Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación.
Electrónica Digital I. Problemas resueltos. Tema IIa

Página 1_1. Razonar en base a los postulados y teoremas del álgebra de Boole si es posible o no definir un álgebra de Boole para B = {0, a, 1} ó B = {0, a, b, 1}.

Empiezo por el conjunto B = {0, a, 1}. Se utilizan los postulados y teoremas para ir rellenando los resultados de las operaciones ● y +. Por ejemplo, el postulado del elemento identidad (P4) X + 0 = X; X ● 1 = X.

●	0	a	1
0			0
a			a
1	0	a	1

+	0	a	1
0	0	a	1
a	a		
1	1		

Por el teorema de identidad (T3) X + 1 = 1; X ● 0 = 0.

●	0	a	1
0	0	0	0
a	0		a
1	0	a	1

+	0	a	1
0	0	a	1
a	a		1
1	1	1	1

Por el teorema de idempotencia (T2) X + X = X; X ● X = X.

●	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

+	0	a	1
0	0	a	1
a	a	a	1
1	1	1	1

Con estas operaciones se tienen que cumplir los postulados del álgebra de Boole. El postulado P4 se ha usado, por lo que está comprobado, el postulado P1 es trivial ya que los resultados pertenecen a B. El postulado P2 (propiedad conmutativa) es cierto ya que las matrices de las operaciones son simétricas. Se puede comprobar que el P5 (elemento complementado: $X + \overline{X} = 1$; $X \bullet \overline{X} = 0$) es cierto para 0 y 1, que se cumple que 0 + 1 = 1 y 0 ● 1 = 0, luego 0 y 1 son el complemento uno del otro; sin embargo, para *a* no se puede encontrar un complemento, ya que solo a ● 0 = 0, y a + 1 = 1, luego *a* no tiene complemento. Por tanto el conjunto B = {0, a, 1} no puede formar un álgebra de Boole.

Para el conjunto B = {0, a, b, 1} se puede repetir el mismo proceso. Postulado del elemento identidad (P4) X + 0 = X; X ● 1 = X

●	0	a	b	1
0				0
a				a
b				b
1	0	a	b	1

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a			
b	b			
1	1			

Por el teorema de identidad (T3) X + 1 = 1; X ● 0 = 0.

•	**0**	**a**	**b**	**1**
0	0	0	0	0
a	0			a
b	0			b
1	0	a	b	1

+	**0**	**a**	**b**	**1**
0	0	a	b	1
a	a			1
b	b			1
1	1	1	1	1

Por el teorema de idempotencia (T2) X + X = X; X • X = X.

•	**0**	**a**	**b**	**1**
0	0	0	0	0
a	0	a		a
b	0		b	b
1	0	a	b	1

+	**0**	**a**	**b**	**1**
0	0	a	b	1
a	a	a		1
b	b		b	1
1	1	1	1	1

Intento ahora probar el postulado P5 (elemento complementado: X + $\overline{X}$ = 1; X • $\overline{X}$ = 0). Al igual que para el caso anterior para el 0 y el 1 se cumple 0 + 1 = 1 y 0 • 1 = 0, luego uno es el complemento del otro, y ni *a* ni *b* pueden serlo. Para *a*, por ejemplo, en su fila en ambas operaciones no hay actualmente ninguna columna que resulte 0 en •, y 1 en + a la vez; pero se puede generar situando en las casillas libres de las columnas *b*, 0 en • y 1 en +. De esa forma *b* es el complemento de *a* (a + b = 1; a • b = 0). Lo mismo puede hacerse en la fila de b, para que tenga un complemento deben situarse los valores 0 en • y 1 en + para la columna *a*, y ahora *a* es el complemento de *b*. Con ello las operaciones quedan totalmente definidas así.

•	**0**	**a**	**b**	**1**
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

+	**0**	**a**	**b**	**1**
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

Estas operaciones cumplen P4 y P5, por que las hemos usado para generar las operaciones. P1 es trivial (todos los resultados pertenecen a B), y P2 (conmutativa) se cumple porque las matrices son simétricas. Quedaría probar los postulados P3 (distributivas) X (Y + Z) = X Y + X Z y X + Y Z = (X + Y) (X+ Z). Habría que probar todas las combinaciones de valores en X, Y, Z (64 combinaciones de 0 0 0, 0 0 a, 0 0 b, …, 1 1 b, 1 1 1) para los dos postulados, pero solo muestro cuatro combinaciones, aunque se podría comprobar que se cumple para todas.

X	**Y**	**Z**	**Y+Z**	**X(Y+Z)**	**XY**	**XZ**	**XY+XZ**	**YZ**	**X+YZ**	**X+Y**	**X+Z**	**(X+Y)(X+Z)**
a	b	0	b	***0***	0	0	***0***	0	**a**	1	a	**a**
b	1	a	1	***b***	b	0	***b***	a	**1**	1	1	**1**
0	1	b	1	***0***	0	0	***0***	b	**b**	1	b	**b**
b	a	b	1	***b***	0	b	***b***	0	**b**	1	b	**b**

Página 1_2. Demostrar los teoremas de Boole T6 y T8 por perfecta inducción sobre el álgebra de conmutación.

La prueba por perfecta inducción se hace poniendo todas las combinaciones de valores en las entradas, y comprobando que expresiones los resultados son iguales

T6. Leyes de Morgan: $\overline{X + Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$, y $\overline{X\,Y} = \overline{X} + \overline{Y}$.

X	**Y**	**$\overline{X}$**	**$\overline{Y}$**
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

X+Y	**$\overline{X + Y}$**	**$\overline{X}\,\overline{Y}$**
0	**1**	**1**
1	**0**	**0**
1	**0**	**0**
1	**0**	**0**

X Y	**$\overline{X\,Y}$**	**$\overline{X} + \overline{Y}$**
0	**1**	**1**
0	**1**	**1**
0	**1**	1
1	**0**	**0**

T8. Teorema del consenso: $X\,Y + \bar{X}\,Z + Y\,Z = X\,Y + \bar{X}\,Z$

$$(X + Y)(\bar{X} + Z)(Y + Z) = (X + Y)(\bar{X} + Z)$$

X	**Y**	**Z**	**$\overline{X}$**	**X Y**	**$\overline{X}$ Z**	**Y Z**	**X Y + $\overline{X}$ Z**	**X Y + $\overline{X}$ Z + Y Z**
0	0	0	1	0	0	0	**0**	**0**
0	0	1	1	0	1	0	**1**	**1**
0	1	0	1	0	0	0	**0**	**0**
0	1	1	1	0	1	1	**1**	**1**
1	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
1	0	1	0	0	0	0	**0**	**0**
1	1	0	0	1	0	0	**1**	**1**
1	1	1	0	1	0	1	**1**	**1**

X	**Y**	**Z**	**$\overline{X}$**	**X + Y**	**$\overline{X}$ + Z**	**Y + Z**	**(X + Y) ($\overline{X}$ + Z)**	**(X + Y) ($\overline{X}$ + Z) (Y + Z)**
0	0	0	1	0	1	0	**0**	**0**
0	0	1	1	0	1	1	**0**	**0**
0	1	0	1	1	1	1	**1**	**1**
0	1	1	1	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	0	1	0	0	**0**	**0**
1	0	1	0	1	1	1	**1**	**1**
1	1	0	0	1	0	1	**0**	**0**
1	1	1	0	1	1	1	**1**	**1**

Página 1_3. Demostrar los teoremas T1, T2, T7 y T9 mediante los postulados y los teoremas anteriores del álgebra de Boole.

T1. Doble complementación. $\overline{\overline{X}} = X$.

Por el postulado P5 (elemento complementado) si X + Y = 1 y X • Y = 0, entonces $Y = \overline{X}$. Por el postulado P2 (conmutativa) Y + X = 1 e Y • X = 0, por lo que $X = \overline{Y}$, y como $Y = \overline{X}$, entonces $X = \overline{Y} = \overline{(\overline{X})} = \overline{\overline{X}}$

El resto de teoremas tiene dos versiones, demuestro una de ellos, y la otra quedaría demostrada por el principio de dualidad. Entre paréntesis aparece el postulado utilizado (P2: conmutativa, P3: distributiva, P4: elemento identidad, P5: elemento complementado).

T2. Idempotencia. X + X = X; X • X = X.

X + X = (X + X) • 1 (P4) = (X + X) • (X + $\overline{X}$) (P5) = X + X • $\overline{X}$ (P3) = X + 0 (P5) = X (P4)

T7. Adyacencia. X • Y + X • $\overline{Y}$ = X; (X + Y) • (X + $\overline{Y}$) = X

$X \bullet Y + X \bullet \overline{Y} = X \bullet (Y + \overline{Y})$ (P3) $= X \bullet 1$ (P5) $= X$ (P4)

T9. Simplificación. $X + \overline{X} \bullet Y = X + Y$; $X (\overline{X} + Y) = X$.

$X + \overline{X} \bullet Y = (X + \overline{X}) (X + Y)$ (P3) $= 1 \bullet (X + Y)$ (P5) $= (X + Y) \bullet 1$ (P2) $= X + Y$ (P4)

Página 1_4. Demostrar, utilizando únicamente postulados y teoremas del álgebra de conmutación, que se cumple que: $\mathbf{A\,B + \overline{A}\,C = (A + C)(\overline{A} + B)}$.

Partiendo de $(A + C)(\overline{A} + B)$ se comprende fácil usando la propiedad distributiva, que se usa normalmente en la aritmética convencional.

$(A + C)(\overline{A} + B) =$	(P3)	$X (Y + Z) = X Y + X Z$; $X = \overline{A} + B$, $Y = A$, $Z = C$
$A (\overline{A} + B) + C (\overline{A} + B) =$	(T9)	$X (\overline{X} + Y) = X Y$; $X = A$, $Y = B$
$= A B + C (\overline{A} + B) =$	(P3)	$X (Y + Z) = X Y + X Z$; $X = C$, $Y = \overline{A}$, $Z = B$
$= A B + \overline{A} C + B C =$	(T8)	$X Y + \overline{X} Z + Y Z = X Y + \overline{X} Z$; $X = A$, $Y = B$, $Z = C$
$= A B + \overline{A} C$		

Partiendo de $A B + \overline{A} C$, parece más complicado, pero en realidad solo hay que usar las otras versiones de P3, T9 y T8.

