

Buzo de Descartes

(*Cartesian diver*)

J. Güémez

Departamento de Física Aplicada,
Universidad de Cantabria.

21 de febrero de 2007

Resumen

Se presenta un modelo del buzo de Descartes (*Cartesian diver*). El modelo teórico que se desarrolla, basado en el principio de Arquímedes, el principio de Pascal y la ley de Boyle, indica que para cada buzo existe una profundidad de *no retorno*, por debajo de la cual se hunde y ya no vuelve a la superficie. Los resultados experimentales confirman la existencia de dicha profundidad límite. El potencial en el que se mueve el buzo, obtenido aplicando las leyes de Newton, es el de una ‘catástrofe en pliegue’.

Introducción histórica

En su libro *Los Principios de la Filosofía*, René Descartes expone siete reglas para explicar los movimientos de los cuerpos¹. En su cuarta regla expone:

Si el cuerpo C fuera de dimensiones superiores al cuerpo B, por pequeña que fuera la diferencia, y si el cuerpo C se encontrara en reposo absoluto (es decir, si el cuerpo C no solo careciera de todo movimiento aparente, sino que también el cuerpo C no estuviera rodeado de aire, ni de cualesquiera otros cuerpos líquidos, los cuales disponen los cuerpos duros que circundan de modo tal que facilitan su desplazamiento) sea cual fuere la velocidad con la que el cuerpo B pudiera alcanzar a C, nunca tendría fuerza para poner el cuerpo C en movimiento.

Un poco más adelante, parágrafo 56, escribe:

¹René Descartes, *Los Principios de la Filosofía*, Alianza Editorial AU 825, Madrid 1995

Las partículas que integran los cuerpos fluidos se mueven en cualesquiera direcciones con igual fuerza; asimismo, la menor fuerza basta para mover los cuerpos duros situados en un fluido.

Este argumento parece ir en contra de su cuarta regla y cuando investiga cómo se mueven los cuerpos a través del agua, le parece que pueden hacerlo porque las partes del líquido les abren camino prontamente. Pero le faltaba explicar cómo se doblegaba la tendencia inercial del cuerpo a seguir en su estado de reposo².

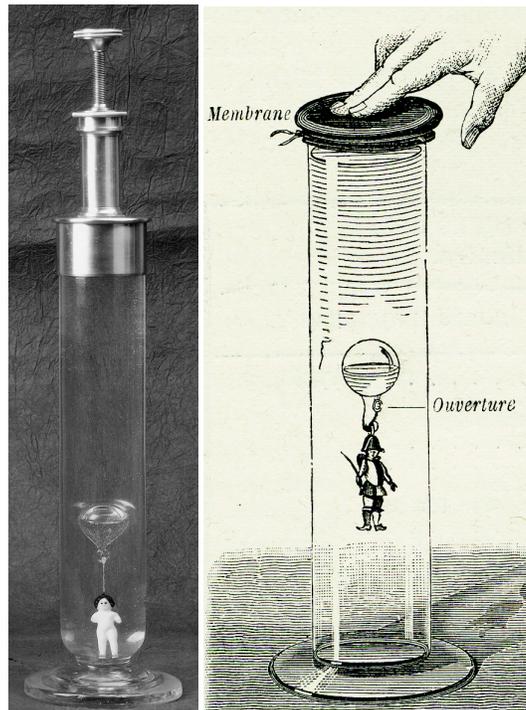


Figura 1: Modelo de *ludi6n* o buzo de Descartes de la Universidad de Oporto (Portugal), en el que la presi6n se regula con la ayuda de un tornillo. Grabado de un ludi6n en el que la presi6n se regula con la ayuda de una piel flexible.

El buzo de Descartes (*Cartesian diver* en la literatura en ingl3s, posiblemente llamado as3 debido a que pone de manifiesto c3mo una peque1a fuerza es capaz de producir un gran desplazamiento en un cuerpo que flota) es un dispositivo f3sico que ya aparece en los gabinetes de F3sica del siglo XVIII y que se utilizaba en demostraciones en p3blico.

