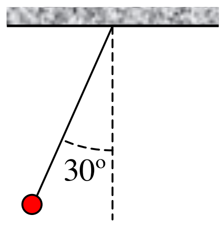
MOV. CIRCULARES:

Un aparato de un parque de atracciones consiste en un gran cilindro vertical que gira alrededor de su eje lo suficientemente rápido para que cualquier persona que se encuentre dentro de él se mantenga pegada contra la pared cuando se quita el piso. El coeficiente de rozamiento es $\mu = 0.4$ y el radio del cilindro es $R = 4$ m. a) Encontrar el periodo máximo de revolución para evitar que la persona caiga. b) ¿Cuántas revoluciones por minuto realiza el cilindro?

Solución: I.T.I. 93, 96, I.T.T. 00

Texto solución

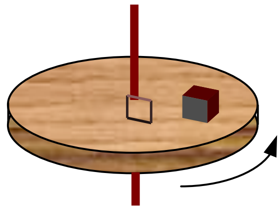
La masa de un péndulo de 2 m de longitud describe un arco de circunferencia en un plano vertical. Si en la posición de la figura la tensión de la cuerda es 2.5 veces el peso de la masa, hallar la velocidad y aceleración de la masa en dicho instante.



Solución: I.T.I. 93, I.T.T. 00

Texto solución

Un bloque está sostenido por una mesa giratoria que, partiendo del reposo, gira de modo que la aceleración tangencial es de 1 m/s^2. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la mesa es de 0.5 determinar el tiempo que tarda el bloque en deslizar y su velocidad en dicho instante. ¿Cuál será el menor tiempo para alcanzar una velocidad de 2 m/s sin deslizar? Distancia del bloque al centro d = 2 m.



Solución: **I.T.I. 00, 03, I.T.T. 04**

Como parte del reposo y la aceleración tangencial es constante:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = a_t dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^v dv = \int_0^t a_t dt \quad \Rightarrow \quad v = a_t t \quad (1)$$

Con lo que la aceleración normal y el módulo de la aceleración del bloque valdrán:

$$a_n = \frac{v^2}{d} = \frac{a_t^2}{d} t^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_t \sqrt{1 + \left(\frac{a_t}{d}\right)^2 t^4}$$

Esta aceleración es producida por la fuerza de rozamiento del bloque con la mesa giratoria (es la única fuerza horizontal):

$$F_{roz.est.} = ma = ma_t \sqrt{1 + \left(\frac{a_t}{d}\right)^2 t^4}$$

En el instante $t_{desl.}$ en que comienza a deslizar, la fuerza de rozamiento estática alcanza su valor máximo:

$$\left.\begin{aligned} F_{roz.est.máx.} &= ma = ma_t \sqrt{1 + \left(\frac{a_t}{d}\right)^2 t_{desl.}^4} \\ F_{roz.est.máx.} &= \mu_{est.} N = \mu_{est.} mg \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{desl.} = \left(\frac{d}{a_t}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\mu_{est.} g}{a_t}\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{4}} = 3.13 \text{ s}}$$

Y la velocidad en dicho instante será:

$$v(t_{desl.}) = a_t t_{desl.} = \boxed{(a_t d)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\mu_{est.} g}{a_t}\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{4}} = 3.13 \text{ m/s}}$$

Si queremos alcanzar una velocidad v partiendo del reposo con una aceleración tangencial a_t el tiempo t que tardaremos lo podemos calcular a partir de la ecuación (1): $t(v) = \frac{v}{a_t}$ y será tanto más pequeño cuanto mayor sea la aceleración tangencial a_t. En todo caso este tiempo debe ser siempre inferior al tiempo que tarde el bloque en deslizar, ya que queremos conseguir dicha velocidad sin que el bloque deslice:

$$\frac{v}{a_t} \le \left(\frac{d}{a_t}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\mu_{est.}g}{a_t}\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad d^2 a_t^2 - \mu_{est.} g d^2 a_t + v^4 \le 0$$

La inecuación anterior se cumple siempre que:

$$\frac{1}{2}\mu_{est.}g\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4v^4}{\mu_{est.}^2 g^2 d^2}}\right] \le a_t \le \frac{1}{2}\mu_{est.}g\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4v^4}{\mu_{est.}^2 g^2 d^2}}\right]$$

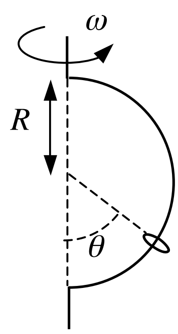
(basta con encontrar las raíces de la ecuación $d^2 a_t^2 - \mu_{est.} g d^2 a_t + v^4 = 0$ y verificar que $d^2 a_t^2 - \mu_{est.} g d^2 a_t + v^4 \le 0$ para a_t entre dichos valores).

Como cuanto mayor es la aceleración tangencial menor es el tiempo necesario para alcanzar una determinada velocidad tenemos que el tiempo mínimo necesario para alcanzar una velocidad v será:

$$t_{mín.}(v) = \frac{v}{a_{t\,máx}} = \frac{2v}{\mu_{est.}g}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4v^4}{\mu_{est}^2 g^2 d^2}}\right]^{-1}$$

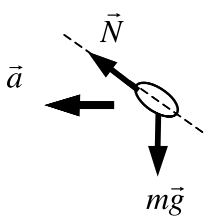
Para la velocidad $v_1 = 2$ m/s que nos dan en el enunciado: $\boxed{t_{mín.}(v_1) = 0.5 \text{ s}}$

Una pequeña arandela de m = 100 g se desliza a lo largo de un alambre de radio R = 10 cm como el de la figura, que gira a razón de ω = 2 rev/s. Calcular el valor de θ para que la arandela quede en equilibrio.



