LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

Manuel González

En el Congreso Internacional de Matemáticas de París, en 1900, Hilbert propuso una colección de problemas con la que pretendía orientar la investigación matemática del siglo XX. El primero de ellos fue la demostración de la hipótesis del continuo, debida a Cantor.

La idea de número de elementos de un conjunto finito había sido extendida a conjuntos infinitos por Cantor mediante la noción de cardinal, y la hipótesis del continuo se refería a los posibles cardinales de los subconjuntos de la recta real $\mathbb{R}$, también llamada el continuo. Curiosamente, Cantor vio necesario introducir una noción tan abstracta como la de cardinal en su estudio de un problema *concreto*: la convergencia de series trigonométricas en $\mathbb{R}$.

Dos conjuntos A y B tienen el mismo cardinal, $card(A) = card(B)$, si se puede definir una aplicación biyectiva de A sobre B. Además, el cardinal de A es menor que el de B, $card(A) < card(B)$, si se puede definir una aplicación inyectiva de A en B, pero no una biyectiva. Así, cada conjunto tiene un cardinal y los cardinales están linealmente ordenados, con lo que los conjuntos quedan ordenados por su *tamaño*.

El cardinal del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales se denota por $\aleph_0$. Es el primer cardinal infinito. Además se pueden construir conjuntos cuyos cardinales $\aleph_1$, $\aleph_2$... son los inmediatamente siguientes a $\aleph_0$. Se dice que un conjunto es contable si su cardinal es finito o es $\aleph_0$. El cardinal de $\mathbb{R}$ se denota por c.

63

Cantor había probado en 1873 que $\aleph_0 < c$, y sus investigaciones le llevaron a proponer, en un trabajo publicado en 1878:

> Hipótesis del continuo: para cada subconjunto infinito A de $\mathbb{R}$, o bien card(A) = $\aleph_0$ o bien card(A) = c.

Finalmente se probó que la hipótesis del continuo ni es falsa (Gödel, 1938) ni es verdadera (Cohen, 1964), al menos desde un punto de vista formalista. En 1966 Cohen recibió la medalla Fields por su contribución a la solución de este problema.

Esta solución puede parecer decepcionante. Sin embargo, los esfuerzos que llevaron a obtenerla fueron una contribución importante al desarrollo de la teoría de conjuntos y a la clarificación de los fundamentos de las matemáticas. Además, como veremos a continuación al describir estos esfuerzos, la cuestión sobre la verdad o la falsedad de la hipótesis de continuo no está cerrada.

De Cantor a Gödel

Cantor probó que la hipótesis del continuo es cierta para conjuntos cerrados, y tenía una fuerte convicción de que la prueba del caso general no estaba lejos. Por ello, quedó muy impresionado cuando en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1904 se presentó un resultado que implicaba la falsedad de la hipótesis del continuo. Sin embargo, al día siguiente Zermelo ya había encontrado un error en la prueba. Más tarde, Aleksandrov y Suslin probaron que la hipótesis del continuo es cierta para conjuntos de Borel y para conjuntos analíticos, pero el caso general se resistía. También Hilbert hizo intentos de demostrar la hipótesis del continuo, pero no fue capaz de lograrlo.

De la representación decimal de los números reales mediante cifras se puede derivar que $c = \mathrm{card}(P(\mathbb{N}))$, el cardinal del conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$. Por eso,

La hipótesis del continuo es equivalente a la igualdad $\aleph_1 = card(P(\mathbb{N}))$.

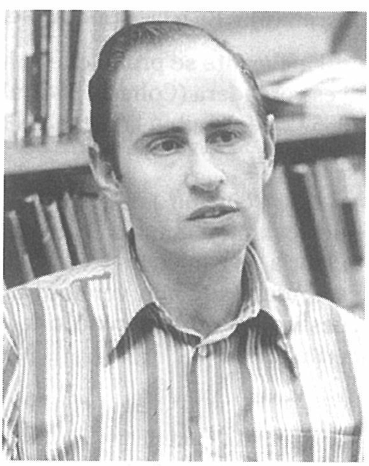
Análogamente, para todo conjunto A se tiene que $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(P(A))$, donde $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Esto implica que no existe un cardinal máximo. Además, esto llevó a Hausdorff a enunciar la hipótesis del continuo generalizada:

No existen conjuntos infinitos A, B tales que $card(A) < card(B) < card(P(A))$.

Sierpinski publicó un libro en 1934 con abundantes formulaciones equivalentes y consecuencias de la hipótesis del continuo. Una de estas consecuen-
63 cias es la existencia de los ahora llamados conjuntos de Sierpinski, que son subconjuntos de $\mathbb{R}$ no contables tales que su intersección con todo conjunto de medida cero es contable. Más tarde se probó que los conjuntos de Sierpinski tienen cardinal $\aleph_1$. Luego la existencia de uno con cardinal c implicaría la hipótesis del continuo.

