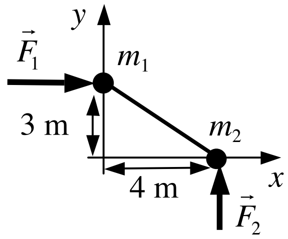
SISTEMAS DE PARTICULAS

Las masas m_1 = 10 kg y m_2 = 6 kg están unidas por una barra rígida de masa despreciable. Estando inicialmente en reposo se hallan bajo la acción de las fuerzas $\vec{F}_1 = 8\hat{i}$ y $\vec{F}_2 = 6\hat{j}$. Hallar las coordenadas de su centro de masas como función del tiempo. Expresar el momento lineal en función del tiempo.



Solución: **I.T.I. 96, 98, 03, I.T.T. 03**

La posición inicial del C.M. será:

$$\vec{r}_{c.m.,0} = \frac{m_1 \vec{r}_{1,0} + m_2 \vec{r}_{2,0}}{m_1 + m_2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}, 0\right)$$

La velocidad inicial del C.M. es nula ya que las dos partículas parten del reposo.

La aceleración del C.M. es:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (m_1 + m_2)\vec{a}_{c.m.} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{c.m.} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, 0\right)$$

El C.M. va a realizar por lo tanto un movimiento uniformemente acelerado:

$$\vec{r}_{c.m.} = \vec{r}_{c.m.,0} + \frac{1}{2}\vec{a}_{c.m.}t^2 = \boxed{\left(\frac{6 + t^2}{4}, \frac{30 + 3t^2}{16}, 0\right)}$$

El momento lineal inicial es nulo (por encontrarse en reposo las partículas), el momento lineal final será igual al impulso comunicado por las fuerzas externas:

$$\vec{P}(t) = \int_0^t \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)dt = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)t = \boxed{(8t, 6t, 0)}$$

(todos los resultado expresados en unidades del S.I.)

Una granada que lleva una velocidad de 10 m/s estalla dividiéndose en dos fragmentos. El mayor de estos, cuya masa representa el 60% del total de la masa de la granada sigue moviéndose en la misma dirección que antes, pero su velocidad aumenta hasta 25 m/s. Hallar la velocidad del fragmento menor.

Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04

Llamemos m a la masa de la granada, m_1 a la del fragmento mayor, y m_2 a la del fragmento menor, y sean $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sus velocidades respectivas. Aplicando la conservación del momento lineal:

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

En esta ecuación los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}_1$ tienen la misma dirección, con lo que el vector $\vec{v}_2$ estará dirigido también en la misma dirección. Reescribiendo la ecuación pero ahora sólo con la componentes de los vectores a lo largo de dicha dirección de movimiento:

$$mv = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{mv - m_1 v_1}{m_2} = \frac{v - \dfrac{m_1}{m} v_1}{\dfrac{m_2}{m}} = \boxed{-12.5 \text{ m/s}}$$

Según el resultado el segundo fragmento se moverá según la dirección original pero en sentido contrario (dado el signo negativo).

Un proyectil se dispara desde un cañón con velocidad de 480 m/s con un ángulo de 60º con la horizontal. El proyectil explota en dos fragmentos de igual masa 50 s después de haber abandonado el cañón. Uno de los fragmentos cuya velocidad inicial es nula cae verticalmente. ¿A qué distancia del cañón cae el otro fragmento suponiendo el terreno nivelado?

Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

Si tomamos el origen de coordenadas en la situación del cañón y ponemos a cero el cronómetro cuando se lanza el proyectil, las ecuaciones del movimiento para el C.M. del proyectil antes y después de la explosión serán:

$$\vec{r}_{c.m.}(t) = \vec{v}_{c.m.,0}\, t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \quad , \quad \vec{v}_{c.m.}(t) = \vec{v}_{c.m.,0} + \vec{g}t$$

En el momento de la explosión:

$$\vec{r}_{c.m.}(t_{expl.}) = \left(12\hat{i} + 8.53\hat{j}\right) \text{km} \quad , \quad \vec{v}_{c.m.}(t_{expl.}) = \left(240\hat{i} - 74.3\hat{j}\right) \text{m/s}$$