²William R. Shea, *La Magia de los N3meros y el Movimiento. La Carrera Cient3fica de Descartes*, Alianza Editorial AU 746, Madrid 1991

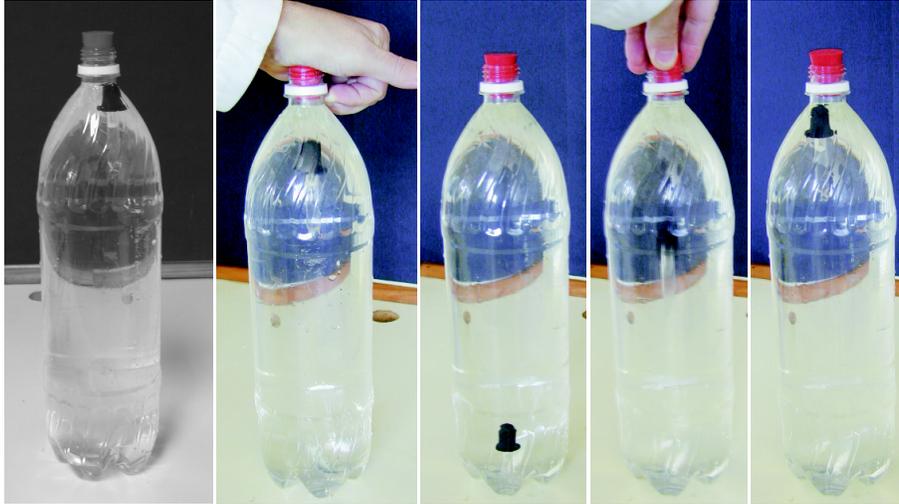


Figura 2: Experimento sencillo del buzo de Descartes. Como buzo se utiliza el tubito hueco de vidrio y la pera de caucho de un frasco de colirio (un cuentagotas). La profundidad del tapón de la botella puede regularse. Cuando el tapón desciende lo suficiente, el buzo se hunde hasta el fondo. Cuando se afloja de nuevo el tapón, el buzo vuelve a la superficie (aunque no siempre).

Un buzo de Descartes consta esencialmente de un pequeño tubo, abierto por su parte inferior, que flota en el interior de una botella casi llena de agua y cerrada por un tapón. Si la botella es rígida, el tapón debe poder desplazarse y si la botella es de paredes flexibles, el tapón puede estar fijo. En la Fig. 2 se muestra una experiencia típica con el buzo de Descartes. En el estado inicial, el buzo flota. Cuando el tapón es introducido ligeramente en el cuello de la botella, sin dejar escapar el aire atrapado, el buzo se hunde llegando al fondo de la botella. Si el tapón vuelve a extraerse, el buzo retorna a la superficie. El mismo comportamiento se obtiene si se deja fijo el tapón en su posición inicial y se aprietan las paredes de la botella. Cuando se dejan de apretar, el buzo vuelve a la superficie (aunque no siempre).

Modelo

Con objeto de simplificar los cálculos, el buzo de Descartes será un tubo de ensayo invertido, de vidrio, con una burbuja de aire en su interior, que flota sobre la superficie del agua contenida en un recipiente cerrado.

Una primera aproximación cualitativa sobre el funcionamiento de es-

te sistema sería la siguiente. De acuerdo con el Principio de Arquímedes, el tubo flota debido a que el peso del agua desalojada por la burbuja de aire (y por el vidrio) es mayor que el peso del vidrio. Cuando se hace descender el tapón o se aprieta la botella, el volumen de aire disminuye y la presión del aire en el interior de la botella aumenta, de acuerdo con la Ley de Boyle. De acuerdo con el Principio de Pascal, este aumento de la presión se extiende a todo el sistema, en concreto, a la burbuja de aire atrapada en el tubo, que también disminuye su volumen. Cuando se alcance una presión tal que el peso del agua desplazada por la burbuja sea inferior al peso del vidrio, el buzo se hundirá. A continuación se desarrolla cuantitativamente este modelo.