$A B + \overline{A} C =$	(P3)	$X + Y Z = (X + Y) (X + Z)$; $X = \overline{A} C$, $Y = A$, $Z = B$
$(A + \overline{A} C) (B + \overline{A} C) =$	(T9)	$X + \overline{X} Y = X + Y$; $X = A$, $Y = C$
$= (A + C) (B + \overline{A} C) =$	(P3)	$X + Y Z = (X + Y) (X + Z)$; $X = B$, $Y = \overline{A}$, $Z = C$
$= (A + C)(\overline{A} + B)(B + C) =$	(T8)	$(X + Y)(\overline{X} + Z)(Y + Z) = (X + Y)(\overline{X} + Z)$; $X = A$
$= (A + C)(\overline{A} + B)$		

Página 2_1. Simplificar las siguientes expresiones lógicas:

a) $\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C =$	(P3)	$X Y + X Z = X (Y + Z)$; $X = \overline{B}$, $Y = \overline{A}$, $Z = A C$
$= \overline{B} (\overline{A} + A C) + \overline{A}\,\overline{C} =$	(T9)	$X + \overline{X} Y = X + Y$; $X = \overline{A}$, $\overline{X} = A$, $Y = C$
$= \overline{B}(\overline{A} + C) + \overline{A}\,\overline{C} =$	(P3)	$X (Y + Z) = X Y + X Z$; $X = \overline{B}$, $Y = \overline{A}$, $Z = C$
$= C\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{A} + \overline{B}\,\overline{A} =$	(T8)	$X Y + \overline{X} Z + Y Z = X Y + \overline{X} Z$; $X = C$, $Y = \overline{B}$, $Z = \overline{A}$
$= C\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{A} = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,C$		

b) $\overline{\overline{A + B}\,(\overline{A} + \overline{C})} =$	(T6)	$\overline{X Y} = \overline{X} + \overline{Y}$; $X = \overline{A + B}$, $Y = \overline{A} + \overline{C}$
$= \overline{\overline{A + B}} + \overline{\overline{A} + \overline{C}} =$	(T1)	$\overline{\overline{X}} = X$; (T6) $\overline{X + Y} = \overline{X}\ \overline{Y}$; $X = \overline{A}$, $Y = \overline{C}$
$= A + B + A C =$	(T4)	$X + X Y = X$; $X = A$, $Y = C$
$= A + B$		

c) $A B \overline{C} + (A B \overline{C} + \overline{A} C)[B(A + C) + \overline{B} C + A \overline{B}\,\overline{C}]$

$B(A + C) + \overline{B} C + A \overline{B}\,\overline{C} =$	(P3)	$X (Y + Z) = X Y + X Z$; $X = B$, $Y = A$, $Z = C$
$= A B + B C + \overline{B} C + A \overline{B}\,\overline{C} =$	(T7)	$X Y + X \overline{Y} = X$; $X = C$; $Y = B$
$= A B + C + A \overline{B}\,\overline{C} =$	(T9)	$X + \overline{X} Y = X + Y$; $X = C$, $Y = A \overline{B}$
$= A B + C + A \overline{B} =$	(T7)	$X Y + X \overline{Y} = X$; $X = A$; $Y = B$
$= A + C$		

$A\,B\,\bar{C} + (A\,B\,\bar{C} + \bar{A}\,C)[B(A + C) + \bar{B}\,C + A\,\bar{B}\,\bar{C}] =$

$= A\,B\,\bar{C} + (A\,B\,\bar{C} + \bar{A}\,C)(A + C) =$ (P3) $X\,(Y + Z) = X\,Y + X\,Z$; $X = (A + C)$, $Y = A\,B\,\bar{C}$; $Z = \bar{A}\,C$

$= A\,B\,\bar{C} + A\,B\,\bar{C}\,(A + C) + \bar{A}\,C\,(A + C) =$ (T4) $X + X\,Y = X$; $X = A\,B\,\bar{C}$, $Y = A + C$

$= A\,B\,\bar{C} + A\,B\,\bar{C} + \bar{A}\,C\,(A + C) =$ (T2) $X + X = X$; $X = A\,B\,\bar{C}$

$= A\,B\,\bar{C} + \bar{A}\,C\,(A + C)$ (T4) $X\,(X + Y) = X$; $X = C$, $Y = A + C$

$= A\,B\,\bar{C} + \bar{A}\,C$

d) $\overline{(A + B + C)\,(A + \bar{B})} + \overline{\bar{A}\,B}\,(\bar{A}\,B + \bar{C}) =$ (T9) $X\,(\bar{X} + Y) = X\,Y$; $X = \overline{\bar{A}\,B}$, $Y = \bar{C}$

$= \overline{(A + B + C)\,(A + \bar{B})} + \overline{\bar{A}\,B}\;\bar{C} =$ (P3) $(X+Y)\,(X+Z) = X+YZ$; $X=A$, $Y=B+C$, $Z=\bar{B}$

$= \overline{A + (B + C)\,\bar{B}} + \overline{\bar{A}\,B}\,\bar{C} =$ (T9) $X\,(\bar{X} + Y) = X\,Y$; $X= \bar{B}$, $Y = C$

$= \overline{A + \bar{B}\,C} + \overline{\bar{A}\,B}\,\bar{C} =$ (T6) $\overline{X + Y} = \bar{X}\,\bar{Y}$; $X = A$, $Y = \bar{B}\,C$

$= \bar{A} \cdot \overline{\bar{B}\,C} + \overline{\bar{A}\,B} \cdot \bar{C} =$ (T6) $\overline{X\,Y} = \bar{X} + \bar{Y}$; $X = \bar{B}$, $Y = C$

$= \bar{A}\,\big(\bar{\bar{B}} + \bar{C}\big) + \overline{\bar{A}\,B}\,\bar{C} =$ (T1) $\bar{\bar{X}} = X$; $X = B$

$= \bar{A}\,(B + \bar{C}) + \overline{\bar{A}\,B}\,\bar{C} =$ (P3) $X(Y+Z) = XY + XZ$; $X = \bar{A}$, $Y = B$, $Z = \bar{C}$

$= \bar{A}\,B + \bar{A}\,\bar{C} + \overline{\bar{A}\,B}\,\bar{C} =$ (T9) $X + \bar{X}\,Y = X + Y$; $X = \bar{A}\,B$, $Y = \bar{C}$

$= \bar{A}\,B + \bar{A}\,\bar{C} + \bar{C} =$ (T4) $X + X\,Y = X$; $X = \bar{C}$, $Y = \bar{A}\,\bar{C}$

$= \bar{A}\,B + \bar{C}$

e) $\overline{\overline{\overline{\overline{A\,B + C}\,B\,\bar{C}}\,B\,\bar{C}}\,(A\,B + C)} =$ $P = A\,B + C$; $T = B\,\bar{C}$

$= \overline{\overline{\overline{\bar{P} \cdot T}\cdot T} \cdot P} =$ (T6) $\overline{X\,Y} = \bar{X} + \bar{Y}$; $X = \overline{\overline{\bar{P} \cdot T}\cdot T}$, $Y = P$

$= \overline{\overline{\overline{\bar{P}\;T}\;T}} + \bar{P} =$ (T1) $\bar{\bar{X}} = X$; $X = \overline{\bar{P} \cdot T}\cdot T$

$= \overline{\bar{P} \cdot T}\cdot T + \bar{P} =$ (T6) $\overline{X\,Y} = \bar{X} + \bar{Y}$; $X = \bar{P}$, $Y = T$

$= (P + \bar{T}) \cdot T + \bar{P} =$ (T9) $X\,(\bar{X} + Y) = X\,Y$; $X = T$, $Y = P$

$= P \cdot T + \bar{P} =$ (T9) $X + \bar{X}\,Y = X + Y$; $X = \bar{P}$, $Y = T$

$= T + \bar{P} =$ $P = A\,B + C$; $T = B\,\bar{C}$

$= B\,\bar{C} + \overline{A\,B + C} =$ (T6) $\overline{X + Y} = \bar{X}\;\bar{Y}$; $X= A\,B$, $Y = C$

$= B\,\bar{C} + \overline{A\,B} \cdot \bar{C} =$ (T6) $\overline{X\,Y} = \bar{X} + \bar{Y}$; $X = A$, $Y = B$

$= B\,\bar{C} + (\bar{A} + \bar{B}) \cdot \bar{C} =$ (P3) $X\,(Y + Z) = X\,Y + X\,Z$; $X = \bar{C}$, $Y = \bar{A}$, $Z = \bar{B}$

$= B\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{C} + \bar{B}\,\bar{C} =$ (T7) $X\,Y + X\,\bar{Y} = X$; $X = \bar{C}$; $Y = B$

$= \bar{C} + \bar{A}\,\bar{C} =$ (T4) $X + \bar{X}\,Y = X + Y$; $X = \bar{C}$, $Y = \bar{A}\,\bar{C}$

$= \bar{C}$

f) $[(A + B\,\bar{C}) \oplus \bar{A}\,C] + \overline{(B + C) \oplus \overline{A + B}}$

$(A + B\,\bar{C}) \oplus \bar{A}\,C =$ EXOR: $X \oplus Y = \bar{X}\,Y + X\,\bar{Y}$; $X = A + B\,\bar{C}$, $Y = \bar{A}\,C$

$= \overline{A + B\,\bar{C}} \cdot \bar{A}\,C + (A + B\,\bar{C})\,\overline{\bar{A}\,C} =$ (T6s) $\overline{A + B\,\bar{C}} = \bar{A}\,(\bar{B} + C)$; $\overline{\bar{A}\,C} = A + \bar{C}$

$= \bar{A}\,(\bar{B} + C)\,\bar{A}\,C + (A + B\,\bar{C})\,(A + \bar{C}) =$ (T2) $\bar{A} \cdot \bar{A} = \bar{A}$