El momento lineal del proyectil antes y después de la explosión debe ser el mismo. Llamemos $\vec{v}_{2,0}$ a la velocidad inicial del segundo fragmento después de la explosión:

$$\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{después} \quad \Rightarrow \quad M\vec{v}_{c.m.}\left(t_{expl.}\right) = m_2\vec{v}_{2,0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{2,0} = \left(\frac{M}{m_2}\right)\vec{v}_{c.m.}\left(t_{expl.}\right) = 2\vec{v}_{c.m.}\left(t_{expl.}\right) = \left(480\hat{i} - 148.6\hat{j}\right)\ \mathrm{m/s}$$

La posición inicial del fragmento 2 es la misma que la que tenía el proyectil en el instante $t_{expl.}$, de forma que para cualquier instante del tiempo tendremos que:

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_{c.m.}\left(t_{expl.}\right) + \vec{v}_{2,0}\left(t - t_{expl.}\right) + \frac{1}{2}\vec{g}\left(t - t_{expl.}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_2(t) = x_{c.m.}\left(t_{expl.}\right) + v_{2,0,x}\left(t - t_{expl.}\right) \\ y_2(t) = y_{c.m.}\left(t_{expl.}\right) + v_{2,0,y}\left(t - t_{expl.}\right) - \frac{1}{2}g\left(t - t_{expl.}\right)^2 \end{cases}$$

Cuando llegue al suelo la altura será nula:

$$y_2\left(t_{suelo}\right) = y_{c.m.}\left(t_{expl.}\right) + v_{2,0,y}\left(t_{suelo} - t_{expl.}\right) - \frac{1}{2}g\left(t_{suelo} - t_{expl.}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_{suelo} = 79.2\ \mathrm{s}$$

Y en ese instante la coordenada x valdrá: $\boxed{x_2\left(t_{suelo}\right) = 19.0\ \mathrm{km}}$

Un sistema está compuesto por tres partículas A, B y C de masas 1, 1.5 y 2 kg respectivamente. En un determinado momento sus velocidades en m/s son: $\vec{v}_A = -10\hat{i} + 5\hat{k}$, $\vec{v}_B = 8\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{k}$ y $\vec{v}_C = a\hat{i} + b\hat{j} + 10\hat{k}$ y sus posiciones en m son: $\vec{r}_A = 1.2\hat{i}$, $\vec{r}_B = 1.8\hat{j} + 1.5\hat{k}$ y $\vec{r}_C = 1.2\hat{i} + 1.8\hat{j} + 0.6\hat{k}$. Determinar el valor de las componentes a y b de la velocidad de C para que el momento angular del sistema respecto del origen sea paralelo al eje Z. ¿Cuánto vale en este caso el momento angular?

Solución: I.T.I. 94, 96, 03, I.T.T. 03

El momento angular del sistema será:

$$\vec{L} = \vec{L}_A + \vec{L}_B + \vec{L}_C = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{p}_3 =$$

$$= m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 + m_3\vec{r}_3 \times \vec{v}_3 =$$

$$= \ldots = (60.3 - 1.2b)\hat{i} + (1.2a - 12)\hat{j} + (2.4b - 3.6a - 21.6)\hat{k}$$

Para que sea paralelo al eje Z:

$$\vec{L} \parallel \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} L_x = 0 \\ L_y = 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 60.3 - 1.2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \boxed{50.25\ \mathrm{m/s}} \\ 1.2a - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \boxed{10\ \mathrm{m/s}} \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión del momento angular:

$$\boxed{\vec{L} = 63\hat{k}\,\text{kg m}^2/\text{s}}$$

En el tiempo t_0 dos partículas en interacción mutua exclusivamente, con 2 kg y 3 kg de masa se mueven, con respecto a un observador, a 10 m/s a lo largo del eje X en sentido positivo y a 8m/s formando un ángulo de 120º con respecto al eje X. a) Expresar cada velocidad en forma vectorial. b) Calcular la velocidad del C.M. c) Calcular el momento lineal total respecto al C.M. d) Calcular la masa reducida del sistema. e) Dibujar la trayectoria del C.M. f) Si las partículas están inicialmente en los puntos (0,1,1) y (–1,0,2) respectivamente, calcular el momento angular del sistema respecto al C.M y al origen del sistema de referencia. Verificar la relación entre ambos momentos angulares.

Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04

a) Orientamos los ejes Y y Z de forma que la segunda partícula se mueva en el plano XY con velocidad positiva a lo largo del eje Y.

$$\vec{v}_1 = v_1\left(\cos\theta_1\,\hat{i} + \text{sen}\,\theta_1\,\hat{j}\right) = \boxed{10\hat{i}\ \text{m/s}}$$

$$\vec{v}_2 = v_2\left(\cos\theta_2\,\hat{i} + \text{sen}\,\theta_2\,\hat{j}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right)\text{m/s} = \boxed{\left(-4\hat{i} + 4\sqrt{3}\,\hat{j}\right)\text{m/s}}$$

b) $$\vec{v}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \boxed{\left(\frac{8}{5}\hat{i} + \frac{12}{5}\sqrt{3}\,\hat{j}\right)\text{m/s}}$$

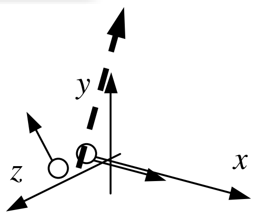
c) El momento lineal respecto al C.M. será:

$$\vec{P}^{C.M.} = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_{C.M.}\right) + m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_{C.M.}\right) =$$

$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 - \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}_{C.M.} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 - \left(m_1 + m_2\right)\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right) = \boxed{0}$$

d) La masa reducida viene dada por la expresión: $\mu = \dfrac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2} = \boxed{\dfrac{6}{5}\,\text{kg}}$

e) Si las partículas sólo interaccionan entre sí y no están sometidas a ninguna interacción externa el movimiento del C.M. será rectilíneo uniforme:



f) Dado que el sistema no está sometido a fuerzas externas el momento angular permanecerá constante, por lo tanto lo podemos calcular utilizando las posiciones y velocidades iniciales de las partículas.

La posición inicial del C.M. es:

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{-3}{5}\hat{i} + \frac{2}{5}\hat{j} + \frac{8}{5}\hat{k}\right)\text{ m}$$

Las posiciones iniciales de las partículas relativas al C.M. son:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{C.M.} = \frac{3}{5}\left(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right)\text{ m}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{C.M.} = \frac{2}{5}\left(-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)\text{ m}$$

Las velocidades iniciales respecto al C.M. son:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{C.M.} = \left(\frac{42}{5}\hat{i} + \frac{-12}{5}\sqrt{3}\,\hat{j}\right)\text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{C.M.} = \left(\frac{-28}{5}\hat{i} + \frac{8}{5}\sqrt{3}\,\hat{j}\right)\text{ m/s}$$

El momento angular respecto al C.M. será:

$$\vec{L}_{C.M.} = \vec{r}_1'\times\left(m_1\vec{v}_1'\right) + \vec{r}_2'\times\left(m_2\vec{v}_2'\right) = \boxed{\frac{1}{5}\left[-24\sqrt{3}\,\hat{i} - 84\,\hat{j} - \left(84 + 24\sqrt{3}\right)\hat{k}\right]}$$

El momento angular respecto al origen será:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_1\times\left(m_1\vec{v}_1\right) + \vec{r}_2\times\left(m_2\vec{v}_2\right) = \boxed{-24\sqrt{3}\,\hat{i} - 4\,\hat{j} - \left(20 + 12\sqrt{3}\right)\hat{k}}$$

Por último:

$$\vec{r}_{C.M.}\times\vec{P} = \frac{1}{5}\left[-96\sqrt{3}\,\hat{i} + 64\,\hat{j} - \left(16 + 36\sqrt{3}\right)\hat{k}\right]$$

Y como se puede comprobar se verifica que: $\vec{L}_O = \vec{L}_{C.M.} + \vec{r}_{C.M.}\times\vec{P}$

Dos partículas de masa 2 kg y 3 kg se mueven con velocidades de 10 m/s a lo largo del eje *X* en sentido positivo y a 8 m/s en un ángulo de 120º con el eje *X*. a) Expresar cada velocidad en forma vectorial. Hallar: b) la velocidad del C.M. c) la velocidad de cada partícula respecto al C.M. d) el momento lineal de cada partícula respecto al C.M. e) la masa reducida del sistema. f) la energía cinética del sistema respecto del sistema fijo, g) la energía cinética del sistema respecto del C.M.

