

## Movimiento de proyectiles.

Departamento de Física Aplicada  
 Universidad de Cantabria

### Resumen

Se determinan experimentalmente las características del movimiento de proyectiles. Este movimiento se visualiza con un dispositivo proyector de agua en el que puede controlarse el módulo y la orientación de la velocidad de salida del agua. Al ser un chorro de agua el cuerpo lanzado, su trayectoria se observa permanentemente.

### Introducción

Un proyectil es un objeto que describe un vuelo en el aire después de haber sido lanzado. Si el objeto tiene una densidad suficientemente grande y su velocidad es moderada, los experimentos muestran que, a menudo, se puede despreciar la resistencia del aire y suponer que la aceleración del objeto es debida sólo a la gravedad. Si además admitimos que en todo su recorrido, la aceleración de la gravedad,  $\vec{g}$ , es constante y dirigida hacia abajo, resulta que el objeto describe un movimiento curvilíneo cuya descripción es sorprendentemente sencilla. Bajo estas suposiciones, la trayectoria de un proyectil será siempre plana con forma de parábola.

Sea un sistema de referencia OXY (ver figura 1). El eje X es horizontal y la abscisa  $x$  es positiva hacia la derecha. El eje Y es vertical y la ordenada  $y$  es positiva hacia arriba. Desde el punto  $(x_0, y_0)$  se lanza un proyectil, en el instante de tiempo  $t=0$ , con velocidad

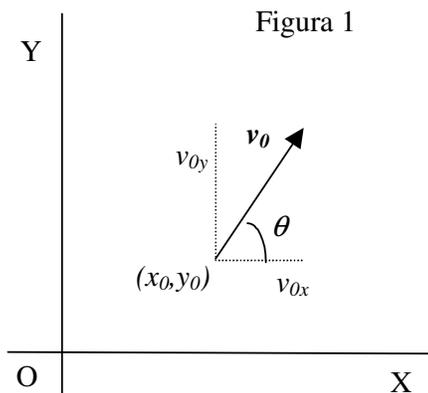
inicial  $\vec{v}_0$  cuyas componentes son  $(v_{0x}, v_{0y})$ . La aceleración a la que se ve sometido tiene por componentes  $(0, -g)$ . Al cabo de un cierto tiempo  $t$ , la posición del proyectil viene dada por las siguientes ecuaciones horarias

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad (1).$$

Por tanto, el movimiento en el eje X puede considerarse como un movimiento unidimensional con velocidad constante, y el movimiento en el eje Y como un movimiento unidimensional con aceleración constante. La independencia de las

componentes  $x$  e  $y$  del movimiento fue observada por Galileo, que describía así el movimiento de una partícula despedida fuera de los límites de una superficie horizontal:

... entonces la partícula que se mueve, que imaginamos pesada, al sobrepasar el borde del plano, además de su perpetuo movimiento uniforme previo, adquiere una propensión hacia abajo debida a su



propio peso; de forma que el movimiento resultante, que llamaré proyección (*projectio*), está compuesto de uno que es uniforme y horizontal y otro que es vertical y acelerado naturalmente<sup>†</sup>.

Las ecuaciones (1) permiten escribir el vector de posición del proyectil  $\vec{r}$  como función del tiempo,

$$\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (2),$$

siendo  $\vec{r}_0 = x_0 i + y_0 j$  el vector de posición del punto de partida.  $\vec{v}_0 t$  corresponde a un movimiento uniforme en la dirección de  $\vec{v}_0$  y  $\frac{1}{2} \vec{g} t^2$  corresponde a un movimiento de caída libre en dirección vertical con aceleración constante.