$= \bar{A}\,(\bar{B} + C)\,C + (A + B\,\bar{C})\,(A + \bar{C}) =$ (T4) $(\bar{B} + C)\,C = C$

$= \bar{A}\,C + (A + B\,\bar{C})(A + \bar{C}) =$ (P3) $(A + B\,\bar{C})(A + \bar{C}) = A + B\,\bar{C}\,\bar{C}$

$= \bar{A}\,C + A + B\,\bar{C}\,\bar{C} =$ (T2) $\bar{C} \cdot \bar{C} = \bar{C}$; (T9) $= A + \bar{A}\,C = A + C$

$= A + C + B\,\bar{C} =$ (T9) $C + B\,\bar{C} = C + B$
$= A + B + C$

$\overline{(B + C) \oplus \overline{A + B}} =$ EXNOR: $\overline{X \oplus Y} = \bar{X}\,\bar{Y} + X\,Y$; $X = B + C$, $Y = \overline{A + B}$
$= \overline{B + C} \cdot \overline{\overline{A + B}} + (B + C)\,\overline{A + B} =$ (T1) $\overline{\overline{A + B}} = A + B$;
$= \overline{B + C}\,(A + B) + (B + C)\,\overline{A + B} =$ (T6) $\overline{B + C} = \bar{B}\,\bar{C}$; $\overline{A + B} = \bar{A}\,\bar{B}$
$= \bar{B}\,\bar{C}\,(A + B) + (B + C)\,\bar{A}\,\bar{B} =$ (T9) $\bar{B}\,(A + B) = \bar{B}\,A$; $(B + C)\,\bar{B} = C\,\bar{B}$
$= A\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,C$

$[(A + B\,\bar{C}) \oplus \bar{A}\,C] + \overline{(B + C) \oplus \overline{A + B}} =$
$= A + B + C + A\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,C =$ (T4) $A + A\,\bar{B}\,\bar{C} = A$; $C + \bar{A}\,\bar{B}\,C = C$
$= A + B + C$

g) $\overline{\overline{A\,(C + \bar{D})} \oplus \bar{B} \cdot \overline{\bar{A} + C}} + \overline{\bar{D} + \bar{B}\,C}\,A$

$\overline{\overline{A\,(C + \bar{D})} \oplus \bar{B}\,\overline{\bar{A} + C}} =$ EXNOR: $\overline{X \oplus Y} = \bar{X}\,\bar{Y} + X\,Y$; $X = \overline{A\,(C + \bar{D})}$, $Y = \bar{B} \cdot \overline{\bar{A} + C}$
$= \overline{\overline{A\,(C + \bar{D})}} \cdot \overline{\bar{B} \cdot \overline{\bar{A} + C}} + \overline{A\,(C + \bar{D})} \cdot \bar{B} \cdot \overline{\bar{A} + C} =$ (T1) $\overline{\overline{A\,(C + \bar{D})}} = A\,(C + \bar{D})$
$= A\,(C + \bar{D}) \cdot \overline{\bar{B} \cdot \overline{\bar{A} + C}} + \overline{A\,(C + \bar{D})} \cdot \bar{B} \cdot \overline{\bar{A} + C} =$ (T6s) $\overline{\bar{B} \cdot \overline{\bar{A} + C}} = B + \overline{\overline{\bar{A} + C}}$
(T6s) $\overline{A\,(C + \bar{D})} = \bar{A} + \bar{C}\,D$
(T6s) $\overline{\bar{A} + C} = A\,\bar{C}$
$= A\,(C + \bar{D})\left(B + \overline{\overline{\bar{A} + C}}\right) + (\bar{A} + \bar{C}\,D)\,\bar{B}\,A\,\bar{C} =$ (T1) $\overline{\overline{\bar{A} + C}} = \bar{A} + C$
$= A\,(C + \bar{D})\,(B + \bar{A} + C) + (\bar{A} + \bar{C}\,D)\,\bar{B}\,A\,\bar{C} =$ (T9) $A\,(B + \bar{A} + C) = A\,(B + C)$
(T9) $(\bar{A} + \bar{C}\,D)\,A = \bar{C}\,D\,A$
$= A\,(C + \bar{D})\,(B + C) + \bar{C}\,D\,\bar{B}\,A\,\bar{C} =$ (T2) $\bar{C} \cdot \bar{C} = \bar{C}$
$= A\,(C + \bar{D})\,(B + C) + A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D =$ (P3) $(C + \bar{D})\,(B + C) = C + B\,\bar{D}$
$= A\,(C + B\,\bar{D}) + A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D =$ (P3) $A\,X + A\,Y = A\,(X + Y)$
$= A\,(C + B\,\bar{D} + \bar{B}\,\bar{C}\,D) =$ (T9) $C + \bar{B}\,\bar{C}\,D = C + \bar{B}\,D$
$= A\,(C + B\,\bar{D} + \bar{B}\,D)$

$\overline{\overline{A\,(C + \bar{D})} \oplus \bar{B} \cdot \overline{\bar{A} + C}} + \overline{\bar{D} + \bar{B}\,C}\,A =$
$= A\,(C + B\,\bar{D} + \bar{B}\,D) + \overline{\bar{D} + \bar{B}\,C}\,A =$ (T6s) $\overline{\bar{D} + \bar{B}\,C} = D\,(B + \bar{C})$
$= A\,(C + B\,\bar{D} + \bar{B}\,D) + A\,D\,(B + \bar{C}) =$ (P3) $A\,X + A\,Y = A\,(X + Y)$
$= A\,[C + B\,\bar{D} + \bar{B}\,D + D\,(B + \bar{C})] =$ (P3) $D\,(B + \bar{C}) = A\,(X + Y)$
$= A\,(C + B\,\bar{D} + \bar{B}\,D + B\,D + \bar{C}\,D) =$ (T9) $C + \bar{C}\,D = C + D$
$= A\,(C + B\,\bar{D} + \bar{B}\,D + B\,D + D) =$ (T4) $\bar{B}\,D + B\,D + D = D$
$= A\,(C + B\,\bar{D} + D) =$ (T9) $B\,\bar{D} + D = B + D$
$= A\,(B + C + D) =$

Página 2_2. Se define la diferencia booleana de una función F(x1, x2, …, xk, …, xn), dF/d(xk) como F(x1, x2, …, 0, …, xn) ⊕ F(x1, x2, …, 1, …, xn). Calcular la diferencia booleana dF/dx4, donde:
$$\mathbf{F(x1, x2, x3, x4) = x1 + \overline{(x2 + x3)\,x4} + [x4 \oplus (x2 + x3\,x4)]}$$

Para calcular dF/dx4 hay que calcular primero F(x1, x2, x3, 0) (la función F cuando x4 es 0) y F(x1, x2, x3, 1)) (la función F cuando x4 es 1).

$F(x1, x2, x3, 0) = x1 + \overline{(x2 + x3)\ \cdot\ 0} + [0 \oplus (x2 + x3\ \cdot\ 0)]$

$x1 + \overline{(x2 + x3)\ \cdot\ 0} + [0 \oplus\ (x2 + x3\ \cdot\ 0)] =$ (T3) $X\ \cdot\ 0 = 0;\ \overline{(x2 + x3)\ \cdot\ 0} = \overline{0},$
$x3\ \cdot\ 0 = 0$

$= x1 + \overline{0} + [0 \oplus (x2 + 0)]$ (P4) $X + 0 = X;\ x2 + 0 = x2;\ \overline{0} = 1$

$= x1 + 1 + (0 \oplus x2)$ (T3) $X + 1 = 1;\ 0 \oplus x2 = x2$

$= 1$

$F(x1, x2, x3, 1) = x1 + \overline{(x2 + x3)\ \cdot\ 1} + [1 \oplus\ (x2 + x3\ \cdot\ 1)]$

$x1 + \overline{(x2 + x3)\ \cdot\ 1} + [1 \oplus\ (x2 + x3\ \cdot\ 1)] =$ (P4) $X\ \cdot\ 1 = X;\ \overline{(x2 + x3)\ \cdot\ 1} = \overline{x2 + x3}$
(P4) $x3\ \cdot\ 1 = x3$

$= x1 + \overline{x2 + x3} + [1 \oplus\ (x2 + x3)] =$ $X \oplus 1 = \overline{X}$

$= x1 + \overline{x2 + x3} + \overline{x2 + x3} =$ (T2) $X + X = X;\ X = \overline{x2 + x3}$

$= x1 + \overline{x2 + x3} =$ (T6) $\overline{X + Y} = \overline{X}\ \overline{Y};\ \overline{x2 + x3} = \overline{x2}\ \overline{x3}$

$= x1 + \overline{x2}\ \overline{x3}$

$dF/dx4 = F(x1, x2, x3, 0) \oplus F(x1, x2, x3, 1) =$

$= 1\ \oplus (x1 + \overline{x2}\ \overline{x3}) =$ $X \oplus 1 = \overline{X}$

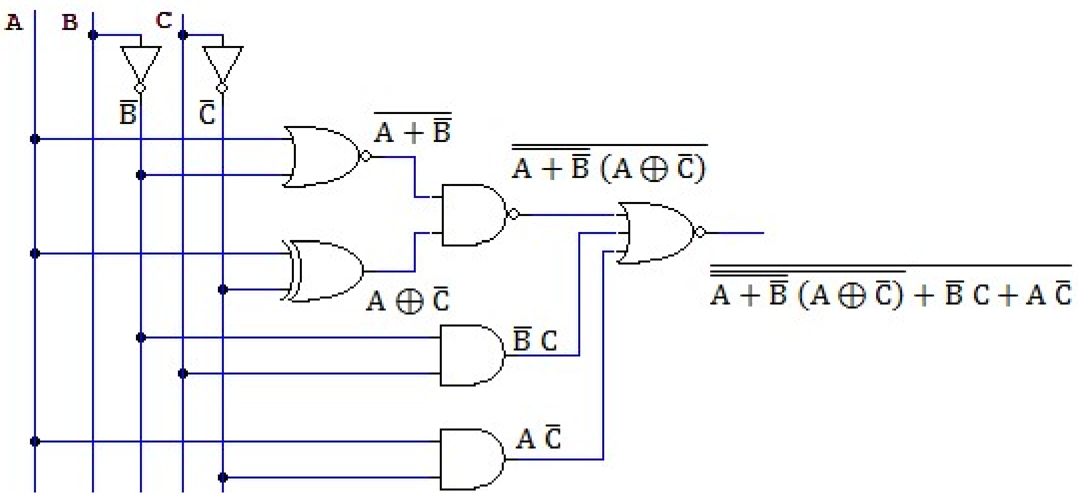
$= \overline{x1 + \overline{x2}\ \overline{x3}}\ =$ (T6s) $\overline{X + Y} = \overline{X}\ \overline{Y};\ \overline{X\,Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

$= \overline{x1}\ \cdot\ (x2 + x3)$

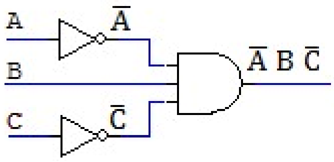
Página 3_1. Representar las siguientes funciones lógicas mediante puertas lógicas, simplificarlas y representar el circuito reducido.

a) $\overline{\overline{A + \overline{B}\ (A \oplus \overline{C})} + \overline{B}\ C + A\ \overline{C}}$

El circuito con puertas lógicas se representa así. Simplifico la función lógica y muestro el circuito de la función simplificada.