Solución: I.T.I. 03

a) Orientamos los ejes *Y* y *Z* de forma que la segunda partícula se mueva en el plano *XY* con velocidad positiva a lo largo del eje *Y*.

$$\vec{v}_1 = v_1\left(\cos\theta_1\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta_1\,\hat{\jmath}\right) = \boxed{10\,\hat{\imath}\ \mathrm{m/s}}$$

$$\vec{v}_2 = v_2\left(\cos\theta_2\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta_2\,\hat{\jmath}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right)\ \mathrm{m/s} = \boxed{\left(-4\,\hat{\imath} + 4\sqrt{3}\,\hat{\jmath}\right)\mathrm{m/s}}$$

b) $\vec{v}_{C.M.} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \boxed{\left(\frac{8}{5}\hat{\imath} + \frac{12}{5}\sqrt{3}\,\hat{\jmath}\right)\ \mathrm{m/s}}$

c) La velocidades de las partículas respecto al C.M. serán:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{C.M.} = \boxed{\left(\frac{42}{5}\hat{\imath} - \frac{12}{5}\sqrt{3}\,\hat{\jmath}\right)\ \mathrm{m/s}}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{C.M.} = \boxed{\left(\frac{-28}{5}\hat{\imath} + \frac{8}{5}\sqrt{3}\,\hat{\jmath}\right)\ \mathrm{m/s}}$$

d) Los momentos lineales de las partículas respecto al C.M. serán:

$$\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1' = \boxed{\left(\frac{84}{5}\hat{\imath} - \frac{24}{5}\sqrt{3}\,\hat{\jmath}\right)\mathrm{N\,s}}$$

$$\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2' = \boxed{\left(\frac{-84}{5}\hat{\imath} + \frac{24}{5}\sqrt{3}\,\hat{\jmath}\right)\mathrm{N\,s}}$$

(Se puede comprobar que su suma es nula)

e) La masa reducida viene dada por la expresión: $\mu = \dfrac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} = \boxed{\frac{6}{5}\,\mathrm{kg}}$

f) La energía cinética respecto del sistema fijo será:

$$E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \boxed{196\ \mathrm{J}}$$

g) La energía cinética respecto del sistema C.M. será:

$$E_c^{C.M.} = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \boxed{146.4\ \mathrm{J}}$$

Se puede comprobar que se verifica: $E_c = E_c^{C.M.} + \dfrac{1}{2}Mv_{C.M.}^2$

Si las partículas del problema anterior están en los puntos (0,1,1) y (–1,0,2) respectivamente, calcular: a) la posición del C.M., b) el momento angular del sistema respecto al C.M., c) el momento angular del sistema respecto al origen del sistema fijo.

Solución: **I.T.I. 03**

a) La posición del C.M. es:

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \boxed{\left(\frac{-3}{5}\hat{i} + \frac{2}{5}\hat{j} + \frac{8}{5}\hat{k}\right) \text{ m}}$$

b) Las posiciones de las partículas relativas al C.M. son:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{C.M.} = \frac{3}{5}\left(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right) \text{ m}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{C.M.} = \frac{2}{5}\left(-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) \text{ m}$$

El momento angular respecto al C.M. será:

$$\vec{L}_{C.M.} = \vec{r}_1' \times \left(m_1\vec{v}_1'\right) + \vec{r}_2' \times \left(m_2\vec{v}_2'\right) = \boxed{\frac{1}{5}\left[-24\sqrt{3}\,\hat{i} - 84\,\hat{j} - \left(84 + 24\sqrt{3}\right)\hat{k}\right]}$$

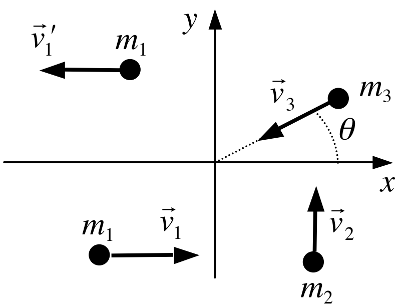
c) El momento angular respecto al origen será:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_1 \times \left(m_1\vec{v}_1\right) + \vec{r}_2 \times \left(m_2\vec{v}_2\right) = \boxed{-24\sqrt{3}\,\hat{i} - 4\,\hat{j} - \left(20 + 12\sqrt{3}\right)\hat{k}}$$

Por último:

$$\vec{r}_{C.M.} \times \vec{P} = \frac{1}{5}\left[-96\sqrt{3}\,\hat{i} + 64\,\hat{j} - \left(16 + 36\sqrt{3}\right)\hat{k}\right]$$

Y como se puede comprobar se verifica que: $\vec{L}_O = \vec{L}_{C.M.} + \vec{r}_{C.M.} \times \vec{P}$