Solución: I.T.I. 04, I.T.T. 00

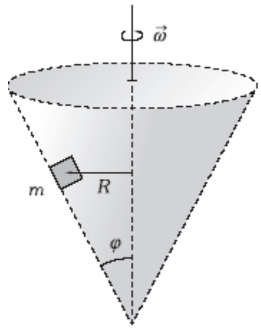
Dibujando el diagrama de fuerzas y planteando la segunda ley de Newton:



$$\left.\begin{array}{l} N\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \dfrac{mg}{\cos\theta} \\ N\,\text{sen}\,\theta = ma_N = m\omega^2 R_{giro} = m\omega^2 R\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$$

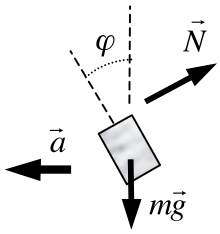
$$\Rightarrow \quad \theta = \text{Ar}\cos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right) = \boxed{51.6^{\text{o}}}$$

El objeto muy pequeño de la figura gira con velocidad angular ω constante y no resbala por la parte interior de un cono de semiángulo φ encontrándose a una distancia R del eje de giro. Si el rozamiento es despreciable determinar el valor que debe tener la frecuencia del movimiento circular para que esto ocurra.



Solución: **I.T.I. 05**

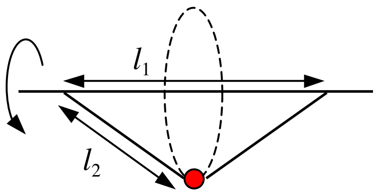
Planteando la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que la aceleración es normal:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a} \\ \\ a = \omega^2 R = 4\pi^2 \nu^2 R \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} N\cos\varphi = 4\pi^2 M \nu^2 R \\ \\ N\,\mathrm{sen}\,\varphi - Mg = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{g}{4\pi^2 \nu^2 R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R\,\mathrm{tg}\varphi}}}$$

Una masa de 4 kg esta sujeta a una barra horizontal, como indica la figura. Las cuerdas están bajo tensión cuando la barra gira alrededor de su eje. Si la velocidad de la masa es constante e igual a 4 m/s. Calcular la tensión de las cuerdas cuando la masa está a) en su punto mas bajo, b) en la posición horizontal y c) en su punto mas alto. Si colocamos la barra vertical y la velocidad de la bola es ahora de 6 m/s, determinar: d) las tensiones de las cuerdas superior e inferior. Datos: $l_1 = 3$ m, $l_2 = 2$ m.



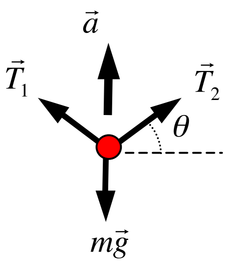
Solución: **I.T.I. 93, I.T.T. 00**

a) Si dibujamos el diagrama de fuerzas y planteamos la segunda ley de Newton teniendo en cuenta que por simetría las dos tensiones van a ser iguales en magnitud:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = m\vec{a} \quad , \quad T_1 = T_2 = T$$

$$\Rightarrow \quad 2T\,\mathrm{sen}\,\theta - mg = ma_N = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{m\left(\dfrac{v^2}{R} + g\right)}{2\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{m\left(\dfrac{v^2}{R} + g\right)}{2R/l_2}$$



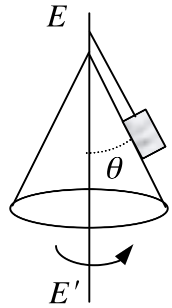
teniendo en cuenta que $R=\sqrt{l_2^2-\left(l_1/2\right)^2}$ sustituyendo:

$$\Rightarrow \quad T == \frac{1}{2} m l_2 \left[v^2 \left(l_2^2 - \left(l_1/2\right)^2 \right)^{-1} + g \left(l_2^2 - \left(l_1/2\right)^2 \right)^{-1/2} \right] = \boxed{66.2\ \mathrm{N}}$$

No está acabado

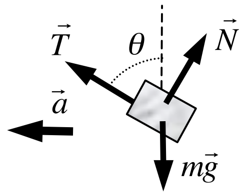
b) asfasf
c) asfas
d) asfasf

El cuerpo P tiene una masa de 5 kg y se encuentra sobre una superficie cónica lisa girando con una velocidad angular de 20 r.p.m. alrededor del eje EE'. Calcular la velocidad lineal del cuerpo y la reacción de la superficie sobre el cuerpo. Calcular la tensión del hilo y la velocidad angular para el caso en que la reacción del plano sea nula. Datos: $\theta = 45^{\circ}$, $L = 0\ 5$ m.



Solución: **I.T.I. 96, 99, 02**

El bloque va a realizar un movimiento circular uniforme (ω constante) en el cual su aceleración es centrípeta, $a = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R}$, con R el radio de la trayectoria circular, que según la figura del enunciado: $R = L\,\mathrm{sen}\theta$. Teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas para el bloque y aplicando la segunda ley de Newton:



$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T\,\mathrm{sen}\theta - N\cos\theta = ma = m\omega^2 R \\ T\cos\theta + N\,\mathrm{sen}\theta - mg = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} N = m\left(g\,\mathrm{sen}\theta - \omega^2 R\cos\theta\right) \\ T = m\left(g\cos\theta + \omega^2 R\,\mathrm{sen}\theta\right) \end{cases}$$

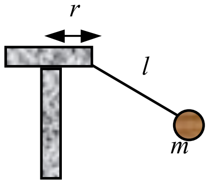
En el primer caso con los datos que nos dan: $v = \omega R = \boxed{0.74\ \mathrm{m/s}}$, $N = \boxed{29.2\ \mathrm{N}}$

En el segundo caso si imponemos que la normal N se anule:

$$m\left(g\,\mathrm{sen}\theta - \omega^2 R\cos\theta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}\mathrm{tg}\theta} = \boxed{5.26\ \mathrm{rad/s} = 50.3\ \mathrm{r.p.m.}}$$

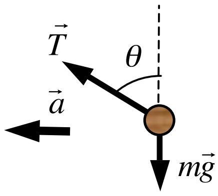
y la tensión del hilo en este caso valdría: $T = \boxed{40.1\ \mathrm{N}}$

¿Cuántas revoluciones por segundo ha de girar el aparato de la figura para que la cuerda forme un ángulo de 45º con la vertical? ¿Cuál será entonces la tensión en la cuerda? Datos: r = 10 cm, l = 20 cm, m = 200 g.