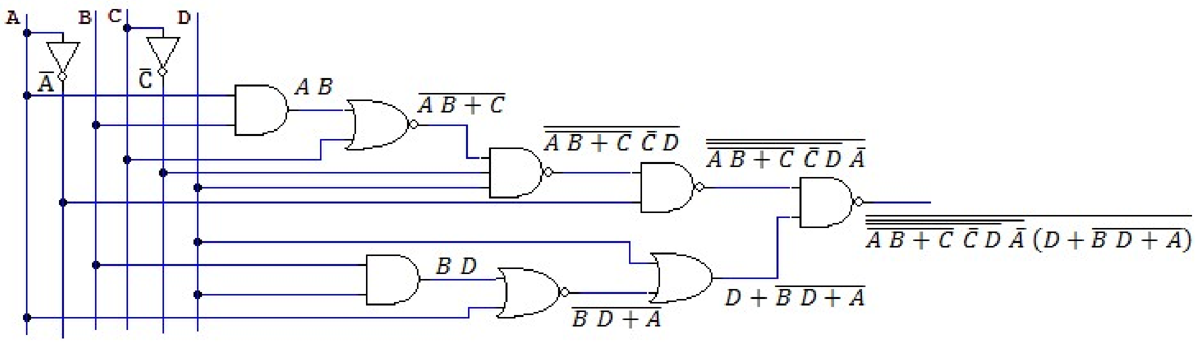


$\overline{\overline{\overline{A+\bar B}\,(A\oplus\bar C)}+\bar B\,C+A\,\bar C}=$	(T6) $\overline{X+Y+Z}=\bar X\ \bar Y\ \bar Z$
$=\overline{\overline{\overline{A+\bar B}\,(A\oplus\bar C)}}\cdot\overline{\bar B\,C}\cdot\overline{A\,\bar C}=$	(T1) $\bar{\bar X}=X$; (T6) $\overline{X\cdot Y}=\bar X+\bar Y$
$=\overline{A+\bar B}\,(A\oplus\bar C)\cdot(B+\bar C)\cdot(\bar A+C)=$	(T6) $\overline{A+\bar B}=\bar A\,\bar{\bar B}$; $A\oplus\bar C=\bar A\,\bar C+A\,C$
$=\bar A\,\bar{\bar B}\,(\bar A\,\bar C+A\,C)\cdot(B+\bar C)\cdot(\bar A+C)=$	(T1) $\bar{\bar B}=B$
$=\bar A\,B\,(\bar A\,\bar C+A\,C)\cdot(B+\bar C)\cdot(\bar A+C)=$	(T4) $\bar A\,(\bar A+C)=\bar A$, $B\,(B+\bar C)=B$
$=\bar A\,B\,(\bar A\,\bar C+A\,C)=$	(P3) $\bar A\,(\bar A\,\bar C+A\,C)=\bar A\,\bar A\,\bar C+\bar A\,A\,C$
$=B\,(\bar A\,\bar A\,\bar C+\bar A\,A\,C)=$	(T2) $\bar A\,\bar A=\bar A$; (P5) $\bar A\,A=0$
$=B\,(\bar A\,\bar C+0\cdot C)=$	(T3) $0\cdot C=0$
$=B\,(\bar A\,\bar C+0)=$	(P4) $\bar A\,\bar C+0=\bar A\,\bar C$
$=\bar A\,B\,\bar C$	



b) $\overline{\overline{\overline{\overline{A\,B+C}\,\bar C\,D}\,\bar A}\,(D+\overline{B\,D+A})}$

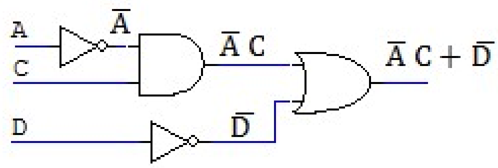
Representación con puertas lógicas de la función lógica



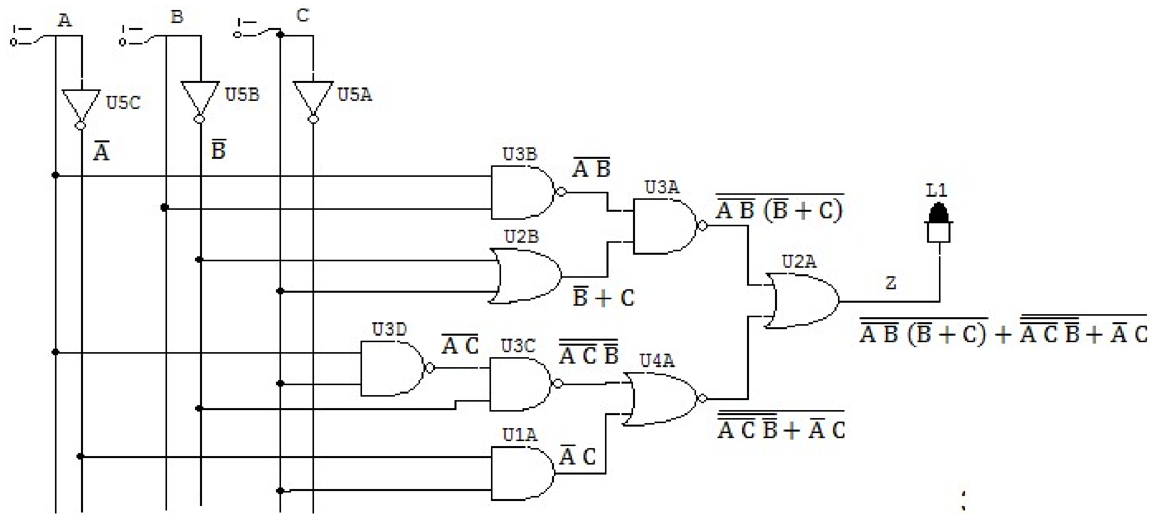
Simplificación de la función lógica:

$\overline{\overline{\overline{\overline{A\,B+C}\,\bar C\,D}\,\bar A}\,(D+\overline{B\,D+A})}=$	(T6) $\overline{X\cdot Y}=\bar X+\bar Y$
$=\overline{\overline{\overline{\overline{A\,B+C}\,\bar C\,D}\,\bar A}}+\overline{D+\overline{B\,D+A}}=$	(T1) $\bar{\bar X}=X$
$=\overline{\overline{A\,B+C}\,\bar C\,D}\,\bar A+\overline{D+\overline{B\,D+A}}=$	(T6) $\overline{X\cdot Y\cdot Z}=\bar X+\bar Y+\bar Z$; $\overline{X+Y}=\bar X\cdot\bar Y$
$=\left(\overline{\overline{A\,B+C}}+\bar{\bar C}+\bar D\right)\bar A+\bar D\cdot\overline{\overline{B\,D+A}}=$	(T1) $\bar{\bar C}=C$
$=(A\,B+C+C+\bar D)\,\bar A+\bar D\,(B\,D+A)=$	(T2) $C+C=C$
$=(A\,B+C+\bar D)\,\bar A+\bar D\,(B\,D+A)=$	(P3) $X\,(Y+Z)=X\,Y+X\,Z$
$=A\,B\,\bar A+C\,\bar A+\bar D\,\bar A+\bar D\,B\,D+\bar D\,A=$	(P5) $A\cdot\bar A=0$, $D\,\bar D=0$; (T3) $X\cdot 0=0$;
	(P4) $X+0=X$
$=C\,\bar A+\bar D\,\bar A+\bar D\,A=$	(T7) $\bar D\,\bar A+\bar D\,A=\bar D$
$=\bar A\,C+\bar D=$	

El circuito de la función simplificada es:

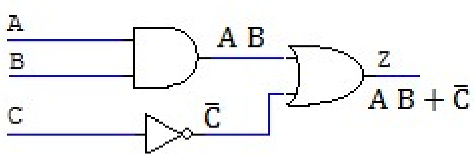


Página 3_2. Encontrar la función lógica que realiza el siguiente circuito. Simplificarla y construir un nuevo circuito reducido.



