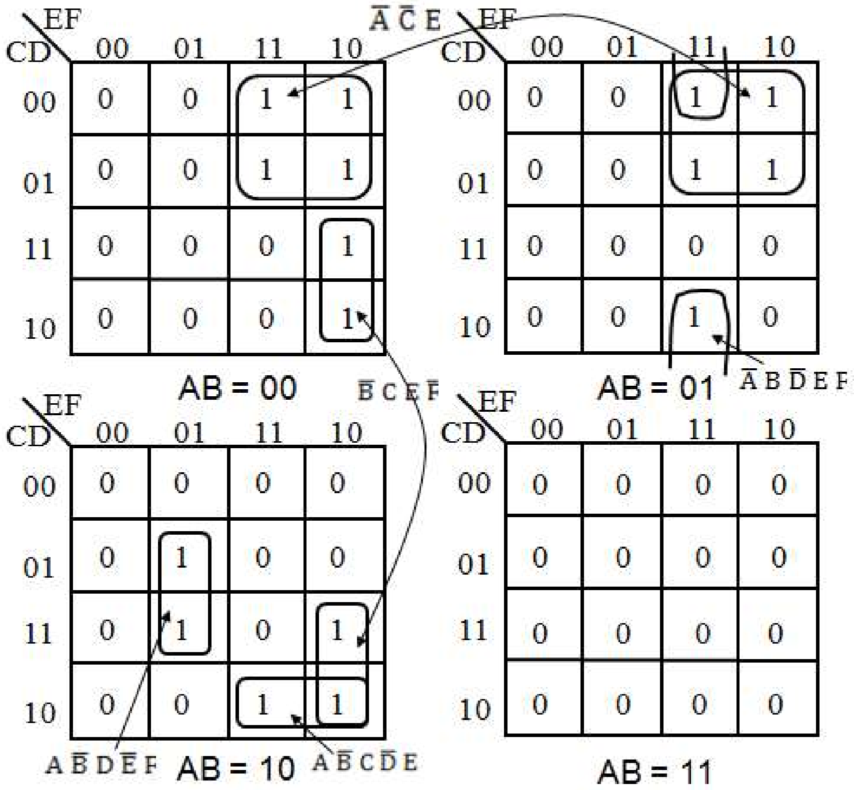
CD \ EF	00	01	11	10
00	48	49	51	50
01	52	53	55	54
11	60	61	63	62
10	56	57	59	58

AB = 11

e) Z (B, C, D, E, F) = ∑(2, 3, 6, 7, 10, 14, 18, 19, 22, 23, 27, 37, 42, 43, 45, 46)

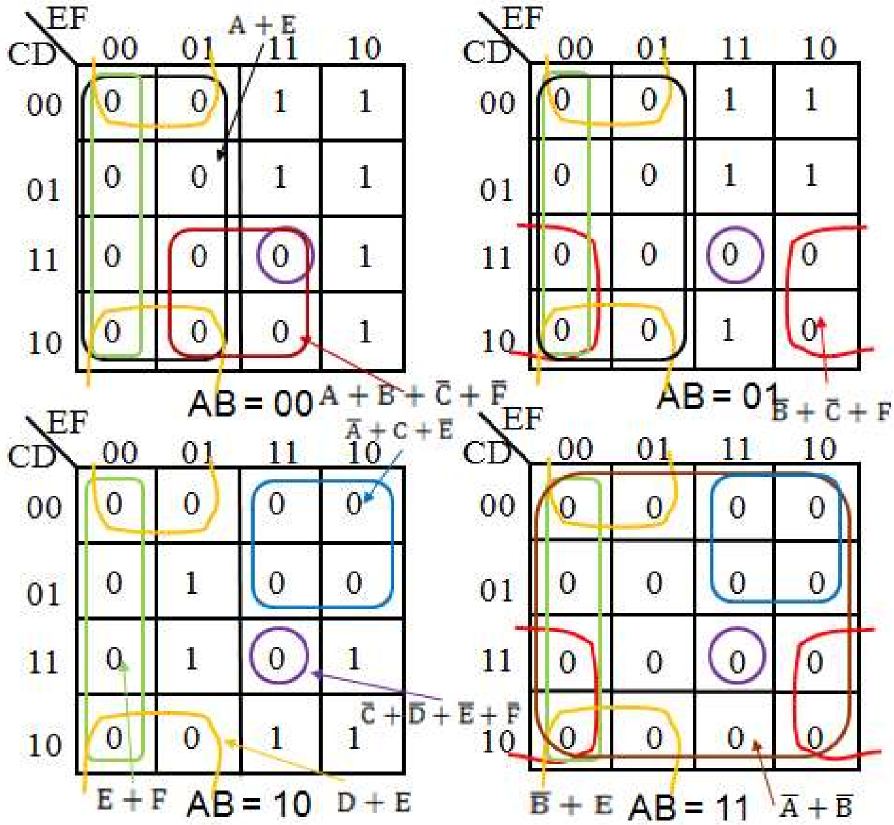
La forma SOP se consigue usando implicantes primos esenciales para las casillas 3 ($\overline{A}\,\overline{C}\,E$), 27 ($\overline{A}\,B\,\overline{D}\,E\,F$), 37 ($A\,\overline{B}\,D\,\overline{E}\,F$), 43 ($A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E$) y 46 ($\overline{B}\,C\,E\,\overline{F}$).

Z(A, B, C, D, E, F) = $\overline{A}\,\overline{C}\,E + \overline{A}\,B\,\overline{D}\,E\,F + A\,\overline{B}\,D\,\overline{E}\,F + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E + \overline{B}\,C\,E\,\overline{F}$



La forma POS tiene implicantes primos esenciales para las casillas 5 $(A + E)$, 11 $(A + B + \bar{C} + \bar{F})$, 26 $(\bar{B} + \bar{C} + F)$, 41 $(D + E)$, 44 $(E + F)$ y 59 $(\bar{A} + \bar{B})$.

$Z(A, B, C, D, E, F) = (A + E)\ (A + B + \bar{C} + \bar{F})\ (\bar{B} + \bar{C} + F)\ (D + E)\ (E + F)\ (\bar{A} + \bar{B}) \cdot\ ...$



Quedan 6 casillas por cubrir. Se pueden cubrir de forma mínima de una única forma usando dos implicantes primos: uno para el cuadrado no cubierto del mapa AB = 10 y 11 $(\overline{A} + C + \overline{E})$, y otro para las casillas 15 de los 4 mapas $(\overline{C} + \overline{D} + \overline{E} + \overline{F})$. La función mínima queda:

$$Z(A, B, C, D, E, F) = (A + E)\,(A + B + \overline{C} + \overline{F})\,(\overline{B} + \overline{C} + F)\,(D + E)\,(E + F)\,(\overline{A} + \overline{B})\,(\overline{A} + C + \overline{E})\,(\overline{C} + \overline{D} + \overline{E} + \overline{F})$$