Solución: **I.T.I. 01, I.T.T. 01**

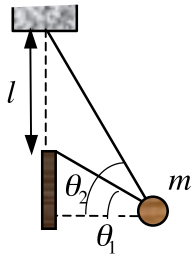
La esfera va a realizar un movimiento circular uniforme (ω constante) en el cual su aceleración es centrípeta, $a = \omega^2 R$, con R el radio de la trayectoria circular, que según la figura del enunciado: $R = r + l\,\text{sen}\theta$. Teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas para la esfera y aplicando la segunda ley de Newton:



$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow$$

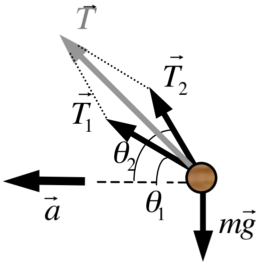
$$\begin{cases} T\,\text{sen}\theta = ma = m\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad \omega = \left(\dfrac{T\,\text{sen}\theta}{mR}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{g\,\text{tg}\theta}{r + l\,\text{sen}\theta}\right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{6.37\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} = 1.01\,\text{rps}} \\[2ex] T\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \dfrac{mg}{\cos\theta} = \boxed{2.77\,\text{N}} \end{cases}$$

Dos alambres están unidos a una esfera como se indica en la figura. Se hace girar la esfera de modo que describa una circunferencia horizontal a velocidad constante v. Determinar el intervalo de valores de v para los cuales ambos alambres permanecen tensos. ¿Para que velocidad ambos alambres soportan la misma tensión? ¿Cuál será el valor de dicha tensión? Datos: m = 5 kg, θ_1 = 30º, θ_2 = 60º, l = 1.2 m.



Solución: **I.T.I. 95, 97, 99, 01, 03, I.T.T. 97, 01**

Si llamamos $\vec{T}$ al vector suma de las dos tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$, el ángulo θ que forma con la horizontal estará comprendido entre θ_1 y θ_2 . La aceleración de la esfera será una aceleración centrípeta dirigida hacia el centro de la trayectoria circular de radio R. Dibujando el diagrama de todas la fuerzas que actúan sobre la esfera y aplicando la segunda ley de Newton:



$$\left.\begin{array}{l}\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \\ \left(\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} T\,\text{sen}\,\theta = mg \\ T\cos\theta = ma = m\dfrac{v^2}{R}\end{array}\right.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones podemos sacar información acerca de la variación de la velocidad de la esfera en función del ángulo θ :

$$\text{tg}\theta = \frac{g}{a} = \frac{gR}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v(\theta) = \left(\frac{gR}{\text{tg}\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta ecuación nos indica que cuanto mayor sea el ángulo menor será la velocidad de la esfera, y al revés, cuanto menor sea el ángulo mayor será la velocidad. La velocidad mínima se alcanzará cuando el ángulo θ valga θ_2 (en esta situación la tensión T_1 será nula) y la máxima cuando valga θ_1 (en este caso se anulará T_2).
El radio R de la trayectoria lo podemos sacar a partir de la figura y de los datos que nos dan en el enunciado del problema:

$$l = R\left(\text{tg}\theta_2 - \text{tg}\theta_1\right) \quad \Rightarrow \quad R = l\left(\text{tg}\theta_2 - \text{tg}\theta_1\right)^{-1}$$

La expresión para la velocidad en función del ángulo quedará:

$$v(\theta) = \left(\frac{gl}{\text{tg}\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\text{tg}\theta_2 - \text{tg}\theta_1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

La velocidad mínima será: $v_{mín.} = v\left(\theta_2\right) = \left(\dfrac{gl}{\text{tg}\,\theta_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\text{tg}\,\theta_2 - \text{tg}\theta_1\right)^{-\frac{1}{2}} = \boxed{2.42\,\text{m/s}}$

La velocidad máxima será: $v_{máx.} = v(\theta_1) = \left(\frac{gl}{\mathrm{tg}\theta_1}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{tg}\theta_2 - \mathrm{tg}\theta_1)^{-\frac{1}{2}} = \boxed{4.20\,\mathrm{m/s}}$

Si las tensiones T_1 y T_2 tuvieran un mismo valor (llamémosle T^*), la suma de ambas, $\vec{T}$, formaría un ángulo con la horizontal intermedio entre θ_1 y θ_2 (llamémosle θ^*):

$$\theta^* = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 45^{\circ}$$

En esta situación la velocidad de la esfera sería:

$$v(\theta^*) = \left(\frac{gl}{\mathrm{tg}\theta^*}\right)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{tg}\theta_2 - \mathrm{tg}\theta_1)^{-\frac{1}{2}} = 3.19\,\mathrm{m/s}$$

Aplicando la segunda ley de Newton para las componentes horizontales:

$$T^*\cos\theta_1 + T^*\cos\theta_2 = m\frac{v(\theta^*)^2}{R} = \frac{mg}{\mathrm{tg}\theta^*} \quad \Rightarrow \quad T^* = \frac{mg}{\mathrm{tg}\theta^*}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^{-1} = \boxed{35.87\,\mathrm{N}}$$

Una carretera tiene 13.8 m de ancho. Calcule la diferencia de nivel entre los bordes de la misma para que un coche sea capaz de tomar la curva a 90 km/h sin derrapar suponiendo que el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo es $\mu = 0.1$ y el radio de la curva es de 300 m.

