

CALCULO DE MOMENTOS DE INERCIA

Se unen cuatro partículas de masa m mediante varillas sin masa, formando un rectángulo de lados $2a$ y $2b$. El sistema gira alrededor de un eje en el plano de la figura que pasa por su centro. a) Hallar el momento de inercia respecto de este eje. b) Hallar el I respecto de un eje paralelo al anterior que pase por las masas. c) Hallar el I respecto a un eje perpendicular al anterior y que pase por una masa.

Solución: I.T.I. 02

- a) Si aplicamos la definición de momento de inercia: $I = \sum_i m_i R_i^2$ tenemos que:

$$I_x = 4mb^2 \quad , \quad I_y = 4ma^2$$

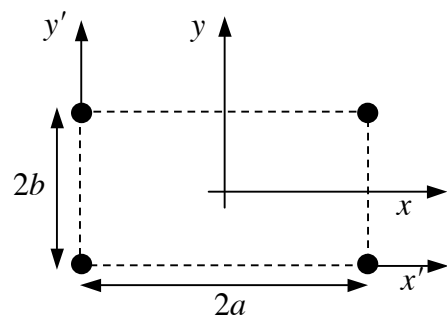
- b) Para calcular el momento de inercia respecto de los nuevos ejes podemos hacerlo aplicando la fórmula anterior o utilizando el teorema de Steiner:

$$\left. \begin{array}{l} I_{x'} = I_x + 4mb^2 \\ I_{y'} = I_y + 4ma^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I_{x'} = 8mb^2 \quad , \quad I_{y'} = 8ma^2$$

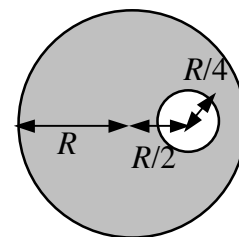
- c) El momento de inercia respecto de un eje perpendicular al plano de la figura y que pase por una de las masas (eje z') será:

$$I_{z'} = 0 + m(2a)^2 + m(2b)^2 + m[(2a)^2 + (2b)^2] = 8m(a^2 + b^2)$$

Lo cual podríamos haber calculado teniendo en cuenta que todas las partículas de nuestro sistema se encuentran en un plano y podemos aplicar el teorema de los ejes perpendiculares: $I_{z'} = I_{x'} + I_{y'}$.

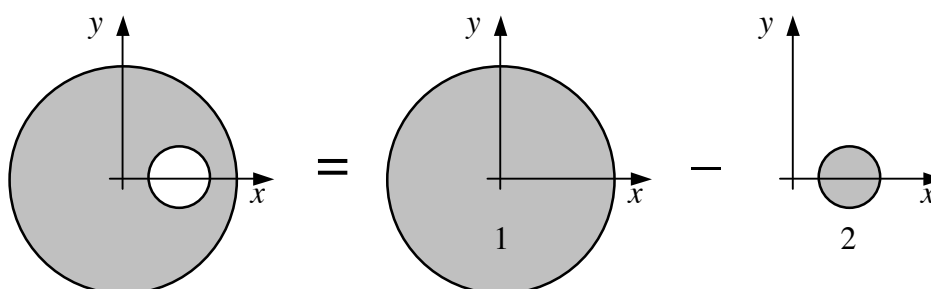


Calcular el momento de inercia respecto de un eje que pase por su centro de un disco de radio R y masa M al cual se le practica un agujero circular de radio $R/4$ centrado a una distancia $R/2$ del centro del disco.



Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 04

Podemos tratar dicho disco como la contribución de dos piezas:



El momento de inercia respecto del eje Z de la pieza 1 será:

$$I_{z,1} = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 = \frac{1}{2} (\sigma \pi R_1^2) R_1^2 = \frac{1}{2} \sigma \pi R_1^4 = \frac{1}{2} \sigma \pi R^4$$

Si llamamos Z' a un eje paralelo al eje Z y que pase por el centro de la pieza 2 utilizando el teorema de Steiner podemos calcular su momento de inercia respecto del eje Z :

$$\begin{aligned} I_{z,2} &= I_{z',2} + M_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 + M_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} (\sigma \pi R_2^2) R_2^2 + (\sigma \pi R_2^2) \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sigma \pi R_2^4 + (\sigma \pi R_2^2) \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \sigma \pi \left[\frac{R}{4}\right]^4 + \left(\sigma \pi \left[\frac{R}{4}\right]^2\right) \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{512}\right) \sigma \pi R^4 \end{aligned}$$

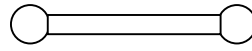
El momento de inercia de toda la placa será:

$$I_z = I_{z,1} - I_{z,2} = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 - \frac{9}{512} \rho \pi R^4 = \frac{247}{512} \rho \pi R^4$$

Finalmente calculando el valor de la densidad superficial σ y sustituyendo:

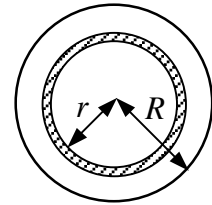
$$\sigma = \frac{M_{placa}}{A_{placa}} = \frac{M_{placa}}{\pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2} = \frac{16}{15} \left(\frac{M_{placa}}{\pi R^2}\right) \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{247}{480} M_{placa} R^2}$$

Calcular los momentos de inercia respecto a su eje de simetría de los siguientes cuerpos: a) esfera homogénea, b) cilindro hueco de paredes delgadas, c) cilindro homogéneo hueco de radio interior a y exterior b , d) sistema formado por una barra cilíndrica de radio R y longitud L unida a dos esferas de radio $2R$.



Solución: I.T.I. 02

- a) Coloquemos nuestro origen de coordenadas en el centro de la esfera. Si dividimos nuestra esfera en diferenciales de masa dm con forma de coraza esférica de radio r y espesor dr , todos los puntos de dicho dm se encuentran a la misma distancia del centro, por lo tanto si calculamos el momento de inercia polar de la esfera respecto de dicho centro nos dará:



$$I_O = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 4\pi r^2 dr = \rho 4\pi \frac{R^5}{5} = \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right) 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2$$

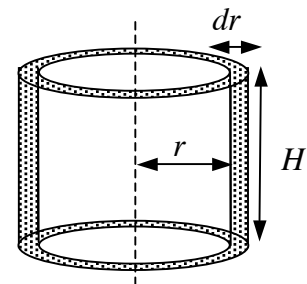
Por simetría el momento de inercia respecto de los tres ejes coordenados X, Y y Z tiene el mismo valor $I_x = I_y = I_z$, y además se verifica que:

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O \quad \Rightarrow \quad I_x = I_y = I_z = \boxed{\frac{2}{5} MR^2}$$

- b) En el cilindro hueco de paredes delgadas todos sus puntos se encuentran a la misma distancia del eje de simetría, con lo que su momento de inercia respecto de dicho eje será:

$$\boxed{I = MR^2}$$

- c) En el caso del cilindro de radio interno a y externo b podemos dividirlo en corazas cilíndricas de radio r y espesor dr (todos los puntos de una de estas corazas se encuentran a la misma distancia del eje de giro). Llamando H a la altura del cilindro, su momento de inercia será:



$$I = \int r^2 dm = \int_a^b r^2 \rho 2\pi r H dr = \rho 2\pi H \frac{1}{4} (b^4 - a^4) =$$

$$= \left(\frac{M}{\pi(b^2 - a^2)H} \right) 2\pi H \frac{1}{4} (b^4 - a^4) = \boxed{\frac{1}{2} M(b^2 + a^2)}$$

- d) En este caso nuestro objeto se puede descomponer en un cilindro y dos esferas casi completas. El momento de inercia de dicho objeto será por lo tanto la suma de los momentos de inercia de las tres piezas: $I_z = I_{z,cilindro} + 2I_{z,esfera}$.