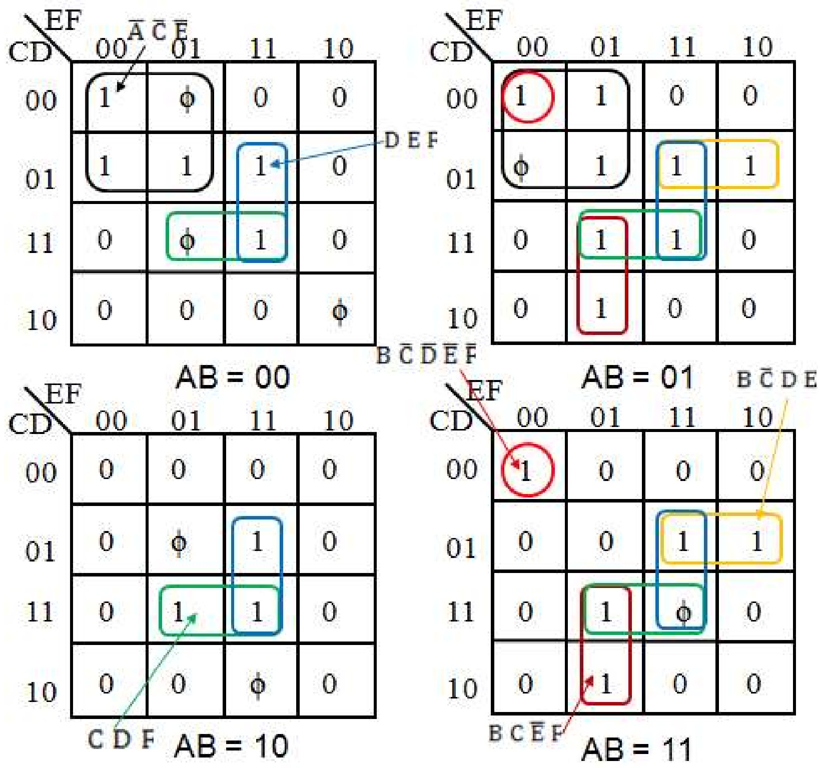
f) $Z(A, B, C, D, E, F) = \sum(0,4,5,7,15,16,17,21,22,23,25,29,31,39,45,47,48,54,55,57,61) + \sum_{\phi}(1, 10, 13, 20, 37, 43, 63)$

La forma SOP tiene implicantes primos esenciales para la casilla 0 $(\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{E})$, 48 $(B\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F})$, 54 $(B\,\overline{C}\,D\,E)$ y 57 $(B\,C\,\overline{E}\,F)$.

$$Z(A, B, C, D, E, F) = \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{E} + B\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F} + B\,\overline{C}\,D\,E + B\,C\,\overline{E}\,F + \cdots$$

Quedan seis 1s por cubrir, se puede hacer con dos implicantes primos, y la función mínima se consigue si ambos son 3-cubos. Hay varias formas de hacerlo, escojo $(C\,D\,F)$ y $(D\,E\,F)$, y la función SOP mínima queda:

$$Z(A, B, C, D, E, F) = \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{E} + B\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F} + B\,\overline{C}\,D\,E + B\,C\,\overline{E}\,F + C\,D\,F + D\,E\,F$$

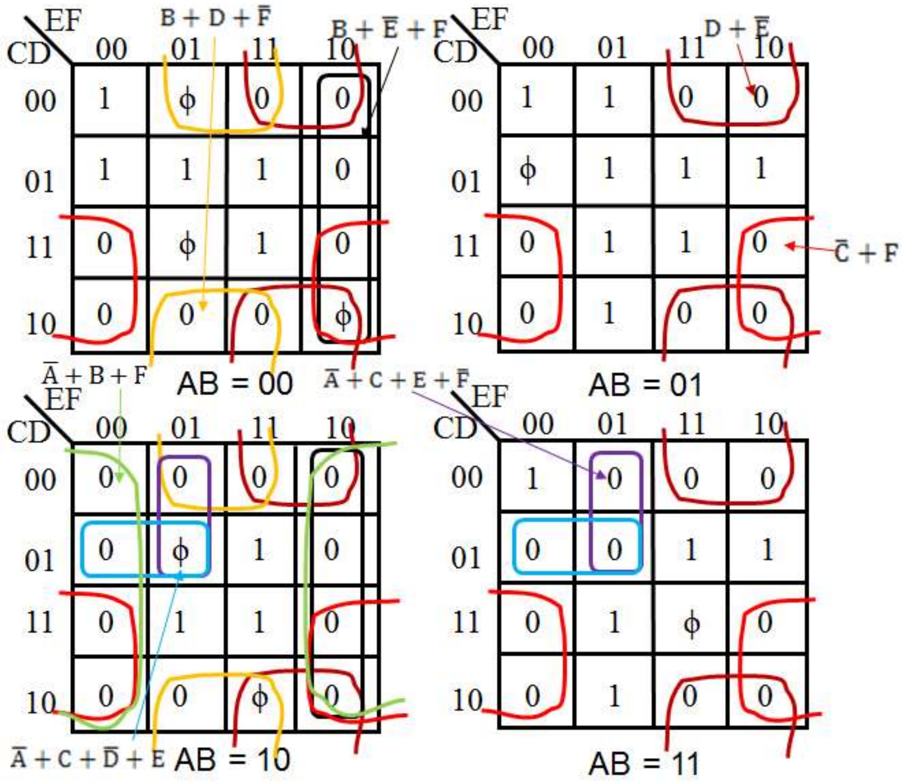


La forma POS tiene implicantes primos esenciales para las casillas 6 $(B + \overline{E} + F)$, 18 $(D + \overline{E})$, 30 $(\overline{C} + F)$

$$Z(A, B, C, D, E, F) = (B + \overline{E} + F)(D + \overline{E})(\overline{C} + F) \cdot\ \ldots$$

Para la casilla 9, el mejor implicante primo (que no único) es $(B + D + \overline{F})$, que cubre también las casillas 33 y 41. El resto de casillas se cubre con tres términos; aunque hay varias posibilidades elijo $(\bar{A} + B + F)$ para la casilla 32, y $(\bar{A} + C + \bar{D} + E)$ y $(\bar{A} + C + E + \bar{F})$ para las tres casillas restantes del mapa AB = 11. Una de las funciones mínimas es:

$$Z(A, B, C, D, E, F) = (B + \bar{E} + F)(D + \bar{E})(\bar{C} + F)(B + D + \bar{F})(\bar{A} + B + F)(\bar{A} + C + \bar{D} + E)(\bar{A} + C + E + \bar{F})$$



Página 6_2. Un circuito tiene cinco señales lógicas A, B, C, D, E que bajo una serie de condiciones activan una señal de salida F. Se sabe que existen ciertas relaciones entre las señales de entrada que no se producen nunca:
- Que A sea distinto de B, y que C sea igual a D simultáneamente.
- Que A sea igual a C, y que B, D y E sean iguales simultáneamente.
La salida F se activa con las siguientes especificaciones (en el resto de los casos F permanece inactiva):
- B es distinto de D, y A, B y E son iguales, simultáneamente.
- C es igual a D, y A es distinto de E, simultáneamente.
- B es distinto de C, y D es distinto de E, simultáneamente.
Encontrar una forma mínima SOP para F.

Las primeras relaciones indican las condiciones que no se pueden dar en las entradas, que son los "don't care" (ϕ) del problema. Obtengo los minterms correspondientes a cada condición:

- A distinto de B, y C igual a D simultáneamente

16	8	4	2	1	
A	B	C	D	E	minterms
0	1	0	0	X	8, 9
0	1	1	1	X	14, 15
1	0	0	0	X	16, 17
1	0	1	1	X	22, 23

- A igual a C, y B, D y E iguales simultáneamente.