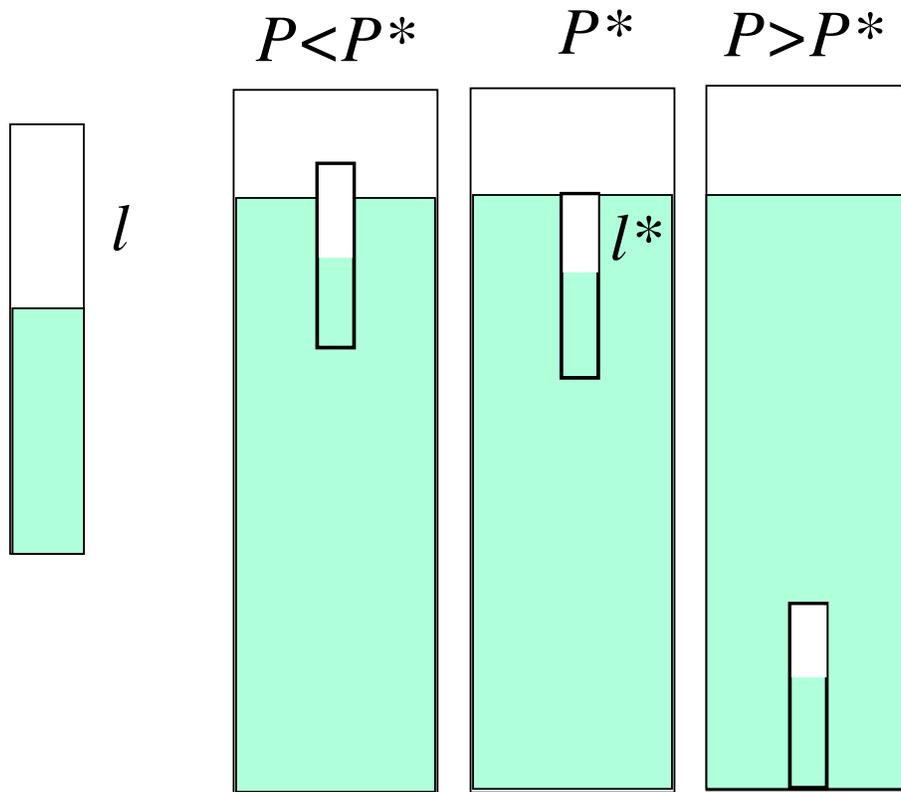


Figura 3: Experimento del buzo de Descartes. (a) Tubo de ensayo, parcialmente lleno de agua, a la presión atmosférica. (b) Tubo invertido en un recipiente. La presión sobre la superficie del líquido puede ser controlada desde el exterior. (c) Tubo en equilibrio estático en la superficie del líquido (presión crítica). ξ^* es la longitud mínima de burbuja que hace flotar el tubo. (d) Tubo hundido. Las presiones en la figura son $P < P^* < P'$.

Un tubo de longitud L no completamente lleno de agua [Fig. 3 (a)] se invierte en un recipiente que contiene el mismo líquido [Fig. 3 (b)]. La longitud original de la burbuja de aire dentro del tubo es l_0 . Una vez el tubo flota sobre el agua, $l < l_0$ es la nueva longitud de la burbuja. Se denomina x a la coordenada de la parte superior del tubo respecto de la superficie del líquido. Si parte del tubo queda fuera del agua, Fig. 3 (b), $x > 0$, y la longitud de la burbuja dentro del agua es $\xi = l - x$. Si el tubo se encuentra completamente sumergido, $x < 0$ y $\xi = l$. Cuando el tubo flota en equilibrio, $x = \bar{x}$ y $\xi = \bar{\xi}$. Si el tubo flota con $\bar{x} = 0$, Fig. 3 (c), entonces se tiene $\xi = \bar{\xi}^*$.

Por el Principio de Arquímedes, en el equilibrio de flotación el peso del vidrio y el peso del agua desalojada son iguales

$$m g = V \rho_{\text{vidrio}} g = A \bar{\xi} \rho g + V \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) \rho g, \quad (1)$$

donde $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, $V \approx \pi L(d_{\text{ext}}^2 - d_{\text{int}}^2)/4$ es el volumen de vidrio, $A = \pi d_{\text{int}}^2/4$ es la sección interna del tubo (d_{ext} y d_{int} son sus diámetros externo e interno, respectivamente). La densidad del vidrio es $\rho_{\text{vidrio}} = m/V$, donde m es la masa del tubo y $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$ es la densidad del agua.