En un determinado instante tres partículas se mueven como se muestra en la figura. Después de un cierto tiempo, son observadas de nuevo y se encuentra que m_1 se mueve de la forma que se muestra, mientras que m_2 está en reposo. a) Hallar la velocidad de m_3 si el sistema era un sistema aislado. b) Hallar la velocidad del centro de masas del sistema en los dos instantes mencionados en el problema.
Tomar $\theta = 30°$, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 0.5$ kg, $m_3 = 1$ kg, $v_1 = 1$ m/s, $v_2 = 2$ m/s, $v_3 = 4$ m/s y $v_1' = 3$ m/s, suponer que no actúan fuerzas externas. c) Si en cierto momento las posiciones de las masas son $\vec{r}_1 = (-0.8, -1.1)$ m, $\vec{r}_2 = (0.8, -1.1)$ m y $\vec{r}_3 = (1.4, 0.8)$ m, dibujar la trayectoria del centro de masas.

Solución: **I.T.I. 02, I.T.T. 99, 02**

a) Si el sistema es un sistema aislado podemos aplicar la conservación del momento lineal:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' + m_3\vec{v}_3' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_3' = (4.536, -1)\ \text{m/s}}$$

b) Como se conserva el momento lineal la velocidad del C.M. será constante:

$$\vec{v}_{C.M.} = \vec{v}_{C.M.}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \boxed{(-0.4183, -0.2857)\ \text{m/s}}$$

c) Si en dicho instante ponemos a cero nuestro cronómetro:

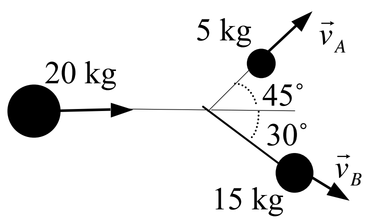
$$\vec{r}_{C.M.}(0) = \frac{m_1\vec{r}_1(0) + m_2\vec{r}_2(0) + m_3\vec{r}_3(0)}{m_1 + m_2 + m_3} = (5.714 \cdot 10^{-2}, 0.5571)\ \text{m}$$

La posición del C.M. en cualquier instante vendrá dada por:

$$\vec{r}_{C.M.}(t) = \vec{r}_{C.M.}(0) + \vec{v}_{C.M.}t$$

El movimiento es rectilíneo uniforme. La trayectoria es una línea recta que pasa por el punto $\vec{r}_{C.M.}(0)$ y su dirección viene indicada por $\vec{v}_{C.M.}$

Un proyectil de 20 kg se esta moviendo con una velocidad de 200 m/s cuando estalla en dos fragmentos de 5 y 15 kg cada uno. Si inmediatamente después de la explosión los fragmentos *A* y *B* se mueven como indica la figura, determinar la velocidad de cada uno.



Solución: **I.T.I. 02, I.T.T. 99, 02**

Por conservación del momento lineal:

$$(m_A + m_B)\vec{v} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (m_A + m_B)v = m_A v_A \cos\theta_A + m_B v_B \cos\theta_B \\ 0 = m_A v_A \,\text{sen}\,\theta_A - m_B v_B \,\text{sen}\,\theta_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_A = 414.1\ \text{m/s} \quad , \quad v_A = 195.2\ \text{m/s}}$$

Un vagón de tren de juguete de masa 250 g a la velocidad de 0.5 m/s, se acopla a otro de masa 400 g que está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la velocidad final de ambos vagones después de acoplados?. ¿Cuál es la energía cinética total antes del acoplamiento?. Determinar las velocidades iniciales de los vagones respecto al C.M. del sistema y calcular la energía cinética inicial respecto al C.M. Calcular la energía cinética asociada al movimiento de traslación del C.M.