Para el cilindro podemos calcular su momento de inercia de forma similar a como hicimos en el apartado anterior. Utilizando la fórmula anterior y haciendo la sustitución $b = R$ y $a = 0$, tenemos que:

$$I_{cilindro} = \frac{1}{2} M_{cilindro} R^2 = \frac{1}{2} (\rho \pi R^2 L) R^2 = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 L.$$

Para el cálculo del momento de inercia de las dos piezas esféricas dividámoslas en rodajas de espesor dz y radio r como se muestra en la figura. La relación entre r y z es:

$$r^2 + z^2 = (2R)^2 \Rightarrow r^2 = 4R^2 - z^2$$

La cantidad de masa contenida en una de las rodajas será:

$$dm = \rho \pi r^2 dz$$

Y la contribución de cada rodaja, considerada como un disco, al momento de inercia respecto del eje de simetría será:

$$dI_{z,rodaja} = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dz = \frac{1}{2} \rho \pi (4R^2 - z^2)^2 dz$$

El momento de inercia de la pieza esférica será:

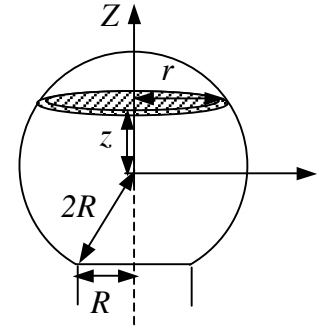
$$\begin{aligned} I_z &= \int dI_{z,rodaja} = \int_{z_{\min.}}^{z_{\max.}} \frac{1}{2} \rho \pi (4R^2 - z^2)^2 dz = \int_{-\sqrt{3}R}^{2R} \frac{1}{2} \rho \pi (16R^4 - 8R^2 z^2 + z^4) dz = \\ &= \frac{1}{2} \rho \pi \left(16R^4 z - \frac{8}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{-\sqrt{3}R}^{2R} = \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \left(\frac{256}{15} + \frac{49}{5} \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

La masa de esta pieza esférica será:

$$\begin{aligned} M_{esfera} &= \int dm_{rodaja} = \int_{z_{\min.}}^{z_{\max.}} \rho \pi (4R^2 - z^2) dz = \\ &= \rho \pi \left(4R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_{-\sqrt{3}R}^{2R} = \rho \pi R^3 \left(\frac{16}{3} + 3\sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

El momento de inercia de todo el objeto será:

$$I_z = I_{z,cilindro} + 2I_{z,esfera} = \rho \pi R^4 \left\{ \frac{L}{2} + \left(\frac{256}{15} + \frac{49}{5} \sqrt{3} \right) R \right\}$$



Que se puede escribir en función de la masa del objeto sustituyendo la densidad en función de ésta:

$$M = M_{\text{cilindro}} + 2M_{\text{esfera}} = \rho\pi R^2 \left\{ L + \left(\frac{32}{3} + 6\sqrt{3} \right) R \right\}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{M}{\pi R^2 \left\{ L + \left(\frac{32}{3} + 6\sqrt{3} \right) R \right\}}$$

$$\Rightarrow I_z = \left\{ \frac{\frac{L}{2} + \left(\frac{256}{15} + \frac{49}{5}\sqrt{3} \right) R}{L + \left(\frac{32}{3} + 6\sqrt{3} \right) R} \right\} MR^2$$

Si hubiésemos considerado desde el principio esferas completas el resultado no hubiese diferido mucho del anterior (como se puede comprobar dando valores para L y R) y vendría dado por:

$$I_z = \left\{ \frac{\frac{L}{2} + \frac{512}{15}R}{L + \frac{64}{3}R} \right\} MR^2$$

Calcular el momento de inercia de una esfera hueca respecto a un eje que pasa por su centro.

Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.I. 04

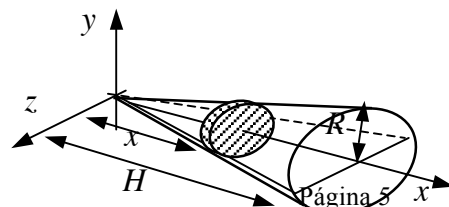
Coloquemos nuestro origen de coordenadas en el centro de la esfera. Todos los puntos de la esfera se encuentran a la misma distancia de dicho centro, por lo tanto si calculamos su momento de inercia polar respecto de dicho punto nos dará: $I_O = MR^2$. Por simetría el momento de inercia respecto de los tres ejes coordenados X , Y y Z tiene el mismo valor $I_x = I_y = I_z$, y además se verifica que:

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O \quad \Rightarrow \quad I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}MR^2$$

Determinese el momento de inercia de un cono circular recto respecto a: a) su eje longitudinal, b) un eje que pasa por el vértice del cono y es perpendicular a su eje longitudinal, c) un eje que pasa por el centro de gravedad del cono y es perpendicular a su eje longitudinal.

Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 04

Orientemos el eje X de forma que sea el eje longitudinal del cono, como se muestra en la figura. Dividamos al cono en rodajas circulares de espesor dx y radio r . La relación entre r y x es:



$$\frac{r}{x} = \frac{R}{H} \Rightarrow r = \left(\frac{R}{H}\right) x$$

La cantidad de masa contenida en una de las rodajas será:

$$dm = \rho \pi r^2 dx = \rho \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 x^2 dx$$

- a) El momento de inercia del cono será igual a la suma de los momentos de inercia de todas las rodajas:

$$I_x = \int dI_x = \int \frac{1}{2} dm r^2 = \int_0^H \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{R}{H}\right)^4 x^4 dx = \frac{1}{10} \rho \pi R^4 H$$

Para escribir el resultado en función de la masa del cono:

$$M = \int dm = \int_0^H \rho \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \rho \pi R^2 H \Rightarrow \rho = \frac{3M}{\pi R^2 H}$$

Sustituyendo en la expresión del momento de inercia:

$$I_x = \frac{3}{10} MR^2$$

- b) Calculemos ahora el momento de inercia respecto del eje Y . Consideremos primeramente unos ejes Y' y Z' contenidos en el plano de cada rodaja y paralelos respectivamente a los ejes Y y Z . Para cada rodaja tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{por simetría: } dI_{y'} = dI_{z'} \\ \text{teorema de los ejes perp.: } dI_x = dI_{y'} + dI_{z'} \end{array} \right\} \Rightarrow dI_{y'} = dI_{z'} = \frac{1}{2} dI_x = \frac{1}{4} dm r^2$$

Utilizando el teorema de Steiner podemos calcular el momento de inercia de cada rodaja respecto del eje Y :

$$dI_y = dI_{y'} + dm x^2 = \frac{1}{4} \rho \pi \left(\frac{R}{H}\right)^4 x^4 dx + \rho \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 x^4 dx = \rho \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{R}{H}\right)^2 + 1 \right] x^4 dx$$

El momento de inercia del cono respecto del eje Y será:

$$I_y = \int dI_y = \int_0^H \rho \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{R}{H}\right)^2 + 1 \right] x^4 dx =$$

$$= \frac{1}{5} \rho \pi R^2 \left[\frac{1}{4} R^2 + H^2 \right] H = \boxed{\frac{3}{5} M \left[\frac{1}{4} R^2 + H^2 \right]}$$

- c) Consideremos un eje $Y_{C.M.}$ paralelo al eje Y y que pase por el C.M. del cono. Sabiendo que el C.M. del cono se encuentra a una distancia de su vértice de tres cuartos de su altura y aplicando el teorema de Steiner:

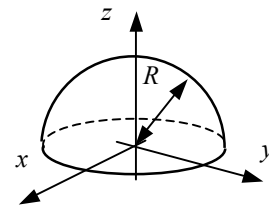
$$I_y = I_{y_{C.M.}} + M \left(\frac{3}{4}H\right)^2 \Rightarrow \boxed{I_{y_{C.M.}} = \frac{3}{20} M \left[R^2 + \frac{1}{4} H^2 \right]}$$