La longitud de burbuja que deja al tubo flotando justamente en la superficie es

$$\bar{\xi}^* = \frac{V}{A} \left(\frac{\rho_{\text{vidrio}}}{\rho} - 1\right) = L \left(\frac{d_{\text{ext}}^2}{d_{\text{int}}^2} - 1\right) \left(\frac{\rho_{\text{vidrio}}}{\rho} - 1\right). \quad (2)$$

Tubo	L / cm	m / g	$d_{\text{int}} / \text{cm}$	$d_{\text{ext}} / \text{cm}$	$\rho_{\text{vidrio}} / \text{g cm}^{-3}$	$\bar{\xi}^* / \text{cm}$ Ec. (2)	$\bar{\xi}^* / \text{cm}$ Exp.
1	16.0±0.2	18.6±0.2	1.430	1.640	2.29±0.19	6.51±0.18	6.4±0.2
2	9.8±0.1	11.9±0.1	1.380	1.600	2.35±0.19	4.57±0.12	4.6±0.2
3	20.1±0.2	33.3±0,2	1.740	2.000	2.17±0.14	7.55±0.15	7.6±0.2
4	17.1±0.1	142.8±0.1	4.440	4.970	2.16±0.03	4.96±0.03	4.9±0.2

Cuadro 1: Tubos flotantes. Longitud de burbuja que hace que el tubo se encuentre justo en la superficie [Fig. 3 (c)]. Los resultados de la Ec. (2) se comparan con las medidas experimentales.

De acuerdo con la Ley de Boyle ($PV = C^{te}$, a temperatura constante), la longitud de la burbuja varía con la parte sumergida del tubo y con la presión externa aplicada como

$$P_0 l_0 A = (P + \bar{\xi} \rho g) (\bar{\xi} + \bar{x}) A. \quad (3)$$

Tomando \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{P_0 l_0}{P + \bar{\xi} \rho g} - \bar{\xi}, \quad (4)$$

y sustituyéndolo en la Ec. (1), se obtiene una ecuación cuadrática para $\bar{\xi}$.

Para la Ec. (3) con $\bar{x} = 0$ (y $P = P^*$),

$$P_0 l_0 = (P^* + \bar{\xi}^* \rho g) \bar{\xi}^*. \quad (5)$$

Se tiene entonces que la presión externa necesaria para llevar al tubo justo hasta la superficie del líquido es,

$$\frac{P^*}{P_0} \approx \frac{l_0}{\bar{\xi}^*}, \quad (6)$$

donde se ha considerado que $\bar{\xi} \rho g \ll P$.

Este resultado sugiere lo siguiente. Supóngase que un tubo que flota en la superficie bajo presión atmosférica se hunde –por ejemplo con la ayuda de un trozo de hierro pegado a él y un imán– hasta una cierta profundidad, $|x_{nr}|$, tal que la presión a esa profundidad sea P^* , con $P^* \approx P_0 + \rho g |x_{nr}|$. Entonces el tubo tendrá una longitud de burbuja que no le permitirá flotar y se hundirá hasta el fondo. Se denomina *profundidad de no retorno* a ésta $|x_{nr}|$.

Resultados experimentales

En la Tab. 1 se muestran los valores experimentales de la altura de burbuja límite para flotar obtenidos para algunos tubos y se comparan con los resultados de la Ec. (2).

En la Fig. 4 se muestra el diseño experimental utilizado para variar la presión impuesta sobre el buzo. Se mide la presión límite a la que un buzo dado empieza a hundirse y la profundidad de no retorno de mismo.

Dinámica

Los resultados experimentales no parecen invalidar la teoría desarrollada. El siguiente aspecto a estudiar del modelo considerado es el de la dinámica del sistema, es decir, cómo se comporta el buzo cuando una situación de equilibrio dada se perturba desde el exterior. La aplicación de las leyes de Newton implica obtener las fuerzas que actúan sobre el sistema.

Cuando el tubo se encuentra en equilibrio, $x = \bar{x}$ viene dado por la Ec. (4). Si el equilibrio se perturba, y de acuerdo con el Principio de Arquímedes, aparece una fuerza

$$F = \begin{cases} A \bar{\xi} \rho g + V \left(1 - \frac{x}{L}\right) \rho g - V \rho_{\text{vidrio}} g & x > 0 \\ A \bar{\xi} \rho g + V (\rho - \rho_{\text{vidrio}}) g & x \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