Solución: I.T.I. 01, I.T.T. 01, 04

Aplicando la conservación del momento lineal:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \boxed{0.19\ \mathrm{m/s}}$$

La energía cinética antes del acoplamiento era:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \boxed{3.1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}}$$

La velocidad del C.M. es la misma velocidad v calculada en el primer apartado (ya que al final los dos vagones se mueven conjuntamente). Las velocidades de los dos vagones respecto del C.M. antes del acoplamiento serán.

$$v_1' = v_1 - v = \boxed{0.31\ \mathrm{m/s}} \qquad v_2' = v_2 - v = -v = \boxed{-0.19\ \mathrm{m/s}}$$

La energía cinética respecto al C.M. antes del acoplamiento será:

$$E_c^{C.M.} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \boxed{1.9 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}}$$

La energía cinética asociada al movimiento de traslación del C.M. será la diferencia entre las dos energías cinéticas calculadas anteriormente:

$$E_c = E_c^{C.M.} + \frac{1}{2} M v_{C.M.}^2 = E_c^{C.M.} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = E_c - E_c^{C.M.} = \boxed{1.2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}}$$

Esta energía cinética asociada al movimiento del C.M. coincide en nuestro caso con la energía cinética final del sistema, ya que los vagones acaban por moverse conjuntamente.

Una cadena esta colocada sobre una mesa sin rozamiento con la quinta parte de su longitud colgando en el borde. Sea m su masa distribuida uniformemente a lo largo de su longitud l Hallar el trabajo necesario para subir toda la cadena a la mesa tirando de ella horizontalmente por el extremo que está sobre la mesa.

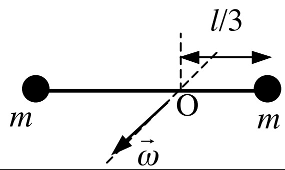
Solución: **I.T.I. 01, 02, I.T.T. 99, 01, 02**

El trabajo realizado externamente será igual a la variación de energía de la cadena. La energía cinética inicial y final de la cadena es nula. En cuanto a la energía potencial gravitatoria, si tomamos el nivel cero a la altura de la mesa, sólo la parte de la cadena que cuelga contribuirá a este tipo de energía. La posición del centro de masas de dicha parte es de $L/10$ por debajo del nivel de la mesa.

$$W_{ext.} = \Delta E = \cancelto{0}{\Delta E_c} + \Delta E_{pot\,grav.} =$$

$$= \cancelto{0}{E_{pot\,grav.\,final}} - E_{pot.grav\,inicial} = -\left(\frac{m}{5}\right) g \left(-\frac{L}{10}\right) = \boxed{\frac{1}{50} mgL}$$

Dos partículas de masa m se encuentran en los extremos de una varilla de longitud l y masa despreciable. El sistema está girando con una velocidad angular cte. ω en torno a un eje fijo perpendicular a la varilla en el punto O. Calcular a) velocidad del C.M. b) el momento angular respecto de O.



Solución: **I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04**

g) Colocando el origen de coordenadas en el punto O y situando el eje X a lo largo de la barra, la posición del centro de masas será: correcto

$$x_{C.M.} = \frac{\left(-\frac{2}{3}l\right)m + \left(\frac{1}{3}l\right)m}{2m} = -\frac{1}{6}l$$

Dicho centro de masas estará por lo tanto realizando una trayectoria circular de radio $r = l/6$ con una velocidad angular ω con lo cual su velocidad lineal será:

$$v_{C.M.} = \omega\, r = \boxed{\frac{1}{6}\omega\, l}$$

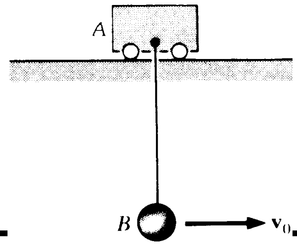
h) El momento angular del sistema respecto de O será:

$$L_O = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 = m_1(\omega\, r_1)r_1 + m_2(\omega\, r_2)r_2 =$$

$$= \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)\omega = m\left[\left(\frac{2}{3}l\right)^2 + \left(\frac{1}{3}l\right)^2\right]\omega = \boxed{\frac{5}{9} m l^2 \omega}$$

Otra forma de haber realizado este mismo cálculo sería utilizando el concepto de momento de inercia I: $L_O = I\omega = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)\omega = \ldots$

La bola B, de masa m_B se suspende de una cuerda de longitud L unida al vagón A de masa m_A, el cual puede rodar libremente sobre una vía horizontal sin rozamiento. Si se comunica a la bola una velocidad horizontal inicial v_0 mientras el vagón está en reposo, determínense: a) la velocidad de B al alcanzar su punto de altura máxima y b) la máxima altura h a la que se eleva B.