Supongamos que se dispara un proyectil desde el origen de coordenadas, es decir,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , con una componente  $v_y$  positiva (ver fig.2). Existen dos puntos de su trayectoria cuyo análisis es interesante: el punto en el que cae al suelo de coordenadas  $(R, 0)$  y el punto más alto de coordenadas  $(R/2, h)$ .  $R$  es el *alcance horizontal* y  $h$  la *altura máxima*. Ambos pueden expresarse en función de  $v_0$ ,  $\theta$  y  $g$ :

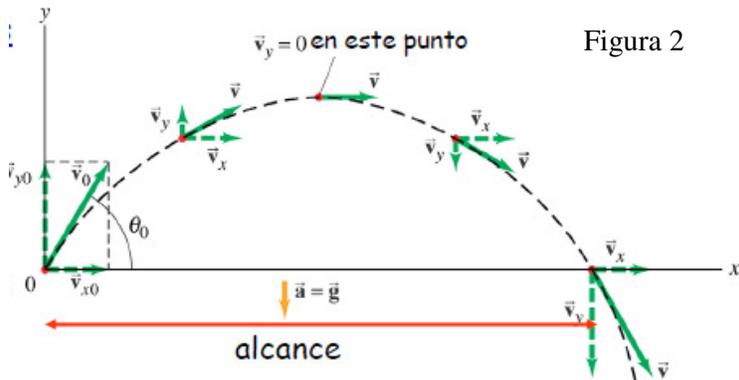


Figura 2

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}; \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}; \quad (3).$$

La ecuación general de la trayectoria  $y(x)$  puede obtenerse de las ecuaciones (1) eliminando el tiempo  $t$  y escribiendo las componentes de la velocidad inicial en función del ángulo  $\theta$ :

$$y(x) = (tg \theta)x - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2 \quad (4).$$

Esta ecuación tiene la forma de una parábola que pasa por el origen (punto de partida del proyectil).

### Reflexiones previas a la realización del experimento

- 1.- Obtenga las ecuaciones (1) a partir de la ecuación diferencial del movimiento del proyectil utilizando las condiciones iniciales indicadas.
- 2.- Obtenga las ecuaciones (3) del alcance horizontal y de la altura máxima.
- 3.- Busque en bibliografía [1, 2] la definición de *gasto por un orificio* y relaciónelo con la velocidad de salida de un líquido por un orificio circular. En el desarrollo del experimento va a necesitar esta información.

<sup>†</sup> Galileo Galilei, *Dos Nuevas Ciencias*, Henry Grew y Alfonso de Salvio (trads.). Dover, NY, 1954, pg. 244.

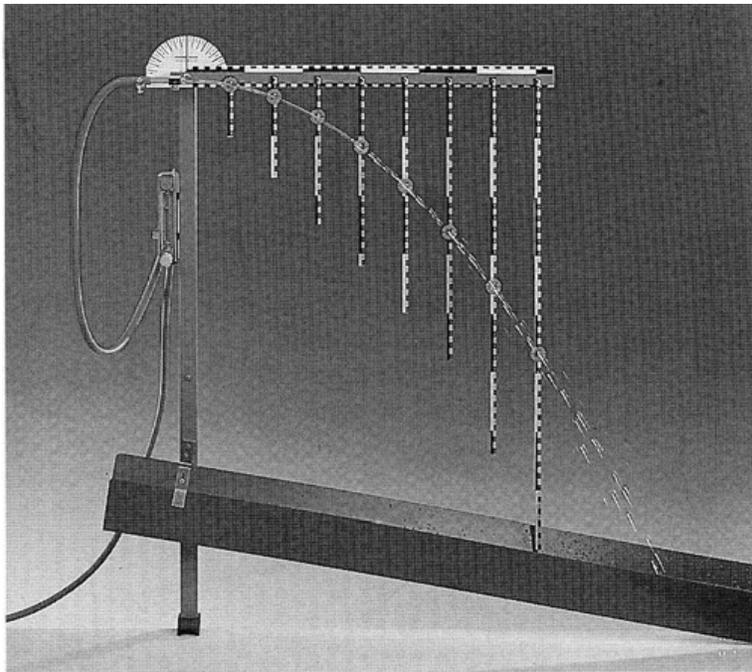
## Equipamiento

- 1.- Aparato de proyección de agua.
- 2.- Vaso de  $\frac{1}{2}$  litro de capacidad.
- 3.- Reloj.