Gödel y Cohen

Gödel atacó el problema desde un punto de vista nuevo, y obtuvo en 1938 un resultado de consistencia relativa. Probó que si añadimos la hipótesis del continuo a los axiomas de la teoría de conjuntos usual (la axiomática de Zermelo-Fraenkel, incluyendo el axioma de elección), no surgen contradicciones. Nótese que no hay prueba de que la teoría de conjuntos usual sea consistente.



Cohen

El resultado anterior fue seguido de veinte años en los que apenas se trabajó en este problema. En un artículo de divulgación publicado en 1947 (incluido en [G]), Gödel dio varios argumentos a favor de que la hipótesis del continuo era independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos. Uno de ellos era la existencia de los conjuntos de Sierpinski mencionados anteriormente. Y pensaba que la solución debería obtenerse buscando nuevos axiomas más *intuitivos* que la hipótesis del continuo, que permitiesen decidir cuál es el cardinal del continuo.

Cohen introdujo las técnicas de *forcing* con las que probó en 1963 que tampoco surgen contradicciones si se añade la negación de la hipótesis del continuo a los axiomas de la teoría de conjuntos usual. Luego la hipótesis del continuo es independiente de dichos axiomas. En particular, la igualdad $c = \aleph_i$, con i un numero natural cualquiera, es consistente con los axiomas. Para la hipótesis del continuo generalizada se obtienen resultados análogos.

Estado actual del problema

Desde el punto de vista formalista, desde el que Hilbert quería edificar todas las Matemáticas, los resultados que hemos visto dejan la hipótesis del continuo fuera de las Matemáticas reales. Sin embargo, parece razonable suponer que Hilbert pensaba que los axiomas de la teoría de conjuntos eran suficientes para determinar la verdad o falsedad de esta hipótesis. Es dudoso que hubiese aceptado los resultados de Gödel y Cohen como solución del problema.

Como vimos antes, Gödel pensaba que la hipótesis del continuo tenía sentido por sí misma, y que una prueba de que era independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos sólo mostraba la debilidad de estos axiomas. Desde su punto de vista, la hipótesis del continuo es o verdadera o falsa, y el problema de determinar c sigue abierto. Consideraba como solución más probable el que fuese falsa.

Cohen tenía un punto de vista más formalista, pero también aceptaba que se pudiese llegar a probar la falsedad de la hipótesis del continuo. La mayor parte de los matemáticos que trabajan en teoría de conjuntos piensan que es falsa. Entre otras razones, porque el *método de construcción* de card(P(N)) y el de $\aleph_1$ son muy distintos, lo que sugiere que c debería ser mucho mayor que $\aleph_1$. Sin embargo, no parece que la solución al problema esté cerca.

Un lugar interesante para buscar información adicional es la página "oficial" de la hipótesis del continuo, mantenida por Nancy McGough:

http://www.ii.com/math/ch/.

Consecuencias en otros campos de la matemática

En los últimos años se ha visto que la solución de un cierto número de problemas en diversas ramas de la Matemática dependía de que se admitiese o no la hipótesis del continuo. Veamos uno de estos problemas, dentro del análisis funcional: la conjetura de Kaplansky.

Kaplansky conjeturó en 1948 que toda norma que hace álgebra normada al espacio $C(K)$ de las funciones complejas continuas en un compacto K es equivalente a la norma del supremo. Antes había probado que el resultado es cierto si $C(K)$ es completo con esa norma. Se obtuvieron muchos resultados parciales hasta que Dales y Esterle (independientemente), utilizando la hipótesis del continuo, probaron en 1976 que la conjetura de Kaplansky es falsa. Se pensó que el uso de la hipótesis del continuo era accidental, pero poco después Solovay probó que dicha conjetura es cierta a partir de una negación de la hipótesis del continuo. El libro [DW] contiene abundante información adicional.

Bibliografia

[DW] Dales, H.; Woodin, W.: "An introduction to independence for analysts", *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, 115. Cambridge University Press, 1987.

Exposición para lectores *no especializados* del método de forcing de Cohen. Como aplicación, demuestra la conjetura de Kaplansky suponiendo que la hipótesis del continuo es falsa. Por el camino prueba que la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos usual.

[G] Gödel, K.: *Obras completas* (Introducción y traducción de Jesús Mosterín), Alianza Universidad 286, 1981. Hay una segunda edición, publicada en 1989.

Incluye el artículo de divulgación "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?", *The American Mathematical Monthly* (1947), donde Gödel expone las razones por las que piensa que la hipótesis del continuo es falsa. Y, por supuesto, la prueba original de la consistencia de la hipótesis del continuo.