Solución: I.T.I. 95, 99, 04

El coche va a realizar un movimiento circular uniforme de radio R. Su aceleración será centrípeta, $a = v^2/R$. Si toma la curva con excesiva velocidad va a derrapar hacia el exterior. La fuerza de rozamiento con el suelo se opone a dicho movimiento. Dibujando el diagrama de fuerzas ejercidas sobre el automóvil y planteando la segunda ley de Newton:

$$\vec{N} + \vec{F}_{roz.} + M\vec{g} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N\cos\theta - F_{roz.}\,\mathrm{sen}\theta - Mg = 0 \\ N\,\mathrm{sen}\theta + F_{roz.}\cos\theta = Ma = M\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

La fuerza de rozamiento es estática, no hay derrape. El movimiento del coche se produce a lo largo de una dirección perpendicular al plano de la figura, no en la dirección en la que actúa la fuerza de rozamiento. Esta fuerza tendrá un valor límite $F_{roz.máx.} = \mu N$, con lo que sustituyendo en las ecuaciones anteriores:

$$\left.\begin{array}{r} N\cos\theta - Mg = F_{roz.}\,\text{sen}\,\theta \leq \mu N\text{sen}\,\theta \\ M\dfrac{v^2}{R} = N\,\text{sen}\,\theta + F_{roz.}\cos\theta \leq N\,\text{sen}\,\theta + \mu N\cos\theta \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} N\left(\cos\theta - \mu\,\text{sen}\,\theta\right) \leq Mg & (1) \\ N\left(\mu\cos\theta + \text{sen}\,\theta\right) \geq M\dfrac{v^2}{R} & (2) \end{cases}$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\left(\frac{\cos\theta - \mu\,\text{sen}\,\theta}{\mu\cos\theta + \text{sen}\,\theta}\right) \leq \frac{gR}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1 - \mu\,\text{tg}\,\theta}{\mu + \text{tg}\,\theta}\right) \leq \frac{gR}{v^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}\,\theta \geq \frac{1 - \mu\left(\dfrac{gR}{v^2}\right)}{\mu + \dfrac{gR}{v^2}} \quad \Rightarrow \quad \theta \geq \text{arctg}\left(\frac{v^2}{gR}\right) - \text{arctg}\left(\mu\right) = 6.29^{\circ}$$

Si llamamos l a la anchura de la carretera, el desnivel entre los bordes de ésta será:

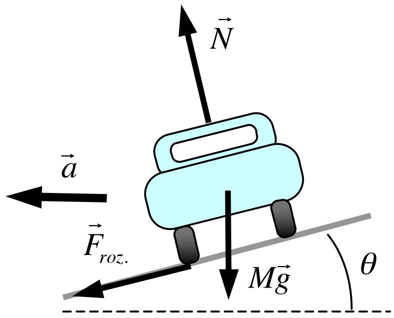
$$d = l\,\text{sen}\,\theta \geq \boxed{1.51 \text{ m}}$$

Un automóvil de 1500 kg toma una curva de 35 m de radio. Si el coeficiente de rozamiento estático $\mu_{est.}$ entre los neumáticos y el suelo es de 0.5, calcular la máxima velocidad que puede llevar el automóvil sin derrapar. Resolver el mismo problema si la curva tiene un peralte de 10º.

Solución: I.T.I. 02, 05, I.T.T. 03

Vamos a resolver el problema suponiendo un peralte y luego concretaremos para los casos que nos piden.

El coche va a realizar un movimiento circular uniforme de radio R. Su aceleración será centrípeta, $a = v^2/R$. Si toma la curva con excesiva velocidad va a derrapar hacia el exterior. La fuerza de rozamiento con el suelo se opone a dicho movimiento. Dibujando el diagrama de fuerzas ejercidas sobre el automóvil y planteando la segunda ley de Newton:



$$\vec{N} + \vec{F}_{roz.} + M\vec{g} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N\cos\theta - F_{roz.}\,\mathrm{sen}\,\theta - Mg = 0 \\ N\,\mathrm{sen}\,\theta + F_{roz.}\cos\theta = Ma = M\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

La fuerza de rozamiento es estática, no hay derrape. El movimiento del coche se produce a lo largo de una dirección perpendicular al plano de la figura, no en la dirección en la que actúa la fuerza de rozamiento. Esta fuerza tendrá un valor límite $F_{roz.máx.} = \mu N$, que lo alcanzará cuando la velocidad sea máxima. En este caso las ecuaciones anteriores se transformarán en:

$$\left.\begin{aligned} N(\cos\theta - \mu\,\mathrm{sen}\,\theta) - Mg = 0 \\ N(\mathrm{sen}\,\theta + \mu\cos\theta) = Ma = M\frac{v_{máx.}^2}{R} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} N &= \frac{Mg}{\cos\theta - \mu\,\mathrm{sen}\,\theta} \\ v_{máx.} &= \left[\left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\,\mathrm{sen}\,\theta}\right)gR\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Vemos en la solución que la velocidad máxima con la que puede tomar el coche la curva no depende de su masa. Para los dos casos que nos piden:

Peralte nulo, $\theta = 0$: $\quad v_{máx.} = \sqrt{\mu g R} = \boxed{13.1\ \mathrm{m/s} = 47.1\ \mathrm{km/h}}$

Peralte $\theta = 10^{\circ}$: $\quad v_{máx.} = \boxed{16.0\ \mathrm{m/s} = 57.4\ \mathrm{km/h}}$

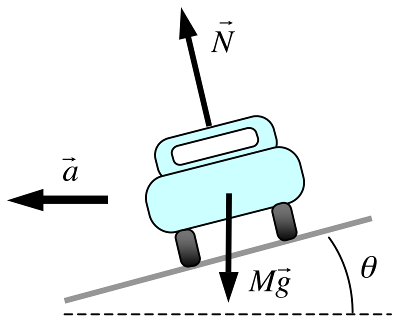
Una carretera está peraltada de modo que un coche desplazándose a 40 km/h puede tomar una curva de 30 m de radio incluso si existe una capa de hielo (equivalente a un coeficiente de fricción prácticamente nulo). Determinar el intervalo de velocidades a que un coche puede tomar esta curva sin derrapar si el coeficiente de fricción estática entre la carretera y las ruedas es de 0.3

Solución: I.T.I. 92, 98, 00, I.T.T. 96, 99, 00, 02, 05

El coche va a realizar un movimiento circular uniforme de radio R. Su aceleración será centrípeta, $a = v^2 / R$. A la velocidad que nos indican toma la curva sin necesidad de rozamiento. Dibujando el diagrama de fuerzas ejercidas sobre el automóvil y planteando la segunda ley de Newton:

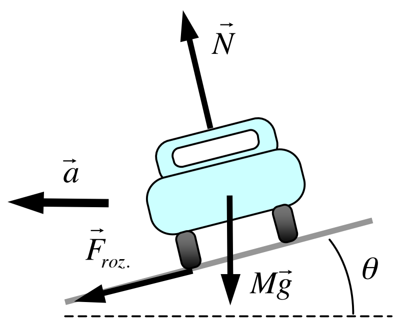
$$\vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} N\cos\theta - Mg = 0 \\ \\ N\,\mathrm{sen}\,\theta = Ma = M\dfrac{v^2}{R} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{v^2}{Rg}\right) = 22^{\circ}\,47' \\ N = \dfrac{Mg}{\cos\theta} \end{array} \right.$$



Esto nos ha permitido calcular la inclinación del peralte.