16	8	4	2	1	
A	B	C	D	E	minterms
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	11
1	0	1	0	0	20
1	1	1	1	1	31

Las siguientes relaciones indican las combinaciones de las entradas que producen 1 en la salida. Obtengo los minterms correspondientes a cada condición.

- B distinto de D, y A, B y E iguales, simultáneamente.

16	8	4	2	1	
A	B	C	D	E	minterms
0	0	X	1	0	2, 6
1	1	X	0	1	25, 29

- C igual a D, y A distinto de E, simultáneamente.

16	8	4	2	1	
A	B	C	D	E	minterms
0	X	0	0	1	1, 9
1	X	0	0	0	16, 24
0	X	1	1	1	7, 15
1	X	1	1	0	22, 30

- B distinto de C, y D distinto de E, simultáneamente.

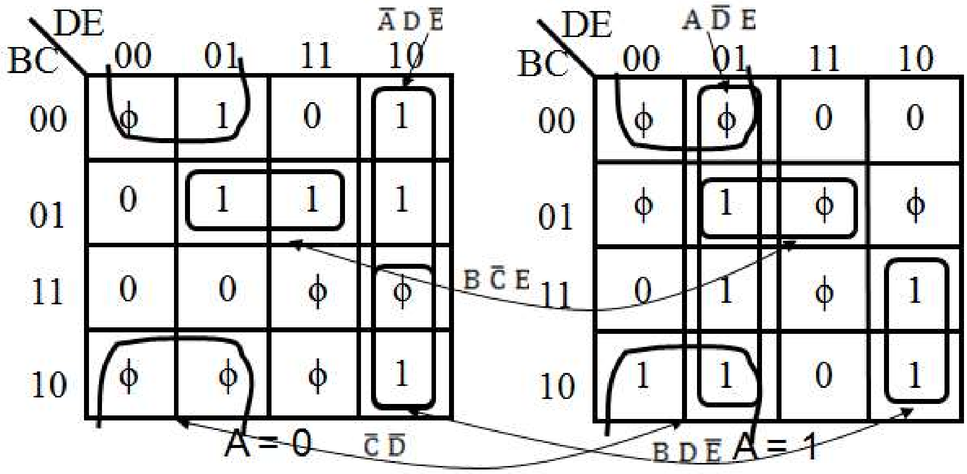
16	8	4	2	1	
A	B	C	D	E	minterms
X	0	1	0	1	5, 21
X	0	1	1	0	6, 22
X	1	0	0	1	9, 25
X	1	0	1	0	10, 26

Calculamos la función total, teniendo en cuenta que si un minterm aparece como ϕ y como 1, tiene preferencia el valor ϕ, ya que si una condición no se da en las entradas no está forzada a generar 1 en la salida. Tengo la función y calculo una forma mínima SOP con el mapa de Karnaugh de 5 variables.

$F(A, B, C, D, E) = \sum(1, 2, 5, 6, 7, 10, 21, 24, 25, 26, 29, 30) + \sum_{\phi}(0, 8, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 23, 31)$

Al minimizar, aunque no hay implicantes primos esenciales, hay algunos implicantes primos mejores que otros para varias casillas (regla 2): las casillas 2 ($\overline{A}\ D\ \overline{E}$) y 29 ($A\ \overline{D}\ E$) se cubren mejor por los implicantes primos indicados (cubren la casilla indicada y alguna más que las demás posibilidades, y con el mayor tamaño de implicante).

$F(A, B, C, D, E) = \overline{A}\, D\, \overline{E} + A\, \overline{D}\, E + \cdots$



Ahora no encuentro una forma clara de continuar, luego tomo una casilla y hago pruebas sobre una casilla (regla 3), quedándome con la solución más pequeña. Se puede hacer con muchas casillas, pero yo elijo la casilla 1. Se puede cubrir con $\overline{C}\, \overline{D}$ o con $\overline{B}\, \overline{D}\, E$.

- Al seleccionar $\overline{C}\, \overline{D}$, hay que utilizar $B\, \overline{C}\, E$ como mejor opción para la casilla 5 (también cubre la casilla 7, regla 2) y $B\, D\, \overline{E}$ para cubrir a la vez las dos casillas restantes 26 y 30.
- Si se selecciona $\overline{B}\, \overline{D}\, E$, hay que utilizar $C\, D$ como mejor opción para la casilla 7, que también cubre la casilla 30, y $B\, \overline{C}\, \overline{E}$ para las casillas restantes 24 y 26.

Las dos soluciones son funciones mínimas del mismo tamaño, así que elijo una de ellas (la primera):

$F(A, B, C, D, E) = \overline{A}\, D\, \overline{E} + A\, \overline{D}\, E + \overline{C}\, \overline{D} + B\, \overline{C}\, E + B\, D\, \overline{E}$

Página 7_1. Se quiere diseñar una pequeña ALU (unidad aritmética lógica) para una aplicación que realice cuatro operaciones lógicas para tres operandos de datos A, B y C de 1 bit. Las operaciones que deben realizar se muestran en la siguiente tabla en función de dos señales de control S1 y S0. Además, se sabe que los valores lógicos del par de entradas (BC) no coinciden nunca con los valores del par (S1S0). Encontrar la formas SOP y POS mínimas.

S1 S0	Función
00	$\overline{B}\, C$
01	$\overline{A \oplus C}$
10	$\overline{A} + \overline{B}$
11	$A C + \overline{A}\, B\, \overline{C}$

Planteo el problema desde una tabla en la que calculo las funciones según los valores de S1S0 y A, B, C. Además, BC no puede ser igual que S1S0; estas condiciones son los “don’t care” (ϕ) del problema. Paso esta tabla a un mapa de Karnaugh, donde marco por filas el valor decimal que corresponde a cada fila.

Decimal	A	B	C	00	01	10	11
0	0	0	0	ϕ	1	1	0
1	0	0	1	1	ϕ	1	0
2	0	1	0	0	1	ϕ	1
3	0	1	1	0	0	1	ϕ
4	1	0	0	ϕ	0	1	0
5	1	0	1	1	ϕ	1	1
6	1	1	0	0	0	ϕ	0
7	1	1	1	0	1	0	ϕ

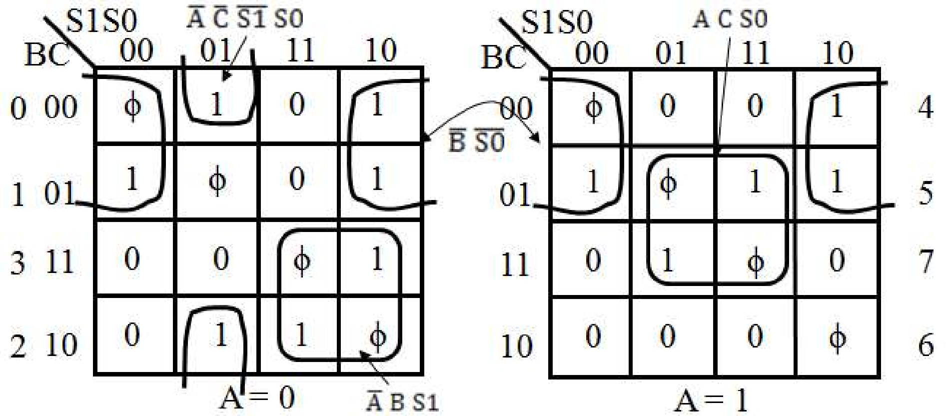
Para obtener la forma SOP empiezo por la casilla 29, que se cubre con un implicante primo esencial. $F(A, B, C, S1, S0) = A\,C\,S0 + \cdots$