Solución: **I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04**

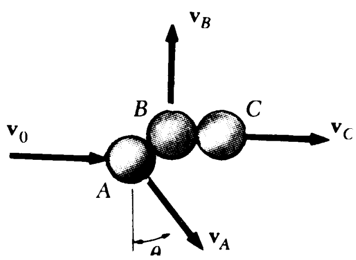
d) Si consideramos nuestro sistema formado por las dos masas y la cuerda, las únicas fuerzas externas capaces de modificar su momento lineal son la gravitatoria y la normal que actúa sobre el vagón A. Estas dos fuerzas son verticales, no actúan sobre el sentido horizontal del movimiento, con lo que podemos aplicar la conservación del momento lineal para las componentes horizontales. En la situación final, cuando B alcanza su máxima altura, su velocidad relativa respecto a A es nula, los dos cuerpos se mueven conjuntamente con la velocidad v:

$$(m_A + m_B)v = m_B v_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \left(\frac{m_B}{m_A + m_B}\right) v_0}$$

e) De las fuerzas externas la única que realiza trabajo es la fuerza gravitatoria que actúa sobre B. Por lo tanto, teniendo en cuenta la energía potencial gravitatoria de B podemos aplicar la conservación de la energía. Tomando el nivel nulo de energía potencial para B en la posición más baja podemos escribir:

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 + m_B g h = \frac{1}{2} m_B v_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)}$$

En un juego de billar, la bola A se mueve con velocidad $\vec{v}_0 = 5\,\mathrm{m/s}\;\hat{i}$ cuando golpea las bolas B y C que se encuentran en reposo una junto a la otra. Después del choque, se observa que las tres bolas se mueven en las direcciones mostradas, con θ = 20°. Suponiendo superficies sin rozamiento y choque perfectamente elástico determínense los módulos de las velocidades v_A, v_B y v_C.



Solución: **I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04**

Aplicando la conservación del movimiento y teniendo en cuenta que las masas de las bolas es la misma:

$$\vec{v}_A + \vec{v}_B + \vec{v}_C = \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_A \operatorname{sen}\theta + v_C = v_0 \\ \\ v_B - v_A \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Por otro lado como el choque es elástico se conserva la energía:

$$v_A^2 + v_B^2 + v_C^2 = v_0^2$$

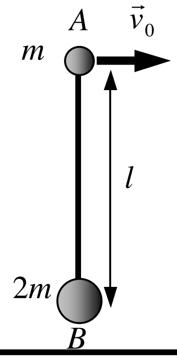
Tenemos tres ecuaciones que nos permiten encontrar el valor de las tres incógnitas pedidas:

$$v_A = v_0 \operatorname{sen}\theta = \boxed{1.71\ \mathrm{m/s}}$$

$$v_B = v_0 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \boxed{1.61\ \mathrm{m/s}}$$

$$v_C = v_0 \cos^2\theta = \boxed{4.42\ \mathrm{m/s}}$$

Dos esferas pequeñas A y B de masa m y $2m$, respectivamente, están unidas por medio de una barra rígida de longitud l y masa despreciable. Las dos esferas descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento cuando repentinamente se le proporciona a A la velocidad $\vec{v}_0 = v_0 \hat{i}$. Determínense: a) el momento lineal del sistema y su momento angular respecto de su centro de masas, b) las velocidades de A y B después de que la barra AB haya girado 90° y c) las velocidades de A y B después de que la barra AB haya girado 180°.



Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04

a) El momento lineal total del sistema va a permanecer constante, ya que las únicas fuerzas externas que actúan, los pesos y las normales ejercidas por la superficie horizontal, se anulan entre sí. El momento lineal del sistema será: $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}_0}$

Si colocamos el origen de coordenadas en la posición inicial de A, el eje Z perpendicular a la figura del enunciado y hacia fuera del papel, el eje Y en la dirección y sentido de B a A y el eje X perpendicular a estos y orientado hacia la derecha, la posición del C.M. vendrá dada por:

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(0,0,0) + 2m(0,-l,0)}{3m} = \left(0,-\frac{2}{3}l,0\right)$$

Las posiciones relativas iniciales de las dos esferas respecto del C.M. son:

$$\vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{C.M.} = \left(0, \frac{2}{3}l, 0\right) \qquad \vec{r}_2{}' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{C.M.} = \left(0, -\frac{1}{3}l, 0\right)$$

La velocidad del C.M. será:

$$\vec{P} = M\vec{v}_{C.M.} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{C.M.} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{m\vec{v}_0}{3m} = \frac{1}{3}\vec{v}_0$$