Si el automóvil toma la curva con excesiva velocidad ($v > 40$ km/h) va a derrapar hacia el exterior. La fuerza de rozamiento con el suelo se opone a dicho movimiento. Dibujando ahora el nuevo diagrama de fuerzas ejercidas sobre el automóvil y planteando la segunda ley de Newton:

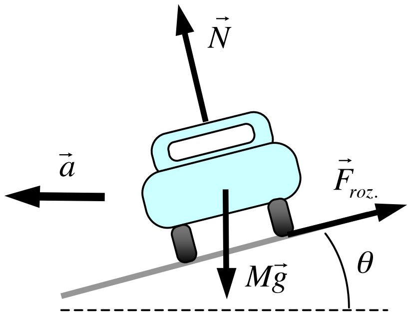


$$\vec{N} + \vec{F}_{roz.} + M\vec{g} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} N\cos\theta - F_{roz.}\,\mathrm{sen}\,\theta - Mg = 0 \\ \\ N\,\mathrm{sen}\,\theta + F_{roz.}\cos\theta = Ma = M\dfrac{v^2}{R} \end{array} \right.$$

La fuerza de rozamiento es estática, no hay derrape. El movimiento del coche se produce a lo largo de una dirección perpendicular al plano de la figura, no en la dirección en la que actúa la fuerza de rozamiento. Esta fuerza tendrá un valor límite $F_{roz.máx.} = \mu N$, que lo alcanzará cuando la velocidad sea máxima. En este caso las ecuaciones anteriores se transformarán en:

$$\left.\begin{array}{r} N(\cos\theta - \mu\,\text{sen}\theta) - Mg = 0 \\ N(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta) = Ma = M\dfrac{v_{máx.}^2}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N = \dfrac{Mg}{\cos\theta - \mu\,\text{sen}\theta} \\ v_{máx.} = \left[\left(\dfrac{\text{sen}\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\,\text{sen}\theta}\right)gR\right]^{\frac{1}{2}} = 56.0 \text{ km/h} \end{array}$$

Si toma la curva con poca velocidad ($v < 40$ km/h) va a derrapar hacia el interior. La fuerza de rozamiento con el suelo se opone a dicho movimiento. Dibujando el diagrama de fuerzas ejercidas sobre el automóvil y planteando la segunda ley de Newton:



$$\vec{N} + \vec{F}_{roz.} + M\vec{g} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N\cos\theta + F_{roz.}\,\text{sen}\theta - Mg = 0 \\ N\,\text{sen}\theta - F_{roz.}\cos\theta = Ma = M\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

Igual que en el caso anterior, la fuerza de rozamiento tendrá un valor límite $F_{roz.máx.} = \mu N$, que lo alcanzará cuando la velocidad sea mínima. En este caso las ecuaciones anteriores se transformarán en:

$$\left.\begin{array}{r} N(\cos\theta + \mu\,\text{sen}\,\theta) - Mg = 0 \\ N(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta) = Ma = M\dfrac{v_{mín.}^2}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N = \dfrac{Mg}{\cos\theta + \mu\,\text{sen}\,\theta} \\ v_{mín.} = \left[\left(\dfrac{\text{sen}\,\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\,\text{sen}\,\theta}\right)gR\right]^{\frac{1}{2}} = 20.1 \text{ km/h} \end{array}$$

Como se puede comprobar las soluciones se corresponden con las encontradas anteriormente salvo por el cambio de signo de los términos que contienen a μ.

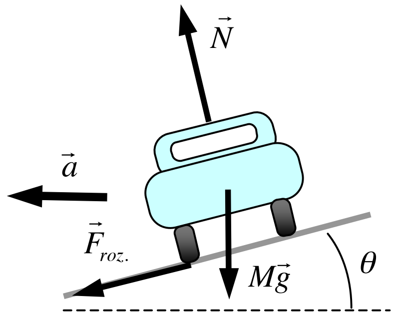
El rango de velocidades para el cual el coche puede tomar la curva sin derrapar será:

$$\boxed{20.1 \text{ km/h} \le v \le 56.0 \text{ km/h}}$$

Un automóvil da vueltas sobre una curva peraltada. El radio de curvatura de la carretera es R. El ángulo de peralte es θ, y el coeficiente de rozamiento es μ. a) Determinar la gama de velocidades que puede tener el vehículo sin derrapar. b) Determinar el valor mínimo de μ para que la rapidez mínima sea nula. c) Resolver el primer apartado si R = 100 m, θ = 15º y $\mu = 0.1$

Solución: **I.T.I. 01, 03, I.T.T. 01, 04**

a) El coche va a realizar un movimiento circular uniforme de radio R. Su aceleración será centrípeta, $a = v^2/R$. Si toma la curva con excesiva velocidad va a derrapar hacia el exterior. La fuerza de rozamiento con el suelo se opone a dicho movimiento. Dibujando el diagrama de fuerzas ejercidas sobre el automóvil y planteando la segunda ley de Newton:

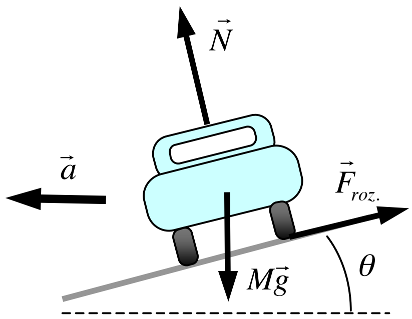


$$\vec{N} + \vec{F}_{roz.} + M\vec{g} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N\cos\theta - F_{roz.}\,\text{sen}\theta - Mg = 0 \\ N\,\text{sen}\theta + F_{roz.}\cos\theta = Ma = M\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