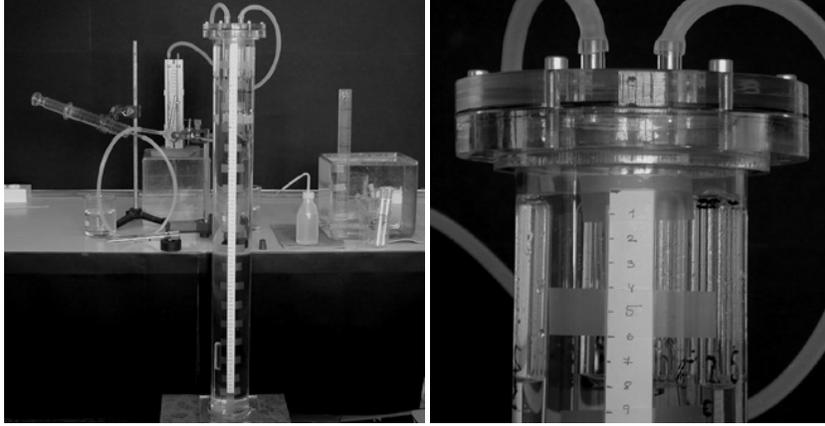


Figura 4: Tubo de precipitados con una burbuja de aire en su interior colocado en un recipiente transparente de 1 m de longitud y 15 cm de diámetro, casi lleno de agua y cerrado por una tapa que se ajusta con seis tornillos y una junta tórica de plástico. La presión impuesta se varía con una jeringa y se mide con un manómetro de mercurio.

Por el Principio de Pascal y la Ley de Boyle,

$$P_0 l_0 = \begin{cases} (P + \xi \rho g) (\xi + x) & x > 0 \\ [P + (\xi + |x|) \rho g] \xi & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

Estas ecuaciones sugieren de nuevo la existencia de una profundidad de no retorno. Supóngase como antes que un tubo que inicialmente flota se le hunde bajo la superficie del agua, bien proporcionándole una velocidad inicial que lo hunda, bien llevándolo hasta una cierta profundidad (por ejemplo, pegando en su boca dos clips de acero y utilizando un imán desde el exterior para desplazarlo). Si la longitud de la burbuja atrapada en el tubo a una cierta profundidad ξ llega a ser menor que $\bar{\xi}^*$

$$\xi(t) < \frac{V}{A} \left(\frac{\rho_{\text{vidrio}}}{\rho} - 1 \right) = \bar{\xi}^* \quad (9)$$

[ver Ec. (2)] entonces la fuerza que actúa sobre el buzo se hace negativa y éste se hunde. A su vez, por debajo de una cierta profundidad, la presión externa del aire más la presión de la columna de agua encima del buzo es tal que el tamaño de la burbuja se hace menor que el mínimo necesario como para que flote (como para que el peso del agua desalojada sea igual al peso del vidrio). Así, para cada tubo –y cada l_0 – hay una profundidad por debajo de la cual el tubo no vuelve a la superficie –aunque la presión en la superficie permanezca constante e igual a la inicial–. Esta profundidad de no retorno, $|x_{\text{nr}}|$, se puede obtener de las

l_0 / cm	$\Delta P / \text{mm Hg}$	$l_0/\bar{\xi}^*$ Ec. (6)	P^*/P_0 Exp.
5.0 ± 0.1	-210 ± 2	0.76 ± 0.03	0.724 ± 0.005
6.0 ± 0.1	-50 ± 2	0.92 ± 0.03	0.934 ± 0.005
7.0 ± 0.1	90 ± 2	1.07 ± 0.03	1.118 ± 0.005
8.0 ± 0.1	204 ± 2	1.22 ± 0.03	1.268 ± 0.005
8.5 ± 0.1	250 ± 2	1.30 ± 0.03	1.328 ± 0.005

Cuadro 2: Datos para un tubo en particular (tipo 1 en Tab. 1). Se dan la longitud inicial, l_0 , el incremento de presión respecto de la presión atmosférica, $\Delta P = P^* - P_0$, necesario para que el tubo alcance la posición $\bar{x} = 0$ ($\bar{\xi} = \bar{\xi}^*$) [Fig. 3 (c)] y las ratios $l_0/\bar{\xi}^*$ y P^*/P_0 . Para $l_0 = 7,0$ cm, el tubo que está hundido permanece en el fondo (1 m de profundidad) incluso cuando la presión se vuelve a reducir hasta la atmosférica, P_0 .