$\overline{\overline{A\,B}\,(\overline{B}+C)} + \overline{\overline{\overline{A\,C}\,\overline{B}} + \overline{A}\,C} =$	(T6) $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$; $X = \overline{A\,B}$; $Y = \overline{B} + C$
	(T6) $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$; $X = \overline{\overline{A\,C}\,\overline{B}}$; $Y = \overline{A}\,C$
$= \overline{\overline{\overline{A\,B}}} + \overline{\overline{B} + C} + \overline{\overline{\overline{\overline{A\,C}\,\overline{B}}}} \cdot \overline{\overline{A}\,C} =$	(T1) $\overline{\overline{X}} = X$; $X = \overline{\overline{A\,B}}$, $X = \overline{\overline{\overline{A\,C}\,\overline{B}}}$
$= A\,B + \overline{\overline{B} + C} + \overline{A\,C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{\overline{A}\,C} =$	(T6) $\overline{\overline{B} + C} = B\,\overline{C}$; $\overline{A\,C} = \overline{A} + \overline{C}$; $\overline{\overline{A}\,C} = A + \overline{C}$
$= A\,B + B\,\overline{C} + (\overline{A} + \overline{C})\,\overline{B}\,(A + \overline{C}) =$	(T7) $(X + Y) \cdot (X + \overline{Y}) = X$; $X = \overline{C}$; $Y = A$
$= A\,B + B\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} =$	(T7) $X\,Y + X\,\overline{Y} = X$; $X = \overline{C}$; $Y = B$
$= A\,B + \overline{C}$	

Y el circuito resultante es:



Página 4_1. Una bombilla (B) en un panel de control se enciende si: el sistema (S) está ON y, el modo (M) de funcionamiento es automático, ó bien el modo de funcionamiento es manual y el control (C) está en situación de espera.
Representar este enunciado por una función lógica y su correspondiente circuito lógico. Simplificar la función lógica si es posible y realizar el circuito lógico.

Declaro las variables que tenemos y las variables lógicas asociadas. Las variables X tienen sólo dos opciones que se codifican como los valores lógicos 1 ó 0, y que se representan respectivamente desde el punto de vista lógico por la variable X, o por $\overline{X}$ (No X).

Variable	**Tipo**	**Símbolo**	**Verdadero**	**Falso**
Bombilla	Salida	B	Encendida, B, 1	Apagada, $\overline{B}$, 0
Sistema	Entrada	S	ON, S, 1	OFF, $\overline{S}$, 0
Modo	Entrada	M	Automático, M, 1	Manual, $\overline{M}$, 0
Control	Entrada	C	Espera, C, 1	No espera, $\overline{C}$, 0

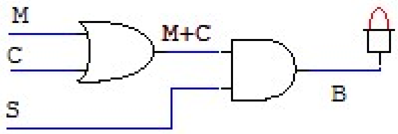
Para generar una función lógica B = F(B, S, M, C) pongo el enunciado en forma de operaciones **y** (AND, ●), **o** (OR, +) y **no** (NOT, ¯):

Bombilla encendida: Sistema ON **y** [Modo automático **o** (Modo manual **y** Control en espera)]

$$B \quad = \quad S \quad \bullet \; (\quad M \quad + \quad \overline{M} \quad \bullet \quad C \quad)$$

La función queda como $B = S \bullet (M + \overline{M} \bullet C)$. Esta función se puede simplificar, ya que se puede aplicar el teorema de simplificación (T9): $M + \overline{M} \bullet C = M + C$. Por tanto,
$B = S \bullet (M + C)$.

El circuito correspondiente a esta función queda:



Página 4_2. A, B y C coleccionan muebles.
A está interesado en muebles de salón excepto mesas inglesas, o muebles ingleses que no sean mesas.
B está interesado en muebles que no sean mesas, y que sean ingleses o sean muebles de salón no ingleses.
C está interesado en muebles de salón ingleses, o en mesas no inglesas.
Determinar la tabla de verdad y una función lógica reducida para los muebles buscados por separado por A, por B, y por C y los muebles buscados por dos o más coleccionistas.

Este problema es un problema de conjuntos. Si el universo son los muebles están los conjuntos de muebles de salón, de muebles mesas y muebles ingleses. Las operaciones con los conjuntos son la intersección y la unión. Este sistema de conjuntos es equivalente al álgebra de conmutación donde la unión es el OR (+), y la intersección es el AND (●). El complemento de un conjunto corresponde a los elementos que no son del conjunto: el complemento de los muebles ingleses son los muebles no ingleses.

En los enunciados hay tres tipos de muebles:

- De salón S. Los muebles que no son de salón son $\overline{S}$.
- Mesas M. Los muebles que no son mesas son $\overline{M}$.
- Muebles ingleses I. Los muebles que no son ingleses son $\overline{I}$.

Las variables A, B, C son los conjuntos por los que se interesan los coleccionistas, y D es el conjunto buscado por dos o más coleccionistas. Con esto se pueden plantear las siguientes funciones lógicas para A, B, C y D.

$A = S\,\overline{M\,I} + I\,\overline{M}$ ((salón y no (mesas inglesas) o (ingleses y no mesas))
$B = \overline{M}\,(I + S\,\overline{I}\,)$ (no mesas y (ingleses o (de salón y no ingleses)))
$C = S\,I + M\,\overline{I}$ ((salón e ingleses) o (mesas y no inglesas))
$D = A\,B + A\,C + B\,C + A\,B\,C$ (dos coleccionistas: A y B, o A y C, o B y C, o tres coleccionistas: A y B y C)

El problema puede resolverse por tabla de verdad o por álgebra de conmutación:

Tabla de verdad

S	M	I	A	B	C	D
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0

De la tabla de verdad se puede extraer una forma canónica SOP:

$D = \overline{S}\,\overline{M}\,I + S\,\overline{M}\,\overline{I} + S\,\overline{M}\,I + S\,M\,\overline{I}$

que se puede reducir usando el teorema de adyacencia (T7), ya que:

$\overline{S}\,\overline{M}\,I + S\,\overline{M}\,I = \overline{M}\,I$
$S\,\overline{M}\,\overline{I} + S\,M\,\overline{I} = S\,\overline{I}$.

De aquí que:

$D = \overline{M}\,I + S\,\overline{I}$

Los muebles buscados por dos o más coleccionistas son: muebles ingleses que no son mesas ($\overline{M}$ I) ó muebles de salón no ingleses (S $\overline{I}$).

Álgebra de conmutación

Se simplifican las funciones lógicas en lo posible. Indico entre paréntesis el postulado o el teorema utilizado y en cursiva los términos de la expresión a los que se aplican.

$A = S\,\overline{M\,I} + I\,\overline{M}$ = (T6) $S\,(\overline{M} + \overline{I}) + \overline{M}\,I$ = (P3) $S\,\overline{M} + S\,\overline{I} + \overline{M}\,I$ = (T8) $S\,\overline{I} + \overline{M}\,I$
$B = \overline{M}\,(I + S\,\overline{I}\,)$ = (T9) $\overline{M}\,(I + S)$
$C = S\,I + M\,\overline{I}$
$D = A\,B + A\,C + B\,C + A\,B\,C$ = (T4) $A\,B + A\,C + B\,C$

Obtengo D = F(S, M, I) sustituyendo en A, B y C, y simplificando mediante el álgebra de conmutación.

$D = (S\,\bar{I} + I\,\bar{M})\,\bar{M}\,(I + S) + (S\,\bar{I} + I\,\bar{M})\,(S\,I + M\,\bar{I}) + \bar{M}\,(I + S)\,(S\,I + M\,\bar{I})$

$A\,B = (S\,\bar{I} + I\,\bar{M})\,\bar{M}\,(I + S) = (P3, T2)\ (S\,\bar{I}\,\bar{M} + I\,\bar{M})\,(I + S) =$
$= (P3, T2, P5, T3, P4)\ I\,\bar{M} + S\,\bar{I}\,\bar{M} + S\,I\,\bar{M} = (T7)\ \bar{M}\,I + S\,\bar{M}$

$A\,C = (S\,\bar{I} + I\,\bar{M})\,(S\,I + M\,\bar{I}) = (P3, T2, P5, T3, P4)\ S\,M\,\bar{I} + S\,\bar{M}\,I$

$B\,C = \bar{M}\,(I + S)\,(S\,I + M\,\bar{I}) = (P3, P5, T3, P4)\ \bar{M}\,S\,I\,(I + S) = (T4)\ S\,\bar{M}\,I$

$D = \bar{M}\,I + S\,\bar{M} + S\,M\,\bar{I} + S\,\bar{M}\,I + S\,\bar{M}\,I = (T2)\ \bar{M}\,I + S\,\bar{M}\,I + S\,\bar{M} + S\,M\,\bar{I} =$
$= (T4)\ \bar{M}\,I + S\,\bar{M} + S\,M\,\bar{I} =\ (P3)\ \bar{M}\,I + S\,(\bar{M} + M\,\bar{I}) = (T9)\ \bar{M}\,I + S\,(\bar{M} + \bar{I}) =$
$= (P3)\ S\,\bar{M} + S\,\bar{I} + \bar{M}\,I = (P8)\ S\,\bar{I} + \bar{M}\,I$

El resultado coincide con el obtenido por tablas de verdad: muebles ingleses que no son mesas ($\bar{M}\,I$) ó muebles de salón no ingleses ($S\,\bar{I}$).

Página 5. Una corporación financiera debe resolver un problema transcendente para su futuro. Para ello su presidente pide opinión a sus tres mejores economistas A, B y C, y conociendo como razonan decide que se tomará una decisión positiva si A y B están a favor, ó no lo están ni A ni C, ó si lo está B pero no C. Los economistas utilizan el siguiente proceso de decisión:
- A está a favor si hace buen tiempo y, es antes del mediodía siendo el día del mes par o es después del mediodía.
- B está en contra si el día del mes es impar o hace buen tiempo y, es antes del mediodía o hace mal tiempo.
- C está en contra si es antes del mediodía, hace mal tiempo y el día del mes es par.
a) Encontrar las ecuaciones lógicas que definen el sistema e implementarlas con puertas lógicas.
Utilizar el álgebra de conmutación para resolver simplificando al máximo posible el resultado de la decisión en función de los factores ambientales, e implementarla con puertas lógicas.
b) Encontrar el resultado de la decisión usando únicamente tablas de verdad.

a) Defino como D que la decisión sea positiva y con $\bar{D}$ que sea negativa (no positiva). A su vez declaro con A, B, C que los economistas estén a favor, y por tanto $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ que estén en contra (no a favor). A, B y C dependen de factores ambientales. Uso T para el buen tiempo y $\bar{T}$ para el mal (no buen) tiempo, M si es antes del mediodía y $\bar{M}$ si es después (no antes) del mediodía, y P si el día del mes es par y si $\bar{P}$ es impar (no par).