Además, para la casilla 18, el implicante primo $\overline{B}\,\overline{S0}$ es mejor que la otra opción:

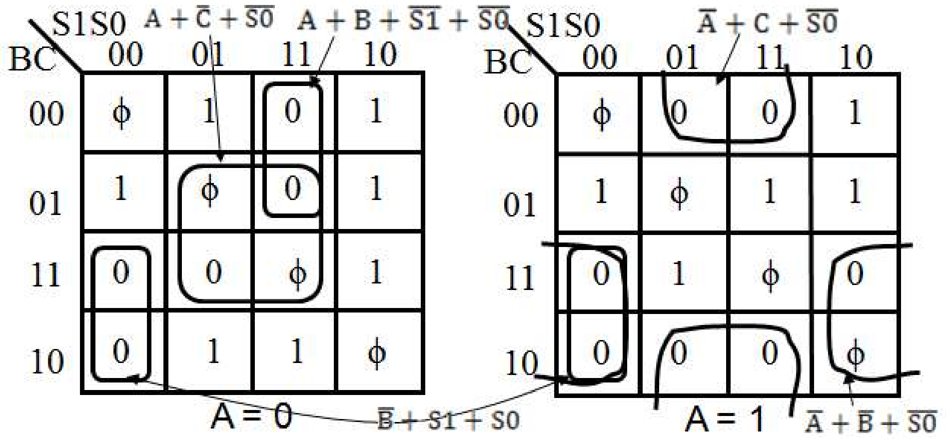
$F(A, B, C, S1, S0) = A\,C\,S0 + \overline{B}\,\overline{S0} + \cdots$

Para cubrir el resto de casillas sólo hay una forma de hacerlo con dos implicantes primos más, lo que dará una solución SOP mínima.

$F(A, B, C, S1, S0) = A\,C\,S0 + \overline{B}\,\overline{S0} + \overline{A}\,B\,S1 + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{S1}\,S0$



En el cálculo de la forma POS no hay implicantes primos esenciales, pero hay un mejor implicante primo para la casilla 8, y una vez seleccionado ese implicante, pasa lo mismo ahora con las casillas 13 y 25.



Los 0s que quedan por cubrir se deben cubrir como mínimo con dos implicantes (un 1-cubo para la casilla 3 y un 2-cubo para la casilla 30). Con lo que una función mínima (hay otras) POS es:

$$F(A, B, C, S1, S0) = (\overline{B} + S1 + S0)(A + \overline{C} + \overline{S0})(\overline{A} + C + \overline{S0})(A + B + \overline{S1} + \overline{S0})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{S0})$$

Página 7_2. Un sistema de valoración tiene 5 entradas A, B, C, D y E que pueden tomar dos valores 1 y 0. A las entradas (A, B, C, D y E) se le asigna respectivamente una puntuación (5, 3, 1, 4, -2) cuando la entrada está a 1 y (1, 0, 3, -1, 4), cuando la entrada está a 0.
La salida lógica Z del sistema se tiene en cuenta sólo cuando la suma S de la puntuación de las entradas está entre 4 y 14, ambas inclusive, y Z es 1 cuando S es 4, 5, 7, 8, 11 ó 13 y Z es 0 en el resto de los valores del intervalo. Encontrar una forma SOP mínima para Z.

Se pueden calcular el valor S para cada casilla del mapa de Karnaugh. Utilizo PB + PC por filas de los mapas; PD + PE por columnas y PA en cada mapa. Al sumar para casilla el valor de la fila, la columna y el mapa genero su valor de S.

PB+PC	BC \ DE	00 (3)	01 (-3)	11 (2)	10 (8)
3	00	7	1	6	12
1	01	5	-1	4	10
4	11	8	2	7	13
6	10	10	4	9	15

A = 0 PA = 1

BC \ DE (PD+PE)	00 (3)	01 (-3)	11 (2)	10 (8)
00	11	5	10	16
01	9	3	8	14
11	12	6	11	17
10	14	8	13	19

A = 1 PA = 5

Y una vez que tengo el valor de S de cada casilla se tiene el valor "don't care" (ϕ) (S es menor que 4, o mayor que 14), 1 (S es 4, 5, 7, 8, 11 o 13), 0 (resto de valores de S).

Una vez completado el mapa se minimiza. No hay implicantes primos. Pero hay varias casillas para las que se puede escoger un mejor implicante (regla 2). Para la casilla 9 es mejor utilizar el implicante primo $\overline{C}\,\overline{D}\,E$ que cubre, además, las casillas 17 y 25 (mejor que $\overline{A}\,\overline{D}\,E$, que no cubre ninguna casilla más); para la casilla 16, $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ es mejor que $A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{E}$, ya que es de mayor tamaño y cubre además las casilla 0 y 17; y para la casilla 23 es mejor utilizar $C\,D\,E$, cubre además a las casillas 7, 15 y 31, que $\overline{B}\,C\,E$ ya que solo cubre a 7.

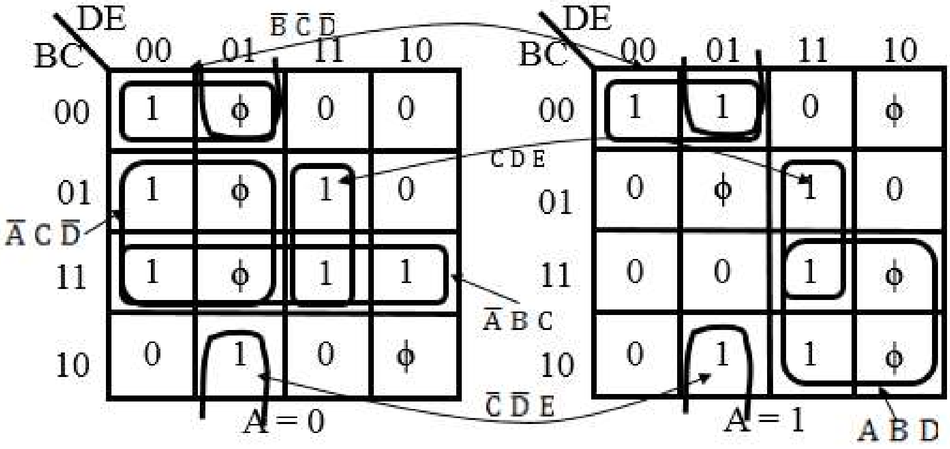
$$F(A, B, C, D, E) = \overline{C}\,\overline{D}\,E + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + C\,D\,E + \cdots$$

Ahora, hay un mejor implicante para la casilla 4 ($\overline{A}\,C\,\overline{D}$) y para la casilla 27 ($A\,B\,D$):

$$F(A, B, C, D, E) = \overline{C}\,\overline{D}\,E + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + C\,D\,E + \overline{A}\,C\,\overline{D} + A\,B\,D + \cdots$$