eqs. (8), poniendo $x = x_{\text{nr}}$ y $\xi = \bar{\xi}^*$ [valor de ξ cuando $F = 0$, ver Ec. (9)]:

$$|x_{\text{nr}}| = \frac{1}{\rho g} \left(\frac{P_0 l_0}{\bar{\xi}^*} - P \right) - \bar{\xi}^*. \quad (10)$$

Poniendo $P = P_0$ y utilizando la Ec. (6), se tiene

$$|x_{\text{nr}}| + \bar{\xi}^* = \frac{\Delta P}{\rho g}. \quad (11)$$

donde $\Delta P = P^* - P_0$. Es decir, si se necesita un aumento ΔP respecto de la presión atmosférica para lograr que un buzo que flota en la superficie se hunda, a la presión atmosférica el mismo buzo se funde hasta el fondo si se le lleva a una profundidad por debajo de $|x_{\text{nr}}|$. Este efecto se puede observar experimentalmente con cierta facilidad si se dispone de un recipiente de profundidad suficiente.

En la Tab. 3 se dan los valores medidos de ΔP y los correspondientes valores de $|x_{\text{nr}}| + \bar{\xi}^*$ calculados a partir de la Ec. (11). En otros experimentos, se mide directamente la profundidad $|x_{\text{nr}}| + \bar{\xi}^*$ para la presión P_0 (última columna de la Tab. 3). En la Tab. 2 se muestran resultados experimentales.

Una vez se dispone de las ecuaciones relativas a las fuerzas F que actúan sobre el sistema se puede obtener el potencial $V(x)$ en el que se mueve dicho sistema, con $F = -dV(x)/dx$, siendo x la variable que da la profundidad a la que se encuentra el extremo cerrado del tubo. Aunque el potencial se puede obtener de forma exacta, ésta resulta demasiado complicada. Aproximando

$$P + (\xi + |x|) \rho g \approx P + |x| \rho g,$$

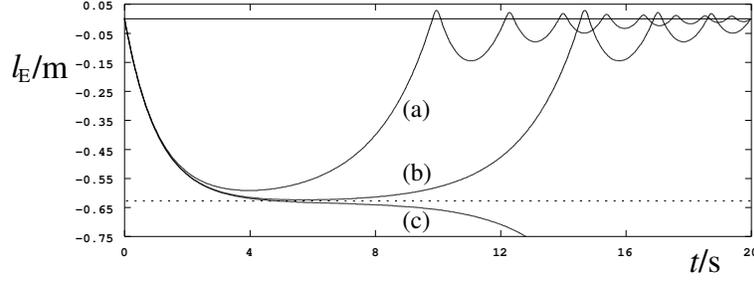


Figura 5: Aplicación de las leyes de Newton (supuesto rozamiento) a un buzo de descartes. Variación de la profundidad que alcanza un buzo en función de la velocidad inicial con que se mueve hacia abajo. (a) El buzo alcanza una pequeña profundidad y vuelve a la superficie; (b) Se mantiene hundido bastante tiempo, pero retorna a la superficie; (c) supera la profundidad de no retorno y se hunde sin volver a la superficie.

$$\xi \approx \xi^* + x \quad x > 0$$

$$\left(1 - \frac{x}{L}\right) \approx 1 \quad x > 0$$

para profundidades grandes, se tiene que

$$F(x) = \begin{cases} A(\xi^* + x)\rho g + V(\rho - \rho_{\text{vidrio}})g & x > 0 \\ A \frac{P_0 l_0}{P_0 + |x|\rho g} \rho g + V(\rho - \rho_{\text{vidrio}})g & x \leq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Integrando en cada zona, se tiene que

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{A}{2}(\xi^* + x)^2 \rho g - V(\rho - \rho_{\text{vidrio}})gx + B & x > 0 \\ -A P_0 l_0 \ln(P_0 + |x|\rho g) - V(\rho - \rho_{\text{vidrio}})gx & x \leq 0. \end{cases} \quad (13)$$

La constante B se utiliza para que ambos potenciales coincidan en la superficie. El primero es un potencial armónico, mientras que el segundo es un potencial que presenta un máximo a la profundidad de no retorno.

En la Fig. 6 se muestra el potencial en el que se mueve un buzo de Descartes, en función de la presión externa que se impone.