Las velocidades relativas iniciales de las dos esferas respecto al C.M. son:

$$\vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{C.M.} = \frac{2}{3}\vec{v}_0 \qquad \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{C.M.} = -\frac{1}{3}\vec{v}_0$$

El momento angular del sistema respecto del C.M. será por lo tanto:

$$\vec{L}_{C.M.} = \vec{r}_1{}' \times \left(m_1\vec{v}_1{}'\right) + \vec{r}_2{}' \times \left(m_2\vec{v}_2'\right) = \boxed{-\frac{2}{3}mv_0 l\,\hat{k}}$$

b) Visto desde el C.M. el movimiento de las dos esferas es un movimiento circular uniforme. Visto desde el laboratorio el movimiento de las esferas será una combinación de dicho movimiento circular uniforme y del movimiento de traslación uniforme del C.M.
Cuando la barra haya girado 90º tendremos:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' + \vec{v}_{C.M.} = \frac{2}{3}v_0(0,-1,0) + \frac{1}{3}v_0(1,0,0) = \boxed{\frac{1}{3}v_0(1,-2,0)}$$

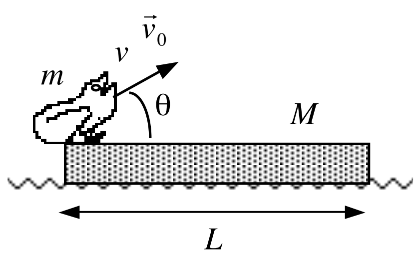
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_{C.M.} = \frac{1}{3}v_0(0,1,0) + \frac{1}{3}v_0(1,0,0) = \boxed{\frac{1}{3}v_0(1,1,0)}$$

c) Cuando la barra haya girado 180º tendremos:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' + \vec{v}_{C.M.} = \frac{2}{3}v_0(-1,0,0) + \frac{1}{3}v_0(1,0,0) = \boxed{\frac{1}{3}v_0(-1,0,0)}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_{C.M.} = \frac{1}{3}v_0(1,0,0) + \frac{1}{3}v_0(1,0,0) = \boxed{\frac{1}{3}v_0(2,0,0)}$$

Una rana de masa *m* está situada en el extremo de una tabla recta de masa *M* y longitud *L*. La tabla se encuentra en reposo y flotando sobre las aguas tranquilas de un estanque. La rana da un salto a lo largo de la tabla con un ángulo de elevación θ sobre la horizontal. Si la rana cae en el otro extremo de la tabla, calcular: a) el espacio horizontal recorrido por la rana, b) el módulo de la velocidad inicial v_0. **Nota**: se desprecia el rozamiento entre la tabla y el agua, y se considera a la rana como una masa puntual.



Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04

Cuando la rana salta, por conservación del momento lineal horizontal (las fuerzas externas son verticales) la tabla se mueve ligeramente hacia atrás. Debido a ello si la rana cae en el otro extremo de la tabla no habrá recorrido horizontalmente una distancia L, sino una distancia d más pequeña. En todo caso, como el C.M. se encontraba inicialmente en reposo en la situación final se encontrará en la misma posición. Si colocamos el origen de coordenadas en la posición inicial de la rana:

Inicialmente: $x_{rana} = 0\,,\quad x_{tabla} = \dfrac{L}{2} \quad\Rightarrow\quad x_{C.M.} = \dfrac{m x_{rana} + M x_{tabla}}{m+M} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{m+M}\right)L$

Finalmente: $x'_{rana} = d\,,\quad x'_{tabla} = d - \dfrac{L}{2} \quad\Rightarrow\quad x'_{C.M.} = \dfrac{m x'_{rana} + M x'_{tabla}}{m+M} = \dfrac{md + M\left(d - \dfrac{L}{2}\right)}{m+M}$

Igualando los dos resultados:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{M}{m+M}\right)L = \frac{md + M\left(d - \frac{L}{2}\right)}{m+M} \quad\Rightarrow\quad \boxed{d = \left(\frac{M}{m+M}\right)L}$$

Este resultado era previsible si hubiéramos razonado inicialmente sobre la simetría entre la situación inicial y la final. Si inicialmente la rana se encontraba a una distancia $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M}{m+M}\right)L$ a la izquierda del C.M., en la situación final dada la simetría se encontrará a la misma distancia pero hacia la derecha. La distancia recorrida por la rana en el salto sería por lo tanto el doble de la distancia a la que se encontraba del C.M.