Las casillas a 1 que queda se puede cubrir de dos formas con un 2-cubos. Una de estas soluciones mínimas sería:

$$F(A, B, C, D, E) = \overline{C}\,\overline{D}\,E + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + C\,D\,E + \overline{A}\,C\,\overline{D} + A\,B\,D + \overline{A}\,B\,C$$



Página 8_1. Una señal X analógica ha sido digitalizada en cinco señales binarias A, B, C, D y E de forma que se sabe que el valor de X entre 0 y 1, cuantificado en rangos de 0.05, puede calcularse mediante: X = 0.30 A + 0.25 B + 0.20 C + 0.15 D + 0.10 E. Se quiere obtener una señal binaria Z que indique cuando el valor de X está en los intervalos [0.20-0.30] (valores 0.20, 0.25 ó 0.30), [0.50-0.60] (valores 0.50, 0.55 ó 0.60) ó [0.75-0.85] (valores 0.75, 0.80 ó 0.85), sabiendo además que X nunca toma los valores [0] ni [0.45]. Encontrar la forma mínima de tipo SOP que resuelve el problema.

Calculo la tabla de verdad usando directamente el mapa de Karnaugh, donde primero indico en cada casilla su valor entre 0 y 100 (en lugar de entre 0 y 1). Por filas indico el peso de las entradas B y C (PB • B + PC • C), por columnas el peso de las entradas D y E (PD • D + PE • E), y por mapas el peso de la entrada A (PA • A). El valor de X es la suma de estos 3 pesos.

A = 0 (peso 0)

BC \ DE	0 00	10 01	25 11	15 10
0 00	0	10	25	15
20 01	20	30	45	35
45 11	45	55	70	60
25 10	25	35	50	40

A = 1 (peso 30)

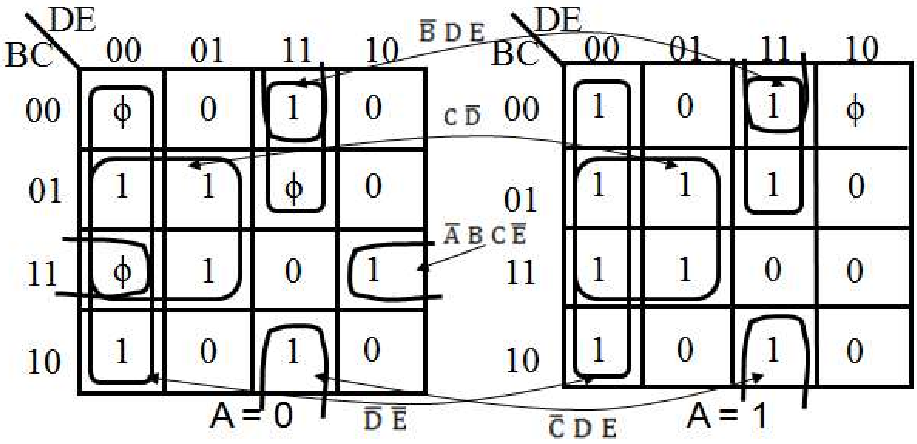
BC \ DE	0 00	10 01	25 11	15 10
00	30	40	55	45
01	50	60	75	65
11	75	85	100	90
10	55	65	80	70

Según el enunciado, las casillas del mapa se cargan con "don't care" (ϕ) en los valores 0 y 45, con 1 en los valores 20, 25, 30, 50, 55, 60, 75, 80 y 85, y con 0 en el resto de valores. Al resolver el mapa hay implicantes primos esenciales para la casilla 8, 11, 13 y 14.

Z= F(A, B, C, D, E) = $\bar{D}\,\bar{E} + \bar{C}\,D\,E + C\,\bar{D} + \bar{A}\,B\,C\,\bar{E} + \cdots$

Una vez generados los implicantes primos esenciales solo queda un 1 por cubrir (casilla 23), que se puede cubrir de dos formas. Elijo una:

Z = F(A, B, C, D, E) = $\bar{D}\,\bar{E} + \bar{C}\,D\,E + C\,\bar{D} + \bar{A}\,B\,C\,\bar{E} + \bar{B}\,D\,E$



Página 8_2. Un sistema horario controla la apertura de una caja de seguridad durante el horario en el que un comercio permanece abierto. La apertura o el cierre de la caja sólo hay que controlarla mientras el comercio esté abierto, y se realiza en función de la hora del día H (valor numérico entre 0 y 11), codificado en binario, y una señal AP que indica si es antes (AM) o después del mediodía (PM). El comercio cierra de 3 a 5 AM (3 y 4 AM), y de 7 a 9 PM (7 y 8 PM). Dentro del horario de apertura del comercio la caja debe estar abierta de 1 a 2 (1) AM y PM; de 5 a 7 (5 y 6) AM; de 3 a 5 (3 y 4) PM; de 9 a 10 (9) AM y PM, el resto del tiempo de apertura del comercio la caja debe permanecer cerrada. Encontrar la forma SOP mínima F que indiquen cuando la caja está abierta dentro del horario de apertura del comercio.

Al plantear el problema, sé que el valor de H está entre 0 y 11 en binario (casillas 0 a 11 de un mapa de Karnaugh de 4 entradas), por lo que debe tener 4 bits (H3 H2 H1 H0) y que los valores mayores que 11 (entre 12 y 15) no deben ser considerados por lo que generarán "don't care" (ϕ) en la salida. Utilizo AP como variable de entrada más significativa, donde AP a indica AM, y AP a 1 indica PM.

Del enunciado se sabe que 3 AM, 4 AM, 7 PM y 8 PM generan "don't care" (ϕ) en la salida, ya que el comercio está cerrado, y entonces no importa como esté la caja. El horario de apertura genera 1 (caja abierta) en 1 AM, 1 PM, 5 AM, 6 AM, 3 PM, 4 PM, 9 AM y 9 PM. El resto genera 0 en la salida (caja cerrada). Una vez planteado el mapa se resuelve encontrando la función SOP mínima.

De inicio hay implicantes primos esenciales para las casillas 6 AM y 4 PM

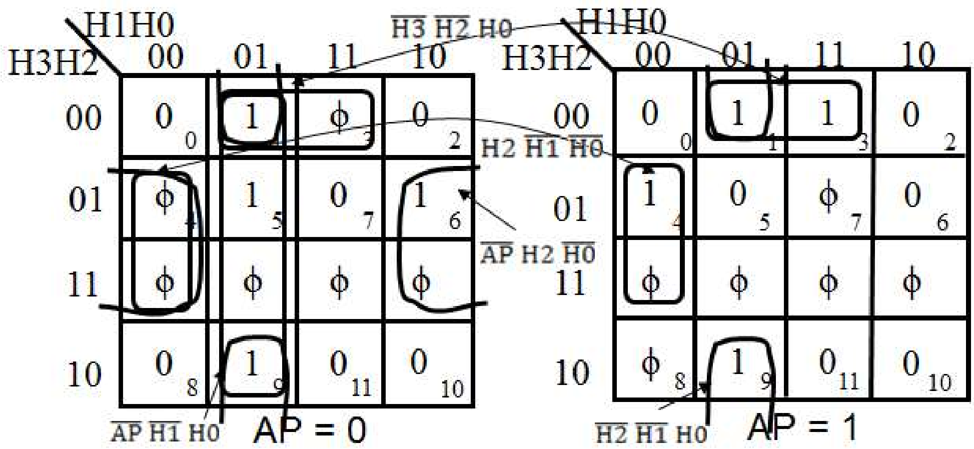
$$F(AP, H3, H2, H1, H0) = \overline{AP}\ H2\ \overline{H0} + H2\ \overline{H1}\ \overline{H0} + \cdots$$