Dada la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$. Calcular sus momentos de inercia I_x, I_y e I_z

Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 04

Para una esfera completa tenemos que el momento de inercia respecto de cualquier eje que pase por su centro es:

$$I_{x,esfera} = I_{y,esfera} = I_{z,esfera} = \frac{2}{5} M_{esfera} R^2$$



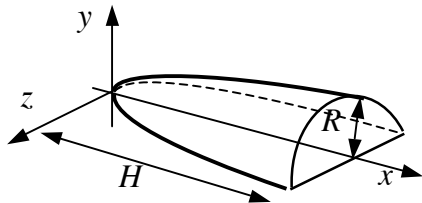
Cada semiesfera contribuye de igual forma al momento de inercia de la esfera completa, por lo tanto:

$$I_{x,semiesfera} = I_{y,semiesfera} = I_{z,semiesfera} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} M_{esfera} R^2 \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} M_{esfera} \right) R^2 = \boxed{\frac{2}{5} M_{semiesfera} R^2}$$

Es decir la expresión matemática resulta ser la misma, dos quintos de la masa por el radio al cuadrado, pero teniendo en cuenta que ahora la masa de nuestra pieza es la de una semiesfera, no la de la esfera completa.

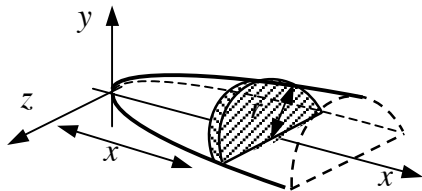
Calcular el centro de masas de medio paraboloides ($y \geq 0$) de revolución alrededor del eje X , cuyo radio en la base es R , la altura es H , y su vértice se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular sus momentos de inercia I_x, I_y e I_z . Si Y' es un eje paralelo al eje Y pero que pasa por la base del paraboloides, calcular $I_{y'}$.

Solución: I.T.I. 04, I.T.T. 01, 04



Sea el semiparaboloides de la figura orientado a lo largo del eje X , de altura H y radio R . Dado que el plano XY es un plano de simetría que divide al semiparaboloides en dos mitades simétricas, el C.M. se encontrará en dicho plano, con lo cual la coordenada z del C.M. será nula:

$$z_{C.M.} = 0$$



Para el cálculo de la coordenada x del C.M. dividimos al semiparaboloides en rodajas en forma de semidiscos de radio r y espesor dx . La ecuación del paraboloides nos da la relación entre la coordenada x y el radio r de los semidiscos:

$$\left. \begin{array}{l} x = kr^2 \\ H = kR^2 \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{H}{R^2} \Rightarrow r = \left(\frac{R^2}{H} x \right)^{\frac{1}{2}}$$

El volumen de cada uno de los semidiscos será:

$$dV = \frac{1}{2} \pi r^2 dx = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{R^2}{H} x \right) dx$$

El volumen total del semiparaboloides será:

$$V = \int dV = \int_0^H \frac{1}{2} \pi \left(\frac{R^2}{H} x \right) dx = \frac{1}{4} \pi R^2 H$$

La coordenada x del C.M. será:

$$\int x dV = \int_0^H \frac{1}{2} \pi \left(\frac{R^2}{H} x \right) x^2 dx = \frac{1}{6} \pi R^2 H^2$$

$$\Rightarrow x_{C.M.} = \frac{\int x dV}{\int dV} = \frac{2}{3} H$$

Para la coordenada y del C.M. vamos a utilizar los mismos diferenciales de volumen del cálculo anterior, a pesar de que todos sus puntos no tengan la misma coordenada y. Sabiendo que el C.M. de un semicírculo de radio r se encuentra a una distancia $\frac{4r}{3\pi}$ del diámetro, vamos a tomar esta posición como la representativa de cada una de las rodajas utilizadas en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} \int y_{\text{semidisco}} dV &= \int_0^H \left(\frac{4r}{3\pi}\right) dV = \int_0^H \left(\frac{4r}{3\pi}\right) \frac{1}{2} \pi r^2 dx = \\ &= \int_0^H \frac{2}{3} r^3 dx = \int_0^H \frac{2}{3} \left(\frac{R^2}{H} x\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{15} R^3 H \\ \Rightarrow y_{C.M.} &= \frac{\int y_{\text{semidisco}} dV}{\int dV} = \boxed{\frac{16R}{15\pi}} \end{aligned}$$