La fuerza de rozamiento es estática, no hay derrape. El movimiento del coche se produce a lo largo de una dirección perpendicular al plano de la figura, no en la dirección en la que actúa la fuerza de rozamiento. Esta fuerza tendrá un valor límite $F_{roz.máx.} = \mu N$, que lo alcanzará cuando la velocidad sea máxima. En este caso las ecuaciones anteriores se transformarán en:

$$\left.\begin{array}{r} N(\cos\theta - \mu\,\text{sen}\theta) - Mg = 0 \\ N(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta) = Ma = M\dfrac{v_{máx.}^2}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} N = \dfrac{Mg}{\cos\theta - \mu\,\text{sen}\,\theta} \\ v_{máx.} = \left[\left(\dfrac{\text{sen}\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\,\text{sen}\theta}\right) gR\right]^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Si toma la curva con poca velocidad va a derrapar hacia el interior. La fuerza de rozamiento con el suelo se opone a dicho movimiento. Dibujando el diagrama de fuerzas ejercidas sobre el automóvil y planteando la segunda ley de Newton:



$$\vec{N} + \vec{F}_{roz.} + M\vec{g} = M\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N\cos\theta + F_{roz.}\,\text{sen}\theta - Mg = 0 \\ N\,\text{sen}\theta - F_{roz.}\cos\theta = Ma = M\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

Igual que en el caso anterior, la fuerza de rozamiento tendrá un valor límite $F_{roz.máx.} = \mu N$, que lo alcanzará cuando la velocidad sea mínima. En este caso las ecuaciones anteriores se transformarán en:

$$\left.\begin{aligned} N\left(\cos\theta + \mu \operatorname{sen}\theta\right) - Mg = 0 \\ N\left(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta\right) = Ma = M\frac{v_{mín.}^2}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} N &= \frac{Mg}{\cos\theta + \mu \operatorname{sen}\theta} \\ v_{mín.} &= \left[\left(\frac{\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta}\right) gR\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Como se puede comprobar las soluciones se corresponden con las encontradas anteriormente salvo por el cambio de signo de los términos que contienen a μ.

El rango de velocidades para el cual el coche puede tomar la curva sin derrapar será:

$$\boxed{\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta}\right) gR\right]^{\frac{1}{2}} \leq v \leq \left[\left(\frac{\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta}\right) gR\right]^{\frac{1}{2}}}$$

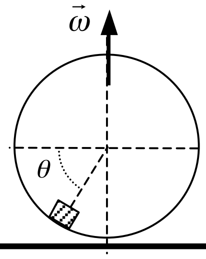
b) Si la velocidad mínima es nula tendremos que:

$$\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta}\right) gR\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \operatorname{tg}\theta}$$

c) Con los datos que nos dan el rango de valores para la velocidad será:

$$\boxed{12.66 \text{ m/s} \leq v \leq 18.82 \text{ m/s}}$$

En el interior de una esfera hueca de radio R, que gira con una velocidad angular constante ω se halla un objeto pequeño como se indica en la figura. Si el coeficiente de rozamiento estático es μ y el ángulo θ es también conocido, determinar los valores de ω para que el objeto no se deslice.



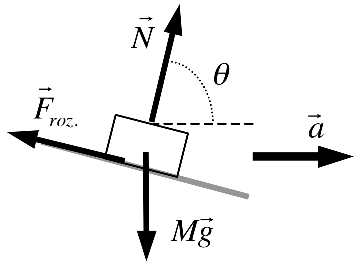
Solución: **I.T.I. 98, 99, 00, 04, I.T.T. 97, 99, 02, 05**

Dependiendo de si ω es demasiado grande, de forma que el objeto tendería a subir por la superficie esférica disminuyendo θ, o demasiado pequeña, el objeto tendería a bajar por la superficie esférica aumentando θ, la fuerza de rozamiento del objeto con la superficie se orientará de forma de evitar dicho movimiento intentando que el objeto mantenga su posición angular θ.

Para una velocidad ω pequeña:

$$\vec{N} + \vec{F}_{roz.} + M\vec{g} = M\vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N\,\text{sen}\theta + F_{roz.}\cos\theta - Mg = 0 \\ \\ N\cos\theta - F_{roz.}\,\text{sen}\,\theta = Ma = M\omega^2 R\cos\theta \end{cases}$$



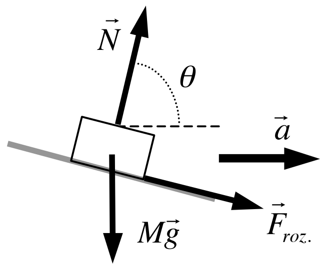
La fuerza de rozamiento es estática, no hay derrape. El movimiento del objeto se produce a lo largo de una dirección perpendicular al plano de la figura, no en la dirección en la que actúa la fuerza de rozamiento. Esta fuerza tendrá un valor límite $F_{roz.máx.} = \mu N$, que lo alcanzará cuando la velocidad sea mínima. En este caso las ecuaciones anteriores se transformarán en:

$$\left.\begin{array}{r} N(\text{sen}\theta + \mu\cos\theta) - Mg = 0 \\ \\ N(\cos\theta - \mu\,\text{sen}\theta) = Ma = M\omega_{mín.}^2 R\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\cos\theta - \mu\,\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta + \mu\cos\theta} = \frac{\omega_{mín.}^2 R\cos\theta}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{mín.} = \left[\left(\frac{1 - \mu\,\text{tg}\,\theta}{\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta}\right)\frac{g}{R}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Para una velocidad ω grande:

$$\vec{N} + \vec{F}_{roz.} + M\vec{g} = M\vec{a}$$



$$\Rightarrow \quad \begin{cases} N\operatorname{sen}\theta - F_{roz.}\cos\theta - Mg = 0 \\ \\ N\cos\theta + F_{roz.}\operatorname{sen}\theta = Ma = M\omega^2 R\cos\theta \end{cases}$$