Para las casillas 9 PM y 3 PM hay implicantes que se pueden seleccionar por la regla 2, aunque seleccionando otros implicantes primos también podría llegarse a soluciones mínimas.

$$F(AP, H3, H2, H1, H0) = \overline{AP}\ H2\ \overline{H0} + H2\ \overline{H1}\ \overline{H0} + \overline{H2}\ \overline{H1}\ H0 + \overline{H3}\ \overline{H2}\ H0 + \cdots$$

El único 1 que queda sin cubrir (casilla 5 AM) en el mapa se puede cubrir usando dos implicantes primos del mismo tamaño. Elijo uno de ellos y genero una solución SOP mínima.

$$F(AP, H3, H2, H1, H0) = \overline{AP}\ H2\ \overline{H0} + H2\ \overline{H1}\ \overline{H0} + \overline{H2}\ \overline{H1}\ H0 + \overline{H3}\ \overline{H2}\ H0 + \overline{AP}\ \overline{H1}\ H0$$



Página 9. Se desea diseñar un circuito lógico para determinar el vencedor de un combate entre dos contendientes X e Y mediante las siguientes especificaciones:
- El combate será a tres toques. El vencedor se declara cuando uno o los dos contendientes llegue a tres toques (se permite la posibilidad de toque simultáneo), o se llegue al llegar al final del tiempo de combate. El número de toques (de 0 a 3) realizado por cada contendiente se almacena en binario en dos variables lógicas para X (x1x0) y dos para Y (y1y0).
- Al finalizar el combate se declara vencedor al contendiente que haya realizado más toques. En caso de empate el combate se dilucida por la decisión de un árbitro (variable lógica A) que declara vencedor a X (A a valor 1) ó a Y (A a valor 0). El árbitro no puede declarar el combate empatado.
- Para mantener la emoción del combate hasta el final el sistema de cuenta de toques está ligeramente amañado de forma que no permite en ningún caso que un contendiente tome ventaja de dos toques sobre su rival, es decir la victoria siempre será por la mínima o por decisión arbitral.
Obtener la forma SOP mínima de la función F(A, x1, x0, y1, y0) que determina la victoria final del contendiente X en función de los toques realizados y la decisión arbitral.

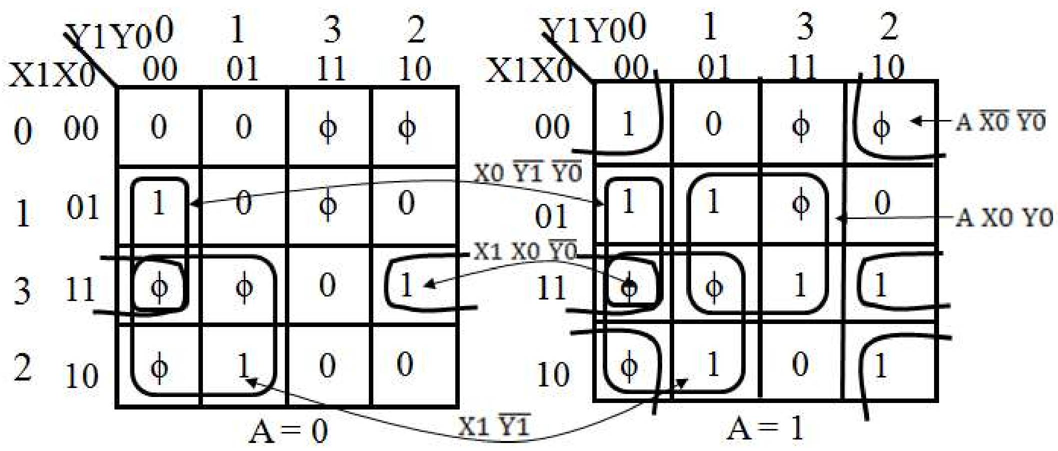
El problema tiene 5 entradas: el árbitro A (en caso de empate 0 gana Y, 1 gana X), X1 X0 para codificar los toques de X (valores entre 0 y 3), e Y1 Y0 para codificar los toques de Y (valores entre 0 y 3). En el mapa de Karnaugh sitúo por filas los toques de X, y por columnas los de Y, y completo el mapa según las especificaciones: no se permiten las situaciones donde la diferencia de toques entre X e Y es mayor que 1: 2 a 0, 3 a 0, 3 a 1, 0 a 2, 1 a 3, y 0 a 3; estas situaciones generan “don’t care” (ϕ) en la salida. Se generan 1s en la salida cuando gana X por toques, independientemente de la decisión del árbitro: 1 a 0, 2 a 1 y 3 a 2, o cuando hay empate a 0, 1, 2 ó 3 y el árbitro da ganador a X (A a 1). El resto de casillas producen 0 (gana Y o no gana X).

Con estos datos se rellenan las casillas del mapa de Karnaugh y se encuentra una función SOP mínima. Las casillas 4, 9 y 14 se cubren mediante un implicante primo esencial.

F(A, Y1, Y0, Y1, Y0) = $X0\,\overline{Y1}\,\overline{Y0} + X1\,\overline{Y1} + X1\,X0\,\overline{Y0} + \cdots$

Los 1s que quedan en el mapa (la diagonal del mapa A = 1) se pueden cubrir de una única forma mínima usando dos implicantes primos.

F(A, Y1, Y0, Y1, Y0) = $X0\,\overline{Y1}\,\overline{Y0} + X1\,\overline{Y1} + X1\,X0\,\overline{Y0} + A\,\overline{X0}\,\overline{Y0} + A\,X0\,Y0$



Página 10. Factorizar las siguientes funciones lógicas, utilizando el algoritmo recursivo del literal de mayor aparición:

Se localiza el literal X que más aparece en la función F en dos niveles, se divide F en dos partes: F1 que incluye a los términos que contienen X, y F2 con los términos que no contienen X. Se saca factor común en F1 a X con la propiedad distributiva, y se aplica recursivamente el método a F1 y F2, hasta que en las subfunciones que van apareciendo los literales sólo aparezcan una vez.

a) Z(A, B, C, D, E) = $\overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,D\,E + B\,\overline{C}\,D + \overline{B}\,C\,E + A\,\overline{B}\,C$

Los literales que aparecen varias veces son: A (2), $\overline{B}$ (2), C(2), D (2), E (2)

Hay varios literales empatados a 2 apariciones.

Prueba 1: elijo A. $\overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,D\,E + B\,\overline{C}\,D + \overline{B}\,C\,E + A\,\overline{B}\,C =$
$= A\,(D\,E + \overline{B}\,C) + \overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + B\,\overline{C}\,D + \overline{B}\,C\,E$

$D\,E + \overline{B}\,C$ => No hay ningún literal que aparezca varias veces.
$\overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + B\,\overline{C}\,D + \overline{B}\,C\,E$ => No hay ningún literal que aparezca varias veces.