El aparato de proyección de agua está formado por las siguientes piezas (ver figura 3):

- a.- Carril de orientación de lanzamiento. La boquilla de salida de agua está colocada de tal manera que su abertura está en el origen de la escala. En el carril se cuelgan 8 reglas verticales espaciadas entre sí 7.5 centímetros. Las reglas están divididas en cms y cada una de ellas posee un marcador de posición.
- b.- Regla horizontal con divisiones de 1 cm y escala de ángulos con divisiones de  $5^\circ$ .
- c.- Canaleta de descarga por la que evacúa el agua hacia un desagüe.
- d.- Caudalímetro con regulador de presión diferencial, compensa las oscilaciones de presión.

Figura 3



## Modo operativo

Con este dispositivo puede realizarse un estudio cuantitativo de la trayectoria de lanzamiento de agua para diferentes velocidades iniciales. Al ser un chorro de agua el cuerpo lanzado, su trayectoria se observa permanentemente.

Coloque la boquilla de salida de agua de tal manera que forme un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Abra lentamente el grifo hasta que el caudalímetro se llene aproximadamente hasta la mitad y el chorro de agua salga bien formado mientras atraviesa la región del espacio donde están las reglas verticales. Haga coincidir los marcadores con los puntos de cruce del chorro con dichas reglas. Anote, en forma de tabla, las coordenadas de la posición de los marcadores. Cada uno de estos marcadores representa un punto de la trayectoria del proyectil (simulado por una pequeña porción de agua). Repita el experimento, con el mismo caudal, para ángulos de lanzamiento de  $45^\circ$  y  $60^\circ$ .

Represente gráficamente, en cada caso, los puntos experimentales. Interprete la gráfica y ajuste la nube de puntos a una curva de acuerdo con la teoría mostrada en la Introducción.

Halle la velocidad inicial del agua a partir de la determinación del gasto cúbico.

Halle el alcance y la altura máxima a partir de las expresiones (3). Compare los resultados con los que se obtienen de la gráfica.

Fije el ángulo de salida del agua en  $45^\circ$  y determine el alcance para diferentes velocidades de salida. Haga una representación gráfica e interprétela.

Fije la velocidad de salida y mida el alcance para diferentes ángulos de orientación de la boquilla. Haga una representación gráfica e interprétela.

Elabore las tablas, los gráficos y el cálculo de errores según las normas.

Elabore el informe correspondiente a este experimento según las normas.

### **Preguntas adicionales relacionadas con la experiencia**

- 1.- Compruebe que las ecuaciones (3) y (4) son dimensionalmente correctas.
- 2.- En la determinación del alcance, ¿qué magnitud introduce mayor error?
- 3.- Si mantiene la velocidad inicial y sustituye la boquilla por otra de doble diámetro de abertura, ¿cómo se modificarán los resultados experimentales?
- 4.- Galileo demostró que, si se despreciaba la resistencia del aire, eran iguales los alcances de los proyectiles cuyos ángulos de tiro eran mayores o menores de  $45^\circ$  en la misma cantidad. Demuéstrelo usted. ¿Lo ha comprobado experimentalmente?

### **Referencias**

- [1] Catalá J., *Física General*, Ed. Gerri S.A., Valencia (1966), 4ª edición.
- [2] Burbano S., Burbano E., Gracia C., *Física General*, Ed. Mira, Zaragoza (1993).
- [3] Tipler P. A., *Física*, Ed. reverté S.A., Barcelona (1999), 4ª edición, tomo I.
- [4] Serway R. A., *Física*, Ed. McGraw-Hill (1992), 3ª edición, tomo I.
- [5] Thuillier P. *En las fuentes de la Ciencia: Del arte a la Ciencia: El descubrimiento de la trayectoria parabólica*. Mundo Científico V-7, n° 74, Noviembre 1987. (Cuenta que Galileo fue el primero en establecer "geométricamente" que una bala de cañón describe una trayectoria parabólica.)