Las funciones lógicas que determinan D en función de A, B y C, y A, B y C en función de T, M y P salen del enunciado:

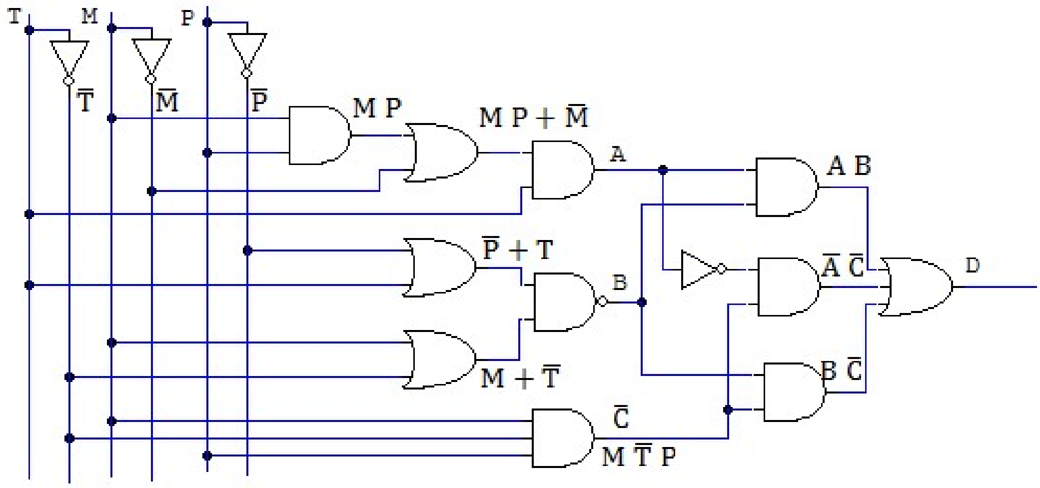
- La decisión D es positiva si A y (●) B están a favor (A B) , ó (+) no lo están ni A ni C ($\bar{A}\,\bar{C}$), ó (+) si lo está B pero no C ($B\,\bar{C}$) => $D = F(A, B, C) = A\,B + \bar{A}\,\bar{C} + B\,\bar{C}$.

- A está a favor si hace buen tiempo (T) y, (es antes del mediodía (M) siendo (●) el día del mes par (P) o (+) es después del mediodía ($\bar{M}$)) => $A = F1(M, T, P) = T\,(M\,P + \bar{M})$.

- B está en contra ($\overline{B}$) si (el día del mes es impar ($\overline{P}$) o (+) hace buen tiempo (T)) y (●), (es antes del mediodía (M) o (+) hace mal tiempo ($\overline{T}$)) => B = F2(M, T, P); $\overline{B} = (\overline{P} + T)\ (M + \overline{T})$ => $B = \overline{(\overline{P} + T)\ (M + \overline{T})}$.

- C está en contra $\overline{C}$ si es antes del mediodía (M), (●) hace mal tiempo ($\overline{T}$) y (●) el día del mes es par (P) => C = F3(M, T, P); $\overline{C} = M\ \overline{T}\ P$ => $C = \overline{M\ \overline{T}\ P}$.

El circuito correspondiente a estas funciones lógicas es el siguiente:

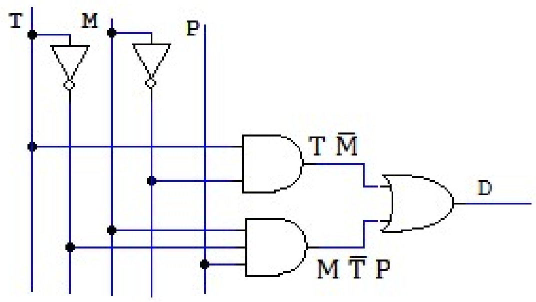


Simplifico las funciones lógicas y calculo D = F(T, M, P) simplificada, y el circuito correspondiente:

$D = A\ B + \bar{A}\ \bar{C} + B\ \bar{C}$ = (T8) $A\ B + \overline{A}\ \overline{C}$
$A = T\ (M\ P + \overline{M})$ = (T9) $T\ (P + \overline{M})$ => $\overline{A} = \overline{T\ (P + \overline{M})}$ = (T6s) $\overline{T} + \overline{P}\ M$
$\overline{B} = (\overline{P} + T)\ (M + \overline{T})$ => $B = \overline{(\overline{P} + T)\ (M + \overline{T})}$ = (T6s) $P\ \overline{T} + \overline{M}\ T$
$\overline{C} = M\ \overline{T}\ P$

Luego $D = A\ B + \overline{A}\ \overline{C} = T\ (P + \overline{M})\ (P\ \overline{T} + \overline{M}\ T) + (\overline{T} + \overline{P}\ M)\ M\ \overline{T}\ P$ =
= (T4) $T\ (P + \overline{M})\ (P\ \overline{T} + \overline{M}\ T) + M\ \overline{T}\ P$ = (P3, T2, P5, T3, P4) $T\ \overline{M}\ (P + \overline{M}) + M\ \overline{T}\ P$ =
= (T4) $T\ \overline{M} + \overline{T}\ M\ P$.

$D = T\ \overline{M} + M\ \overline{T}\ P$. La decisión es positiva cuando hace buen tiempo y es después del mediodía, o cuando es antes del mediodía, hace mal tiempo y el día del mes es par.



b) Tabla de verdad

T	M	P	M P	M P+$\overline{M}$	A	T+$\overline{P}$	$\overline{T}$+M	B	C	AB	$\overline{A}\,\overline{C}$	B $\overline{C}$	D
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0

De la tabla obtengo una forma canónica SOP, D = $\overline{T}\ M\ P + T\ \overline{M}\ \overline{P} + T\ \overline{M}\ P$, que puedo reducir a una forma estándar SOP con el teorema de adyacencia (T7), ya que $T\ \overline{M}\ \overline{P} + T\ \overline{M}\ P\ = T\ \overline{M}$, y genero D = $\overline{T}\ M\ P + T\ \overline{M}$, que es la misma que la obtenida en el apartado a).

Página 6. La representación de números con signo puede hacerse mediante un código de dígitos con signo, en el que cada dígito binario puede tomar tres valores: +1, 0 y -1. El valor +1 añade el peso positivo en binario natural (2^i: 1, 2, 4, 8, 16, …) del dígito al valor final del número, el valor -1 añade el peso negativo, y el valor 0 no añade peso. Cada dígito Di se representa en binario por dos bits (Si Ri), y el valor del dígito Di = Si – Ri: (1 0) es +1, (0 1) es –1; (0 0) y (1 1) son 0,

Un número N en código de dígitos con signo se puede pasar a un número X en complemento-2 en tres pasos:

- **Para cada dígito Di, Yi es 1, si el dígito i es +1 ó –1, y 0 si el dígito es 0.**
- **Para cada dígito Di, Zi se obtiene del dígito menos significativo (D0) al más significativo (Dn). Z0 = 0; para el resto de los dígitos Zi es 1 si el dígito D(i-1) toma el valor –1, si el dígito D(i-1) toma el valor +1 Zi es 0, y Zi = Z(i-1) si el dígito D(i-1) toma el valor 0.**
- **Xi es 1 si Yi y Zi son distintos, y Xi es 0 si Yi y Zi son iguales.**

Siguiendo el enunciado, indicar las funciones lógicas que definen un circuito que realiza la conversión de código de dígitos con signo de 4 dígitos a complemento-2, e implementarlas con puertas lógicas

Primero obtengo las entradas y salidas del problema. Con 4 dígitos D3, D2, D1 y D0, hay 8 entradas (S3 R3) (S2 R2) (S1 R1) (S0 R0). El número de salidas depende de los valores máximos y mínimos

N	8	4	2	1
Mínimo: -15	-1	-1	-1	-1
Máximo: +15	+1	+1	+1	+1

Como el número con 4 dígitos de signo está en [-15, +15], el número X en complemento-2 necesitará 5 bits (Z4 Z3 Z2 Z1 Z0) de pesos (-16 8 4 2 1). Para la conversión de N a X hay que suponer en N un quinto dígito D4, pero que va a estar a 0 siempre, como si fuese una extensión a la izquierda.

Para calcular el circuito podemos ir por partes:

1. Primero calculamos los bits Y_i, siguiendo el enunciado. Cada Y_i depende de $D_i = S_i - R_i$, de forma que Y_i es 1 si D_i es -1 ó +1, Y_i es 0 si D_i es 0. Esto lo podemos poner en la siguiente tabla:

D_i	S_i	R_i	Y_i	$D_i = -1$	$D_i = 0$
0	0	0	0	0	1
-1	0	1	1	1	0
+1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1

Si se observa la tabla de $Y_i = F(S_i, R_i)$ y se compara con las tablas de las puertas lógicas estándar (diapositivas 17 y 18 de teoría), se comprueba que esta tabla es la de una puerta EXOR. Luego

$Y_i = S_i \oplus R_i$ para i de 0 a 3; $Y_4 = 0$, ya que D_4 es 0.