Solución 1. Z = $A\,(D\,E + \overline{B}\,C) + \overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + B\,\overline{C}\,D + \overline{B}\,C\,E$. 14 literales

Prueba 2: elijo $\overline{B}$. $\overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,D\,E + B\,\overline{C}\,D + \overline{B}\,C\,E + A\,\overline{B}\,C =$
$= \overline{B}\,(C\,E + A\,C) + \overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,D\,E + B\,\overline{C}\,D$

$C\,E + A\,C$ => C aparece 2 veces. $C\,(A + E)$
$A + E$ => No hay ningún literal que aparezca varias veces

$\overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,D\,E + B\,\overline{C}\,D$ => D aparece dos veces. $\overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + D(A\,E + B\,\overline{C})$
$\overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E}$ => No hay ningún literal que aparezca varias veces.
$A\,E + B\,\overline{C}$ => No hay ningún literal que aparezca varias veces.

Solución 2. Z = $\overline{B}\,C\,(A + E) + \overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + D(A\,E + B\,\overline{C})$. 12 literales

Prueba 3: elijo $\overline{C}$. Mismo resultado que Prueba 2.
Prueba 4: elijo D. Mismo resultado que Prueba 2.
Prueba 5: elijo E. Z = $E(A\,D + \overline{B}\,C) + \overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + B\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,C$. 14 literales

La mejor solución factorizada es la prueba 2

Z(A, B, C, D, E) = $\overline{B}\,C\,(A + E) + \overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + D(A\,E + B\,\overline{C})$

b) Z(A, B, C, D, E) = $(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})(\mathbf{A} + \mathbf{D} + \mathbf{E})(\mathbf{C} + \mathbf{D})(\mathbf{C} + \mathbf{E})(\mathbf{B} + \mathbf{D} + \mathbf{E})$

En una forma POS el método es el mismo, pero hay que aplicar la otra propiedad distributiva: (X + Y) (X+ Z) = X + Y Z

Los literales que aparecen varias veces son: A (2), B (2), C (3), D (3), E (3). Pruebo con C, D y E.

Prueba 1: elijo C. $(A + B + C)(A + D + E)(C + D)(C + E)(B + D + E)$=
= $[C + (A + B)D\,E\,](A + D + E)(B + D + E)$

$(A + B)D\,E$ => No hay ningún literal que aparezca varias veces

$(A + D + E)(B + D + E)$=> D (2), E(2).
Prueba 1_1a: D (2). $D + (A + E)(B + E)$
$(A + E)(B + E)$ => E (2). $E + A\,B$
1. No hay literales
A B => No hay ningún literal que aparezca varias veces
$D + (A + E)(B + E) = D + E + A\,B$ (4 literales)
Prueba 1_2a: E (2). $E + (A + D)(B + D)$
$(A + D)(B + D)$ => D (2). $D + A\,B$
1. No hay literales
A B => No hay ningún literal que aparezca varias veces
$D + (A + E)(B + E) = D + E + A\,B$ (4 literales)
Las dos pruebas dan la misma solución $D + E + A\,B$ (4 literales)
$(A + D + E)(B + D + E) = D + E + A\,B$

Solución prueba 1. Z = $[C + (A + B)D\,E\,](D + E + A\,B)$ (9 literales)

Prueba 2: elijo D. $(A + B + C)(A + D + E)(C + D)(C + E)(B + D + E)$ =
= $[D + (A + E)\,C\,(B + E)](A + B + C)(C + E)$

$(A + E)\,C\,(B + E)$ => E (2). $C\,(E + A\,B)$
A B => No hay ningún literal que aparezca varias veces

$(A + B + C)(C + E)$ => C (2). $C + (A + B)\,E$
$(A + B)\,E$ => No hay ningún literal que aparezca varias veces

Solución prueba 2. Z = $[D + C\,(E + A\,B)](C + (A + B)\,E)$ (9 literales)

Prueba 3: elijo E. $(A + B + C)(A + D + E)(C + D)(C + E)(B + D + E) =$
$= [E + (A + D)\ C\ (B + D)](A + B + C)(C + D)$

$(A + D)\ C\ (B + D)$ => D (2). $C\ (D + A\ B)$
$A\ B$ => No hay ningún literal que aparezca varias veces

$(A + B + C)(C + D)$ => C (2). $C + (A + B)\ D$
$(A + B)\ D$ => No hay ningún literal que aparezca varias veces

Solución prueba 3. Z = $[E + C\ (D + A\ B)](C + (A + B)\ D)$ (9 literales)

Las tres soluciones son de 9 literales. Aunque a nivel de literales son iguales, escojo la prueba 1, ya que tiene menos niveles lógicos que las otras dos

Z(A, B, C, D, E) = $[C + (A + B) D\ E\ ](D + E + A\ B)$

c) Z(A, B, C, D, E, F, G, H) = $\mathbf{A\ B\ C\ E\ \overline{F}\ \overline{G} + A\ B\ C\ E\ \overline{G}\ H + A\ B\ \overline{C}\ \overline{D}\ G\ H + A\ B\ \overline{C}\ \overline{D}\ F\ H +}$ $\mathbf{\overline{A}\ \overline{B}\ D\ \overline{E}\ G\ \overline{H} + \overline{A}\ \overline{B}\ D\ \overline{E}\ \overline{F}\ G + \overline{A}\ \overline{B}\ C\ \overline{D}\ \overline{E}\ G\ H + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}\ E\ \overline{F}\ \overline{G}}$

Los literales que aparecen varias veces son: A (4), $\overline{A}$ (4), B (4), $\overline{B}$ (4), C (3), $\overline{C}$ (3), D (2), $\overline{D}$ (4), E (3), $\overline{E}$ (3), $\overline{F}$ (3), G (4), $\overline{G}$ (3), H (4). El máximo valor de aparición es 4 para: A (4), $\overline{A}$ (4), B (4), $\overline{B}$ (4), $\overline{D}$ (4), G (4), H (4). Intuitivamente A (4), $\overline{A}$ (4), B (4), $\overline{B}$ (4) van a dar la misma solución ya que dividen los términos productos de la misma manera. Las soluciones a partir de G y H dan soluciones con más literales y no las muestro.