Igual que en el caso anterior, la fuerza de rozamiento tendrá un valor límite $F_{roz.máx.} = \mu N$, que lo alcanzará cuando la velocidad sea máxima. En este caso las ecuaciones anteriores se transformarán en:

$$\left.\begin{array}{r} N(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - Mg = 0 \\ \\ N(\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta) = Ma = M\omega^2_{mín.}R\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\cos\theta + \mu\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta} = \frac{\omega^2_{mín.}R\cos\theta}{g}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_{mín.} = \left[\left(\frac{1 + \mu\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta}\right)\frac{g}{R}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

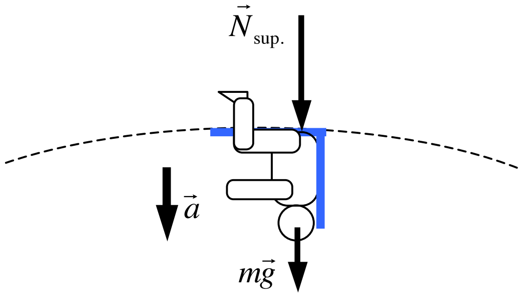
Para cualquier valor de ω entre estos dos valores el cuerpo no deslizará.

Un piloto de masa m que vuela en un avión a reacción ejecuta una maniobra de rizar el rizo. Si el avión se mueve a una velocidad cte. de 225 m/s determinar el peso aparente del piloto en la parte superior e inferior del rizo si el radio de éste es de 1 km.

Solución: **I.T.I. 02, 05, I.T.T. 03**

El movimiento del caza es un movimiento circular uniforme con lo que en todo momento su aceleración es normal a la trayectoria, $a = v^2/R$.

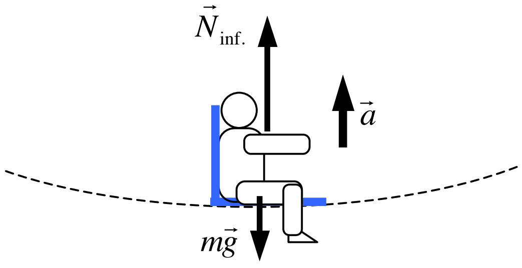
Cuando se encuentre en la parte más alta del rizo el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el piloto será:



$$N_{\text{sup.}} + mg = ma = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad N_{\text{sup.}} = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) = \boxed{4.2\ mg}$$

Cuando se encuentre en la parte más baja del rizo el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el piloto será:



$$N_{\text{inf.}} - mg = ma = m\frac{v^2}{R}$$

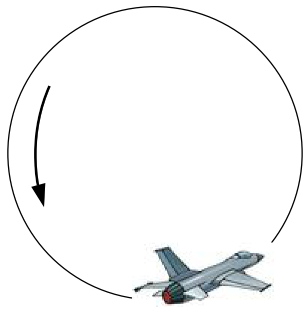
$$\Rightarrow \quad N_{\text{inf.}} = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right) = \boxed{6.2\ mg}$$

El piloto de un avión se lanza en picado a la velocidad de 400 km/h y termina su descenso describiendo, a aquella velocidad, un arco de circunferencia situado en el plano vertical. ¿Cuál será el mínimo radio de esa circunferencia para que la aceleración en el punto más bajo no exceda de $7g$?¿Cuál será entonces el peso aparente del aviador en el punto más bajo de la trayectoria? Analizar el problema tanto desde el punto de vista de un observador inercial como de uno no inercial.

Solución: **I.T.I. 94, I.T.T. 95, I.I. 94**

Texto solución

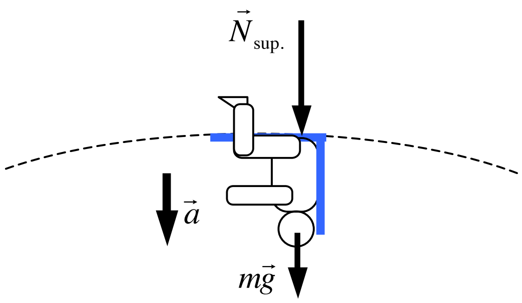
El protagonista de "Top Gun" está haciendo unas maniobras aéreas con su caza a reacción con una rapidez constante de 1000 km/h. Determinar: a) si realiza un rizo con R = 400 m ¿cual sería el peso del piloto en la parte superior e inferior del rizo si tuviese en ese mismo momento una balanza para pesarse? b) si estos pilotos de combate están entrenados para resistir aceleraciones de hasta 7g (para aceleraciones mayores perderían la consciencia) ¿cuál es el radio de giro mínimo del rizo que puede hacer con su avión?



Solución: **I.T.I. 92, 98, 99, 04, I.T.T. 96, 99, 02, 05**

El movimiento del caza es un movimiento circular uniforme con lo que en todo momento su aceleración es normal a la trayectoria, $a = v^2/R$.

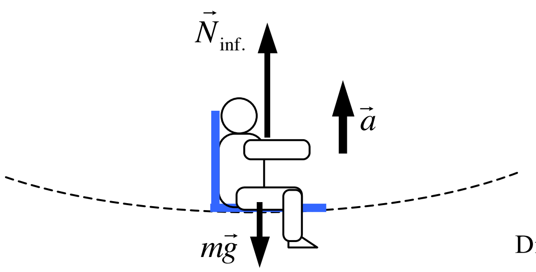
a) Cuando se encuentre en la parte más alta del rizo el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el piloto será:



$$N_{\text{sup.}} + mg = ma = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad N_{\text{sup.}} = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) = \boxed{18.7\ mg}$$

Cuando se encuentre en la parte más baja del rizo el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el piloto será:



$$N_{inf.} - mg = ma = m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad N_{inf.} = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right) = \boxed{20.7\, mg}$$

b) Si nuestro piloto puede soportar "sólo" hasta siete veces su propio peso (en el ejemplo del apartado anterior el piloto hubiese muerto aplastado contra el asiento) y visto que se siente más pesado en la parte inferior del rizo el radio mínimo para dicha maniobra será:

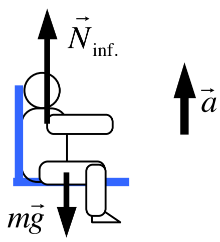
$$m\left(\frac{v^2}{R} + g\right) \le 7mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{R \ge R_{mín.} = \frac{v^2}{6g} = 1312 \text{ m}}$$

El radio de una noria de feria mide 5 m y da una vuelta en 10 s. a) Hállese la diferencia entre los pesos aparentes de un pasajero en los puntos más bajo y más alto, expresada como fracción de peso. b) ¿Cuál debería ser el tiempo correspondiente a una vuelta para que el peso aparente en el punto más alto fuese nulo? c) ¿Cuál sería entonces el peso aparente en el punto inferior?