2. Para generar Zi podemos sacar las funciones del enunciado, empezando por y $Z_0 = 0$. Para el resto, Zi es 1 cuando el digito D_{i-1} es -1, o cuando D_{i-1} es 0 y Z_{i-1} es 1. De la tabla anterior se puede ver que un dígito D_i es -1 cuando S_i es 0 y R_i es 1 ($\overline{S_i}\ R_i$), y que D_i sea 0 es $\overline{Y_i} = \overline{S_i \oplus R_i}$. Luego planteo las ecuaciones y simplifico cuando sea sencillo:

$(D_i = 0) = \overline{S_i \oplus R_i}$; $(D_i = -1) = \overline{S_i}\ R_i$

$Z_0 = 0$
$Z_i = (D_{i-1} = -1) + (D_{i-1} = 0) \bullet Z_{i-1} \Rightarrow Z_i = \overline{S_{i-1}}\ R_{i-1} + \overline{S_{i-1} \oplus R_{i-1}} \bullet Z_{i-1}$

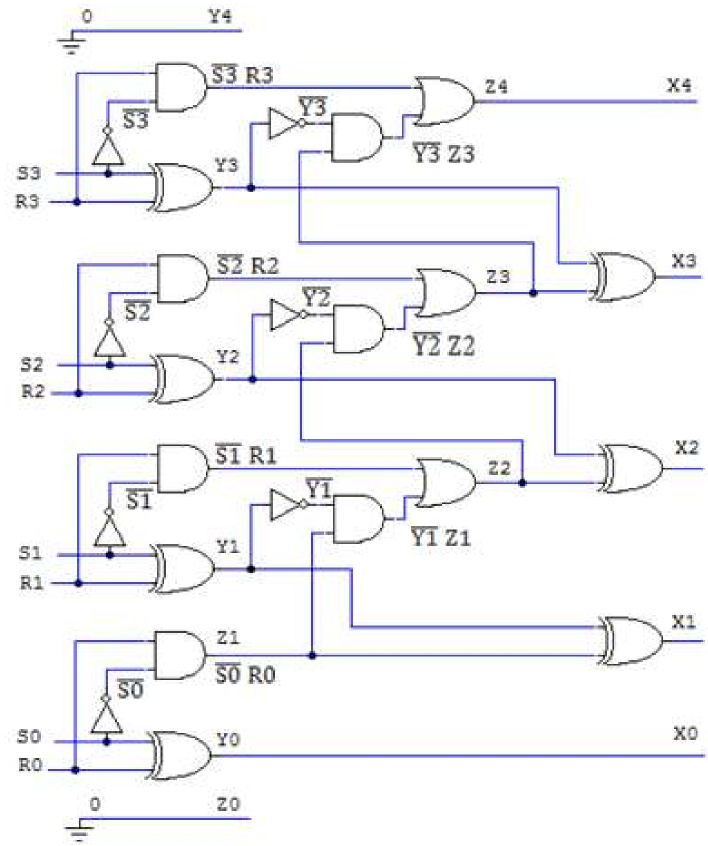
$Z_1 = \overline{S_0}\ R_0 + \overline{Y_0} \bullet Z_0 = \overline{S_0}\ R_0 + \overline{S_0 \oplus R_0} \bullet Z_0 = \overline{S_0}\ R_0 + \overline{S_0 \oplus R_0} \bullet 0 = \overline{S_0}\ R_0$
$Z_2 = \overline{S_1}\ R_1 + \overline{Y_1} \bullet Z_1 = \overline{S_1}\ R_1 + \overline{S_1 \oplus R_1} \bullet Z_1$
$Z_3 = \overline{S_2}\ R_2 + \overline{Y_2} \bullet Z_2 = \overline{S_2}\ R_2 + \overline{S_2 \oplus R_2} \bullet Z_2$
$Z_4 = \overline{S_3}\ R_3 + \overline{Y_3} \bullet Z_3 = \overline{S_3}\ R_3 + \overline{S_3 \oplus R_3} \bullet Z_3$

3. Para generar X_i, según el enunciado, es 1 cuando Y_i y Z_i son distintos y es 0 si son iguales. Se puede ver en la siguiente tabla:

Y_i	Z_i	X_i
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

que, comparando con la tabla anterior, se comprueba que vuelve a ser una EXOR, con lo que $X_i = Y_i \oplus Z_i$, con la salvedad de los bits 0 y 4. Como Z_0 es 0, $X_0 = Y_0 \oplus 0 = Y_0$, y como Y_4 es 0, $X_4 = 0 \oplus Z_4 = Z_4$. Para generar el resto de X_i se requiere una EXOR por bit.

Ya tengo las ecuaciones, y de estas genero el circuito:



El circuito puede mejorarse, generando directamente $\overline{Y_i}$ en vez de Y_i, y que $X_i = Y_i \oplus Z_i = \overline{Y_i} \oplus Z_i$ usando puertas EXNOR en vez de EXOR, para i = 1, 2, 3 ($\overline{Y1}$, X1, $\overline{Y2}$, X2, $\overline{Y3}$, X3), ya que se eliminan las tres puertas NOT que generan $\overline{Y1}$, $\overline{Y2}$ e $\overline{Y3}$. Queda propuesto.

Página 7. Se quiere diseñar un circuito que, dado un número N de 4 bits (N3 N2 N1 N0), genere como salida un número C de 4 bits (C3 C2 C1 C0) que sea el complemento a 2 de N.
El circuito debe realizar la transformación siguiendo este algoritmo: sea Nk el bit a valor 1 de N de menor índice k, entonces para cada bit i de C, Ci = Ni si i $\leq$ k, y Ci = $\overline{Ni}$, si i > k. El circuito debe diseñarse mediante un circuito formado por dos bloques B1 y B2:
B1. Lee los bits de entrada de N y genera una señal intermedia Z de 4 bits (Z3 Z2 Z1 Z0). Siguiendo el algoritmo anterior Zi es 0 si i ≤ k, y Zi es 1, si i > k.
B2. Ci = Ni si Zi es 0; Ci = $\overline{Ni}$, si Zi = 1.
Mostrar en tablas de verdad la operación de los bloques B1 y B2, encontrar las ecuaciones lógicas reducidas que permiten definir sus salidas, y diseñar el circuito utilizando puertas lógicas de dos entradas.

El bloque B1 se puede desarrollar en una tabla para los 4 bis de N. La tabla representa las situaciones que en las que el primer bit a 1 está en cada uno de los bits de N. Cada fila se puede representar por una función lógica, como se realiza al obtener las formas canónicas SOP en una tabla de verdad (diapositiva 31 de teoría). En la primera fila no hay bits a 1 (podría decirse que k ≥ 4), por lo que todas las Zs son 0. La función lógica de esta situación se muestra en la tabla. En la segunda fila el primer bit a 1 es N3 => k = 3: todas las Zs son 0.

La tercera fila corresponde a que el bit menos significativo a 1 es N2 = > k = 2 => Z3 es 1 y el resto de Zs es 0; en esta fila el valor de N3 es indiferente (da igual que sea 0 ó 1), lo que indico con una X; la función lógica de esta fila no depende de N3. Las siguientes filas siguen el procedimiento descrito para B1.

Función	**N3**	**N2**	**N1**	**N0**	**Z3**	**Z2**	**Z1**	**Z0**
$\overline{N3}\,\overline{N2}\,\overline{N1}\,\overline{N0}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$N3\,\overline{N2}\,\overline{N1}\,\overline{N0}$	1	0	0	0	0	0	0	0
$N2\,\overline{N1}\,\overline{N0}$	X	1	0	0	1	0	0	0
$N1\,\overline{N0}$	X	X	1	0	1	1	0	0
$N0$	X	X	X	1	1	1	1	0

De la tabla se pueden obtener las funciones de cada bit de Z, como al calcular las formas canónicas SOP de una tabla de verdad. Para cada Z hay que hacer el OR de las funciones lógicas asociadas a las filas que producen 1 en su columna, y simplificarlas si fuese posible. Así:

$Z0 = 0$

$Z1 = N0$

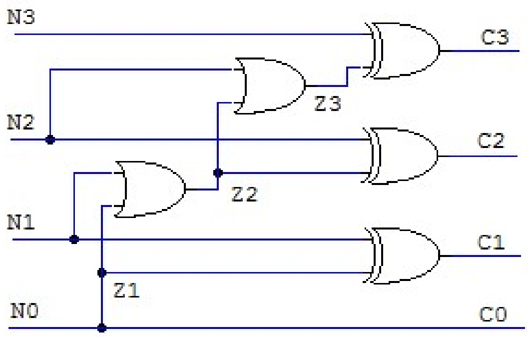
$Z2 = N0 + N1\,\overline{N0} = (T9)\ N0 + N1$

$Z3 = N0 + N1\,\overline{N0} + N2\,\overline{N1}\,\overline{N0} = (T9)\ N0 + N1 + N2\,\overline{N1} = (T9)\ N0 + N1 + N2 = Z2 + N2$

El bloque B2 se puede desarrollar de la siguiente tabla de verdad de C en función de N y de Z. Al comprobar esa tabla se ve que coincide con la tabla de la puerta XOR luego, en principio, $Ci = Ni \oplus Zi$. Como en el bloque 1 se ha obtenido que $Z0 = 0$, $C0 = N0 \oplus 0 = N0$, sin necesitar usar la puerta EXOR

Zi	**Ni**	**Ci**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Con estas ecuaciones se genera el circuito (usando puertas de dos entradas):



Página 8. Encontrar las formas canónicas SOP y POS de las siguientes funciones lógicas.

Las funciones lógicas de 3 entradas utilizan los términos para las formas SOP y POS según la siguiente tabla:

A	B	C	Decimal	SOP	POS
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$A+B+C$
0	0	1	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	$A+B+\overline{C}$
0	1	0	2	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	$A+\overline{B}+C$
0	1	1	3	$\overline{A}\,B\,C$	$A+\overline{B}+\overline{C}$
1	0	0	4	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}+B+C$
1	0	1	5	$A\,\overline{B}\,C$	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1	1	0	6	$A\,B\,\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1	1	1	7	$A\,B\,C$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

a) F(A, B, C) = ∑(0, 5, 6, 7)

F(A, B, C) = ∑(0, 5, 6, 7) = ∏(1, 2, 3, 4)
SOP. F(A, B, C) = $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$
POS. F(A, B, C) = $(A+B+\overline{C})\,(A+\overline{B}+C)\,(A+\overline{B}+\overline{C})\,(\overline{A}+B+C)$

b) F(A, B, C) = ∑(2, 3, 4, 6, 7)

F(A, B, C) = ∑(2, 3, 4, 6, 7) = ∏(0, 1, 5)
SOP. F(A, B, C) = $\overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$
POS. F(A, B, C) = $(A+B+C)\,(A+B+\overline{C})\,(\overline{A}+B+\overline{C})$

c) F(A, B, C) = ∏(1, 2, 4, 5, 6, 7)

F(A, B, C) = ∏(1, 2, 4, 5, 6, 7) = ∑(0, 3)
POS. F(A, B, C) = $(A+B+\overline{C})\,(A+\overline{B}+C)\,(\overline{A}+B+C)\,(\overline{A}+B+\overline{C})\,(\overline{A}+\overline{B}+C)$
$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$
SOP. F(A, B, C) = $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,C$