A bajas presiones, hay un punto de equilibrio estable y otro inestable. Para una cierta presión crítica, y por encima de ella, no hay puntos de equilibrio cerca de la superficie y el buzo se hunde. Éste es un potencial conocido como de ‘catástrofe en pliegue’ –dentro de la Teoría de Catástrofes–. Para un determinado tubo y una determinada longitud de burbuja –mayor que la mínima necesaria para que flote– a presión atmosférica, el tubo flota cerca de la superficie, en el mínimo –relativo–

$\Delta P / \text{mmHg}$	$ \bar{x}_{\text{nr}} + \bar{\xi}^* / \text{cm}$ Ec. (11)	$ \bar{x}_{\text{nr}} + \bar{\xi}^* / \text{cm}$ Exp.
8 ± 2	11 ± 3	10.0 ± 0.5
23 ± 2	31 ± 3	32.0 ± 0.5
32 ± 2	43 ± 3	39.5 ± 0.5
40 ± 2	54 ± 3	51.5 ± 0.5
44 ± 2	60 ± 3	57.0 ± 0.5
55 ± 2	75 ± 3	72.5 ± 0.5
63 ± 2	86 ± 3	82.0 ± 0.5

Cuadro 3: Para tubos del tipo 1 (Tab. 1) se dan los incrementos de presión, $\Delta P = P^* - P_0$, la profundidad de no retorno $|\bar{x}_{\text{nr}}| + \bar{\xi}^*$ dada en Ec. (11) y dicha profundidad medida experimentalmente. Las medidas directas se hicieron pegando un clip metálico al tubo y colocándolo en la posición deseada con la ayuda de un imán movido desde el exterior. Para tubos del tipo 1, $\bar{\xi}^* = 6,51 \pm 0,18 \text{ cm}$ (ver Tab. 1).

del potencial. Si se perturba ese equilibrio, el tubo oscila –con oscilaciones amortiguadas– y vuelve a ese punto de equilibrio. Si atraviesa el máximo del potencial –equilibrio inestable–, se hunde. A medida que la presión impuesta va aumentando el máximo y el mínimo del potencial se van aproximando, siendo cada vez menor la profundidad de no retorno. Cuando se alcanza una presión tal que el máximo y el mínimo coinciden –la longitud de la burbuja en superficie es menor que la longitud mínima–, el tubo se hunde hasta el nuevo mínimo del potencial. Este comportamiento del potencial frente al parámetro externo –presión impuesta– se conoce con el nombre de ‘catástrofe en pliegue’.

Conclusiones

El comportamiento del buzo de Descartes se explica mediante la aplicación del principio de Arquímedes –flotabilidad– y de las leyes de Pascal de Boyle para explicar la disminución del tamaño de la burbuja al aumentar la presión y que el buzo termine por hundirse cuando la presión sobrepasa un valor límite.

Pero incluso para un buzo que flota, hay una profundidad por debajo de la cual ya no vuelve a la superficie. La existencia de esta profundidad de no retorno para cada buzo resulta al principio poco intuitiva, pues tal y como sucede con una boya, uno esperaría que el buzo siempre volviese a la superficie. Al ser el empuje de Arquímedes independiente de la presión, la ley de Boyle determina la profundidad a la cual el tamaño de la burbuja no es suficiente como para equilibrar el peso del vidrio.

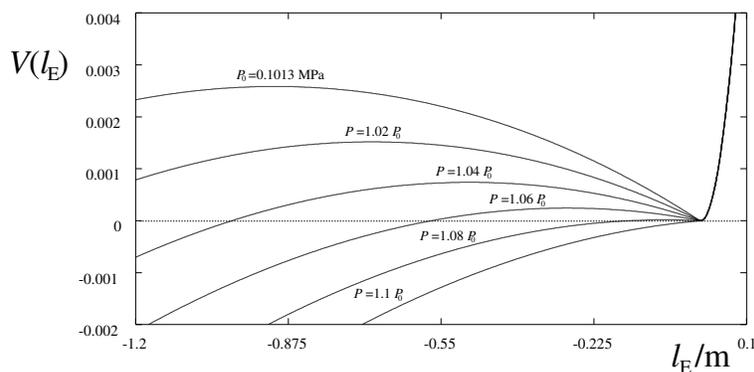


Figura 6: Potencial de un Buzo de Descartes para un tubo del tipo 2 (ver Tabla 1) con $l_0 = 7$ cm, y varias presiones. Se indica el punto de no retorno x_{nr} , para la presión atmosférica P_0 . La presión crítica es $P^* = 1,07 P_0$.