Solución: I.T.I. 01, I.T.T. 01, 04

a) El pasajero está realizando un movimiento circular uniforme. La aceleración que sufre es una aceleración centrípeta: $a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$

Cuando el pasajero se encuentre en la parte inferior, el diagrama de fuerzas es el que se muestra en la figura. Aplicando la segunda ley de Newton podemos calcular el valor de la fuerza normal, que mide el peso aparente de la persona:

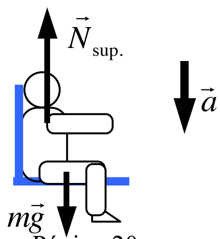


$$\vec{N}_{inf.} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad N_{inf.} - mg = ma = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$\Rightarrow \quad N_{inf.} = mg + m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \left[1 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{g}\right] mg = 1.20\, mg$$

El pasajero se siente un 20% más pesado.

En el caso de que el pasajero se encuentre en la parte superior:



$$\vec{N}_{sup.} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad mg - N_{sup.} = ma = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$\Rightarrow \quad N_{sup.} = mg - m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \left[1 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{g}\right] mg = 0.80\, mg$$

El pasajero se siente un 20% más ligero.

La diferencia entre los dos pesos aparentes será: $N_{inf.} - N_{sup.} = \boxed{0.40\, mg}$

b) Tomando la expresión para $N_{sup.}$ y anulándola para un periodo de rotación T':

$$\left[1 - \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 \frac{R}{g}\right] mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \boxed{4.49\,\mathrm{s}}$$

c) En este caso el peso aparente en la posición inferior será:

$$N'_{sup.} = \left[1 + \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 \frac{R}{g}\right] mg = \boxed{2.00\, mg}$$

Una masa de 0.4 kg está atada al extremo de una cuerda, sujetado el otro extremo por una persona que hace girar la piedra en un círculo horizontal de radio 0.8 m a una velocidad angular de 80 r.p.m. ¿Cuál es la tensión de la cuerda? Si la cuerda se rompe cuando la tensión es de 500 N ¿cuál es la máxima velocidad angular posible? ¿Podemos ignorar el peso de la piedra?

Solución: I.T.I. 95

Texto solución

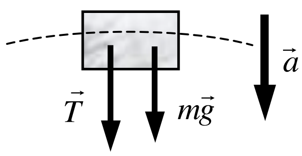
Un electrón de un átomo de hidrógeno gira alrededor del protón en una trayectoria casi circular de radio $0.5{\cdot}10^{-10}$ m con una velocidad de $2.2{\cdot}10^{6}$ m/s. Calcular la fuerza entre ambas partículas.

Solución: I.T.I. 95

Texto solución

Un bloque de masa 1 kg situado en el extremo de una cuerda se hace dar vueltas en un circulo vertical de radio 1 m. Hallar la velocidad critica por debajo de la cual la cuerda se afloja al estar en el punto más alto. Para este caso, ¿cuál es la velocidad en la parte inferior del círculo?

Solución: **I.T.I. 02, 05, I.T.T. 04**

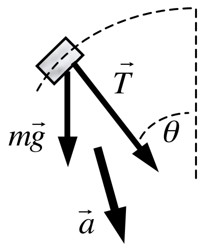


El bloque va a realizar un movimiento circular de radio R. Dibujando el diagrama de fuerzas cuando se encuentra en la parte más alta del círculo vemos que su aceleración va a ser vertical y por lo tanto sólo tendrá componente normal $a_n = v^2/R$. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad T + mg = ma = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad T = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

Para la velocidad crítica la cuerda pierde su tensión:

$$m\left(\frac{v_{crítica}^2}{R} - g\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{crítica} = \sqrt{gR}}$$



Si dibujamos el diagrama de fuerzas en un momento en el que la cuerda forme un ángulo θ con la vertical la componente tangencial de la aceleración será:

$$mg\,\text{sen}\,\theta = ma_t = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g\,\text{sen}\,\theta$$

Teniendo en cuenta la relación entre la velocidad lineal y la angular $v = \omega R$:

$$R\frac{d\omega}{dt} = g\,\text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\omega}{d\theta} = g\,\text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad R\omega\frac{d\omega}{d\theta} = g\,\text{sen}\,\theta$$

Separando variables e integrando teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento $\left(\omega_{crítica} = \frac{v_{crítica}}{R} \text{ para } \theta = 0\right)$ obtendremos la velocidad angular en función del ángulo:

$$\int_{\omega_{crítica}}^{\omega} R\omega\,d\omega = \int_0^{\theta} g\,\text{sen}\,\theta\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{1}{2}R\omega^2\right]_{\omega_{crítica}}^{\omega} = -g\cos\theta\Big]_0^{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \omega(\theta) = \left[\omega_{crítica}^2 + \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)\right]^{1/2}$$

La velocidad lineal del bloque en función del ángulo será entonces:

$$v(\theta) = \omega(\theta) R = \left[v_{crítica}^2 + 2gR(1 - \cos\theta) \right]^{1/2}$$

Y cuando se encuentre en la parte inferior de su trayectoria, $\theta = 180^{o}$:

$$v_{inferior} = \left[v_{crítica}^2 + 4gR \right]^{1/2} = \boxed{\sqrt{5gR}}$$