Las funciones lógicas de 4 entradas utilizan los términos para las formas SOP y POS según la siguiente tabla:

A	B	C	D	Decimal	SOP	POS
0	0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A+B+C+D$
0	0	0	1	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$	$A+B+C+\overline{D}$
0	0	1	0	2	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}$	$A+B+\overline{C}+D$
0	0	1	1	3	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D$	$A+B+\overline{C}+\overline{D}$
0	1	0	0	4	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A+\overline{B}+C+D$
0	1	0	1	5	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D$	$A+\overline{B}+C+\overline{D}$
0	1	1	0	6	$\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}$	$A+\overline{B}+\overline{C}+D$
0	1	1	1	7	$\overline{A}\,B\,C\,D$	$A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$
1	0	0	0	8	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}+B+C+D$
1	0	0	1	9	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$	$\overline{A}+B+C+\overline{D}$
1	0	1	0	10	$A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}$	$\overline{A}+B+\overline{C}+D$
1	0	1	1	11	$A\,\overline{B}\,C\,D$	$\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$
1	1	0	0	12	$A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+C+D$
1	1	0	1	13	$A\,B\,\overline{C}\,D$	$\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}$
1	1	1	0	14	$A\,B\,C\,\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D$
1	1	1	1	15	$A\,B\,C\,D$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$

d) F(A, B, C, D) = ∑(3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15)

F(A, B, C, D) = ∑(3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15) = ∏(0, 1, 2, 5, 8, 10, 13)

SOP. F(A, B, C, D) = $\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,C\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,C\,D\ +$
$+ A\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,B\,C\,\overline{D} + A\,B\,C\,D$
POS. F(A, B, C) = $(A + B + C + D)\,(A + B + C + \overline{D})\,(A + B + \overline{C} + D)\,(A + \overline{B} + C + \overline{D})$
$(\overline{A} + B + C + D)\,(\overline{A} + B + \overline{C} + D)\,(\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D})$

e) F(A, B, C, D) = ∑(0, 2, 3, 5, 7, 8, 12, 13)

F(A, B, C, D) = ∑(0, 2, 3, 5, 7, 8, 12, 13) = ∏(1, 4, 6, 9, 10, 11, 14, 15)

SOP. F(A, B, C, D) = $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,B\,C\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\ +$
$+ A\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,B\,\overline{C}\,D$
POS. F(A, B, C, D) = $(A + B + C + \overline{D})\,(A + \overline{B} + C + D)\,(A + \overline{B} + \overline{C} + D)\,(\overline{A} + B + C + \overline{D})$
$(\overline{A} + B + \overline{C} + D)\,(\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D)\,(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$

f) F(A, B, C, D) = ∏(1, 2, 4, 5, 6, 7, 12, 15)

F(A, B, C, D) = ∏(1, 2, 4, 5, 6, 7, 12, 15) = ∑(0, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 14)

POS. F(A, B, C, D) = $(A + B + C + \overline{D})\,(A + B + \overline{C} + D)\,(A + \overline{B} + C + D)\,(A + \overline{B} + C + \overline{D})$
$(A + \overline{B} + \overline{C} + D)\,(A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{A} + \overline{B} + C + D)\,(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$
SOP. F(A, B, C, D) = $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\ +$
$+ A\,\overline{B}\,C\,D + A\,B\,C\,\overline{D}$

g) F(A, B, C, D) = ∑(0, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15)

F(A, B, C, D) = ∑(0, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15) = ∏(1, 2, 3, 6, 7, 11, 12)

SOP. F(A, B, C, D) = $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\ +$
$+ A\,B\,\overline{C}\,D + A\,B\,C\,\overline{D} + A\,B\,C\,D$
POS. F(A, B, C, D) = $(A + B + C + \overline{D})\,(A + B + \overline{C} + D)\,(A + B + \overline{C} + \overline{D})\,(A + \overline{B} + \overline{C} + D)$
$(A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{A} + B + \overline{C} + \overline{D})\,(\overline{A} + \overline{B} + C + D)$

Página 9_1. Encontrar las tablas de verdad y las funciones lógicas en notación decimal de los siguientes enunciados:

Estos problemas tienen situaciones “don’t care”. Estas situaciones se producen cuando las salidas no están definidas para unas condiciones de entrada, o cuando alguna combinación de entradas no se produce nunca o no tiene relevancia en el resultado final.

a) Se quiere obtener si un número está en unos intervalos dados, produciendo 1 lógico en los intervalos [2, 4] y [6, 8], y 0 lógico en los intervalos [0] y [9, 13]. Dichos números están codificados mediante el código Gray.

Este enunciado tiene valores entre 0 y 13 en código Gray. Eso supone que hay 4 entradas G3, G2, G1, G0, que podrían tomar valores entre 0 y 15. De las 16 combinaciones en las entradas generan 1s en la salida Z los valores Gray 2, 3, 4, 6, 7 y 8, y generan 0 los valores 0, 9, 10, 11, 12 y 13. Solo 11 valores generan 0 ó 1, el resto serán "don't care" (ϕ). La tabla de verdad queda así:

Decimal	G3	G2	G1	G0	Gray	Z
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	ϕ
2	0	0	1	0	3	1
3	0	0	1	1	2	1
4	0	1	0	0	7	1
5	0	1	0	1	6	1
6	0	1	1	0	4	1
7	0	1	1	1	5	ϕ
8	1	0	0	0	15	ϕ
9	1	0	0	1	14	ϕ
10	1	0	1	0	12	0
11	1	0	1	1	13	0
12	1	1	0	0	8	1
13	1	1	0	1	9	0
14	1	1	1	0	11	0
15	1	1	1	1	10	0

La tabla de verdad en notación decimal es:

$$Z = F(G3, G2, G1, G0) = \sum(2, 3, 4, 5, 6, 12) + \sum_{\phi}(1, 7, 8, 9) =$$
$$= \prod(0, 10, 11, 13, 14, 15) \bullet \prod_{\phi} (1, 7, 8, 9)$$

b) Se quiere calcular cuando, para dos números binarios A y B de dos bits, el resultado de la operación A/B + B/A es entero. Los resultados sólo tienen importancia cuando la operación matemática no es indeterminada.

Decimal	A1	A0	B1	B0	A	B	Valor	Z
0	0	0	0	0	0	0	-	ϕ
1	0	0	0	1	0	1	-	ϕ
2	0	0	1	0	0	2	-	ϕ
3	0	0	1	1	0	3	-	ϕ
4	0	1	0	0	1	0	-	ϕ
5	0	1	0	1	1	1	2	1
6	0	1	1	0	1	2	2.5	0
7	0	1	1	1	1	3	3.33	0
8	1	0	0	0	2	0	-	ϕ
9	1	0	0	1	2	1	2.5	0
10	1	0	1	0	2	2	2	1
11	1	0	1	1	2	3	2.17	0
12	1	1	0	0	3	0	-	ϕ
13	1	1	0	1	3	1	3.33	0
14	1	1	1	0	3	2	2.17	0
15	1	1	1	1	3	3	2	1

Este enunciado tiene 4 entradas: A1, A0, B1, B0. (A1, A0) codifica A y (B1, B0) codifica B. A y B tienen valores entre 0 y 3. Cuando la operación es determinada, la salida Z es 1 si el resultado es entero y 0 si no lo es. La operación es indeterminada cuando A ó B son 0, ya que se genera una división entre 0 cuyo resultado es indeterminado, por tanto la salida será "don't care" (ϕ) en ese caso.

La tabla de verdad en notación decimal es:

$$Z = F(A1, A0, B1, B0) = \sum(5, 10, 15) + \sum_{\phi}(0, 1, 2, 3, 4, 8, 12) =$$
$$= \prod(6, 7, 9, 11, 13, 14) \bullet \prod_{\phi}(0, 1, 2, 3, 4, 8, 12)$$

c) Se quiere obtener en Z (Z1Z0) el valor máximo de en binario de dos números A (A1A0) y B (B1B0) binarios de 2 bits, sabiendo que la suma de A y B no puede ser 3.

Este enunciado tiene 4 entradas y dos salidas. Como en el apartado b) las entradas son A1, A0, B1, B0. (A1, A0) codifica A y (B1, B0) codifica B. A y B tienen valores entre 0 y 3. Las dos salidas Z1, Z0 codifican Z, siendo Z el mayor valor de A y B, por lo que también tienen valores entre 0 y 3. Como por razones no indicadas la suma de A y B no puede ser 3, si se diese el caso las salidas no están definidas por lo que son "don't care" (ϕ) en ese caso.

Decimal	A1	A0	B1	B0	A	B	A+B	MAX	Z1	Z0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
2	0	0	1	0	0	2	2	2	1	0
3	0	0	1	1	0	3	3	-	ϕ	ϕ
4	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
5	0	1	0	1	1	1	2	1	0	1
6	0	1	1	0	1	2	3	-	ϕ	ϕ
7	0	1	1	1	1	3	4	3	1	1
8	1	0	0	0	2	0	2	2	1	0
9	1	0	0	1	2	1	3	-	ϕ	ϕ
10	1	0	1	0	2	2	4	2	1	0
11	1	0	1	1	2	3	5	3	1	1
12	1	1	0	0	3	0	3	-	ϕ	ϕ
13	1	1	0	1	3	1	4	3	1	1
14	1	1	1	0	3	2	5	3	1	1
15	1	1	1	1	3	3	6	3	1	1

$$Z1 = F(A1, A0, B1, B0) = \sum(2, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15) + \sum_{\phi}(3, 6, 9, 12) =$$
$$= \prod(0, 1, 4, 5) \bullet \prod_{\phi}(3, 6, 9, 12)$$
$$Z0 = F(A1, A0, B1, B0) = \sum(1, 4, 5, 7, 11, 13, 14, 15) + \sum_{\phi}(3, 6, 9, 12) =$$
$$= \prod(0, 2, 8, 10) \bullet \prod_{\phi}(3, 6, 9, 12)$$