Z = $A\ (B\ C\ E\ \overline{F}\ \overline{G} + B\ C\ E\ \overline{G}\ H + B\ \overline{C}\ \overline{D}\ G\ H + B\ \overline{C}\ \overline{D}\ F\ H) + \overline{A}\ \overline{B}\ D\ \overline{E}\ G\ \overline{H} + \overline{A}\ \overline{B}\ D\ \overline{E}\ \overline{F}\ G +$
$+ \overline{A}\ \overline{B}\ C\ \overline{D}\ \overline{E}\ G\ H + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}\ E\ \overline{F}\ \overline{G}$

$B\ C\ E\ \overline{F}\ \overline{G} + B\ C\ E\ \overline{G}\ H + B\ \overline{C}\ \overline{D}\ G\ H + B\ \overline{C}\ \overline{D}\ F\ H$ => Máximo B (4)
$B\ (C\ E\ \overline{F}\ \overline{G} + C\ E\ \overline{G}\ H + \overline{C}\ \overline{D}\ G\ H + \overline{C}\ \overline{D}\ F\ H)$
$C\ E\ \overline{F}\ \overline{G} + C\ E\ \overline{G}\ H + \overline{C}\ \overline{D}\ G\ H + \overline{C}\ \overline{D}\ F\ H$ => Máximo H (3)
$H\ (C\ E\ \overline{G} + \overline{C}\ \overline{D}\ G\ + \overline{C}\ \overline{D}\ F) + C\ E\ \overline{F}\ \overline{G}$
$C\ E\ \overline{G} + \overline{C}\ \overline{D}\ G\ + \overline{C}\ \overline{D}\ F$ => $\overline{C}$ (2), $\overline{D}$ (2) (Factorizan igual. Elijo $\overline{C}$)
$\overline{C}\ (\overline{D}\ G\ + \overline{D}\ F) + C\ E\ \overline{G}$
$\overline{D}\ G\ + \overline{D}\ F$ = > Máximo D (2)
$\overline{D}\ (G + F)$
$C\ E\ \overline{G}$ => No hay literales repetidos.
$C\ E\ \overline{G} + \overline{C}\ \overline{D}\ G\ + \overline{C}\ \overline{D}\ F\ = \overline{C}\ \overline{D}\ (G + F) + C\ E\ \overline{G}$
$C\ E\ \overline{F}\ \overline{G}$ => No hay literales repetidos.
$H\ (C\ E\ \overline{G} + \overline{C}\ \overline{D}\ G\ + \overline{C}\ \overline{D}\ F\ ) + C\ E\ \overline{F}\ \overline{G} = H\ (\overline{C}\ \overline{D}\ (G + F) + C\ E\ \overline{G}) + C\ E\ \overline{F}\ \overline{G}$
$B\ C\ E\ \overline{F}\ \overline{G} + B\ C\ E\ \overline{G}\ H + B\ \overline{C}\ \overline{D}\ G\ H + B\ \overline{C}\ \overline{D}\ F\ H = B\ (H\ (\overline{C}\ \overline{D}\ (G + F) + C\ E\ \overline{G}) + C\ E\ \overline{F}\ \overline{G})$

$\overline{A}\ \overline{B}\ D\ \overline{E}\ G\ \overline{H} + \overline{A}\ \overline{B}\ D\ \overline{E}\ \overline{F}\ G + \overline{A}\ \overline{B}\ C\ \overline{D}\ \overline{E}\ G\ H + \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}\ E\ \overline{F}\ \overline{G}$ => Máximo $\overline{A}$ (4), $\overline{B}$ (4)
$\overline{A}$ y $\overline{B}$ se comportan igual (elijo $\overline{A}$).
$\overline{A}\ (\overline{B}\ D\ \overline{E}\ G\ \overline{H} + \overline{B}\ D\ \overline{E}\ \overline{F}\ G + \overline{B}\ C\ \overline{D}\ \overline{E}\ G\ H + \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}\ E\ \overline{F}\ \overline{G})$
$\overline{B}\ D\ \overline{E}\ G\ \overline{H} + \overline{B}\ D\ \overline{E}\ \overline{F}\ G + \overline{B}\ C\ \overline{D}\ \overline{E}\ G\ H + \overline{B}\ \overline{C}\ \overline{D}\ E\ \overline{F}\ \overline{G}$ => Máximo $\overline{B}$ (4)
$\overline{B}\ (D\ \overline{E}\ G\ \overline{H} + D\ \overline{E}\ \overline{F}\ G + C\ \overline{D}\ \overline{E}\ G\ H + \overline{C}\ \overline{D}\ E\ \overline{F}\ \overline{G})$
$D\ \overline{E}\ G\ \overline{H} + D\ \overline{E}\ \overline{F}\ G + C\ \overline{D}\ \overline{E}\ G\ H + \overline{C}\ \overline{D}\ E\ \overline{F}\ \overline{G}$ => Máximo $\overline{E}$ (3), G (3)
$\overline{E}$ y G se comportan igual (elijo $\overline{E}$)

$\overline{E}\,(D\,G\,\overline{H} + D\,\overline{F}\,G + C\,\overline{D}\,G\,H) + \overline{C}\,\overline{D}\,E\,\overline{F}\,\overline{G}$

$D\,G\,\overline{H} + D\,\overline{F}\,G + C\,\overline{D}\,G\,H$ => G (3)

$G\,(D\,\overline{H} + D\,\overline{F} + C\,\overline{D}\,H)$

$D\,\overline{H} + D\,\overline{E} + C\,\overline{D}\,H$ =>Máximo D (2)

$D\,(\overline{H} + \overline{F}) + C\,\overline{D}\,H$

$\overline{H} + \overline{E}$ => No hay literales repetidos

$C\,\overline{D}\,H$ => No hay literales repetidos

$D\,\overline{H} + D\,\overline{E} + C\,\overline{D}\,H = D\,(\overline{H} + \overline{F}) + C\,\overline{D}\,H$

$D\,G\,\overline{H} + D\,\overline{F}\,G + C\,\overline{D}\,G = G\,(D\,(\overline{H} + \overline{F}) + C\,\overline{D}\,H)$

$\overline{C}\,\overline{D}\,E\,\overline{F}\,\overline{G}$ => No hay literales repetidos

$D\,\overline{E}\,G\,\overline{H} + D\,\overline{E}\,\overline{F}\,G + C\,\overline{D}\,\overline{E}\,G\,H + \overline{C}\,\overline{D}\,E\,\overline{F}\,\overline{G} =$

$= \overline{E}\,G\,(D\,(\overline{H} + \overline{F}) + C\,\overline{D}\,H) + \overline{C}\,\overline{D}\,E\,\overline{F}\,\overline{G}$

$\overline{B}\,D\,\overline{E}\,G\,\overline{H} + \overline{B}\,D\,\overline{E}\,\overline{F}\,G + \overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E}\,G\,H + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,E\,\overline{F}\,\overline{G} =$

$= \overline{B}\,(\overline{E}\,G\,(D\,(\overline{H} + \overline{F}) + C\,\overline{D}\,H) + \overline{C}\,\overline{D}\,E\,\overline{F}\,\overline{G})$

$\overline{A}\,\overline{B}\,D\,\overline{E}\,G\,\overline{H} + \overline{A}\,\overline{B}\,D\,\overline{E}\,\overline{F}\,G + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E}\,G\,H + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,E\,\overline{F}\,\overline{G} =$

$= \overline{A}\,\overline{B}\,(\overline{E}\,G\,(D\,(\overline{H} + \overline{F}) + C\,\overline{D}\,H) + \overline{C}\,\overline{D}\,E\,\overline{F}\,\overline{G})$

La solución de la factorización sería:

$Z = A\,B\,(H\,(\overline{C}\,\overline{D}\,(G + F) + C\,E\,\overline{G}\,) + C\,E\,\overline{F}\,\overline{G}) +$

$+ \overline{A}\,\overline{B}\,(\overline{E}\,G\,(D\,(\overline{H} + \overline{F}) + C\,\overline{D}\,H) + \overline{C}\,\overline{D}\,E\,\overline{F}\,\overline{G})$

que tiene 29 literales en lugar de los 50 literales de la función en dos niveles. El algoritmo “bueno” de Sis obtiene una solución de 27 literales.