Las botellas de plástico en las que se muestran los buzos tienen poca profundidad y este efecto no se observa habitualmente.

A pesar de que la presión se puede aumentar tan despacio como se quiera, y la altura que sobresale el buzo por encima de la superficie irá disminuyendo lentamente, al superar infinitesimalmente la presión límite, el buzo se hundirá hasta el fondo, con un desplazamiento finito en respuesta a una variación infinitesimal. Este comportamiento, conocido como ‘catástrofe’ toma en este caso la forma de ‘catástrofe en pliegue’ debido a la forma particular del potencial.

Como conclusiones más generales se tendrían las siguientes:

La explicación de la mayoría de los fenómenos físicos, incluso aquellos aparentemente simples, exige combinar varias leyes o teorías. En este caso, el principio de Arquímedes, el principio de Pascal y la ley de Boyle.

Cuando se llevan a cabo pequeños cambios sobre los parámetros que determinan el estado de equilibrio de un sistema, normalmente el sistema responde también con cambios pequeños en dicho estado de equilibrio. Es relativamente insólito el comportamiento según el cual el sistema responde con un cambio brusco y grande a una perturbación pequeña. En este caso se trata de la conocida como ‘catástrofe en pliegue’.

Las explicaciones científicas de un fenómeno son consideradas más correctas cuando son capaces de predecir comportamientos que no eran conocidos cuando se desarrolló la teoría. La existencia de una profundidad de no retorno para cada buzo, aunque modesta, no deja de ser una predicción curiosa y, hasta cierto punto, inesperada.

Los experimentos se diseñan a partir de una teoría previa y raramente se llevan a cabo experimentos sin tener una serie de hipótesis previas sobre lo que presumiblemente va a ocurrir. Un tubo de más de un metro de altura permite observar con relativa facilidad este fenómeno de la profundidad de no retorno y medirla experimentalmente.

Referencias

- [1] R. C. Turner, “Toys in teaching: Cartesian diver,” *Am. J. Phys.* **51**, 475–476 (1983); R. N. Jones, “The Cartesian diver,” *Phys. Teach.* **11**, 345 (1973). Some comments about this toy can be found in W. A. Butler, “Reverse Cartesian diver ‘trick’,” *Am. J. Phys.* **49**, 92 (1981); M. Gardner, “The Cartesian matches,” *Phys. Teach.* **28**, 478 (1990); P. Kirkpatrick, “A neglected lesson from the Cartesian diver,” *Am. J. Phys.* **10**, 160 (1942); R. F. Kotheimer, “Cartesian diver,” *Phys. Teach.* **12**, 576 (1974); H. Kruglak, “The rising Cartesian diver,” *Phys. Teach.* **13**, 68–69 (1975); R. S. Mackey, “Automatic Cartesian diver,” *Am. J. Phys.* **26**, 403–404 (1958); J. S. Miller, “Extension of the Cartesian diver experiment,” L. P. Orwig, “Cartesian diver ‘tricks’,” *Am. J. Phys.* **48**, 320 (1980); R. L. Wild, “Ultimate Cartesian diver set,” *Am. J. Phys.* **49**, 1185 (1981); R. M. Graham, “An extremely sensitive Cartesian diver,” *Phys. Teach.* **32**, 182–183 (1994); K. D. Pinkerton, “Sink or swin: the Cartesian diver,” *J. Chem. Edu.* **78**, 200A (2001); E. V. Lee, “Cartesian diver with pressure head,” *Phys. Teach.* **19**, 416 (1981); S. He, S. Mak, and E. Zhu, “Depth dependent Cartesian divers,” *Am. J. Phys.* **61**, 938–940 (1993).
- [2] J. Güémez, C. Fiolhais, M. Fiolhais, *The Cartesian Diver and the fold catastrophe* *American Journal of Physics*, **70**, 710-714, (2002)
- [3] R. Gilmore, *Catastrophe Theory for Scientist and Engineers* (John Wiley and Sons, New York, 1981).
- [4] P. T. Saunders, *An Introduction to Catastrophe Theory* (Cambridge University Press, New York, 1980).
- [5] E. B. Wilson, Jr., *An Introduction to Scientific Research* Dover, New York, 1990