Vamos a calcular ahora los momentos de inercia del semiparaboloide. Para simplificar los cálculos vamos a realizarlos para el paraboloide completo y después dividiremos por dos. Si dividimos el paraboloide en rodajas de espesor dx (igual que hacíamos en los cálculos anteriores pero ahora las rodajas son círculos completos) la cantidad de masa contenida en una de las rodajas será:

$$dm = \rho \pi r^2 dx = \rho \pi \left(\frac{R^2}{H} x\right) dx$$

su momento de inercia respecto del eje X será la suma de los momentos de inercia de todas las rodajas:

$$I_{x, \text{parab.}} = \int dI_x = \int \frac{1}{2} dmr^2 = \int_0^H \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{R^4}{H^2}\right) x^2 dx = \frac{1}{6} \rho \pi R^4 H$$

Para escribir el resultado en función de la masa del paraboloide:

$$M_{\text{parab.}} = \int dm = \int_0^H \rho \pi \left(\frac{R^2}{H} x\right) dx = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 H \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{2M}{\pi R^2 H}$$

Sustituyendo en la expresión del momento de inercia: $I_x = \frac{1}{3} M_{\text{parab.}} R^2$

Para el cálculo de I_y, I_z tenemos que por simetría $I_y = I_z$. Calculemos ahora el momento de inercia respecto del eje Y. Consideremos primeramente unos ejes Y^* y Z^*

contenidos en el plano de cada rodaja y paralelos respectivamente a los ejes Y y Z. Para cada rodaja tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{por simetría: } dI_{y^*} = dI_{z^*} \\ \text{teorema de los ejes perp.: } dI_x = dI_{y^*} + dI_{z^*} \end{array} \right\} \Rightarrow dI_{y^*} = dI_{z^*} = \frac{1}{2} dI_x = \frac{1}{4} dm r^2$$

Utilizando el teorema de Steiner podemos calcular el momento de inercia de cada rodaja respecto del eje Y:

$$dI_y = dI_{y^*} + dm x^2 = \frac{1}{4} \rho \pi \left(\frac{R^4}{H^2} \right) x^2 dx + \rho \pi \left(\frac{R^2}{H} \right) x^3 dx$$

El momento de inercia del paraboloides respecto del eje Y será:

$$\begin{aligned} I_{y, \text{parab.}} &= \int_0^H dI_y = \int_0^H \left[\frac{1}{4} \rho \pi \left(\frac{R^4}{H^2} \right) x^2 dx + \rho \pi \left(\frac{R^2}{H} \right) x^3 dx \right] = \\ &= \left[\frac{1}{12} R^2 H + \frac{1}{4} H^3 \right] \rho \pi R^2 = \frac{1}{2} M_{\text{parab.}} \left[\frac{1}{3} R^2 + H^2 \right] \end{aligned}$$

Para el semiparaboloides los momentos de inercia pedidos serán la mitad, pero como su masa ya es la mitad la expresión será la misma:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{3} M_{\text{semiparab.}} R^2 \\ I_y = I_z &= \frac{1}{2} M_{\text{semiparab.}} \left[\frac{1}{3} R^2 + H^2 \right] \end{aligned}$$

El área por debajo de la curva $y = a(x/h)^n$, con x entre 0 y h , gira alrededor del eje X y genera un sólido de revolución homogéneo de masa m . Exprésese el momento de inercia del sólido respecto al eje X y respecto al eje Y en términos de m , a y n .

Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 01, 03

Vamos a dividir ese sólido de revolución en rodajas circulares de radio y y espesor dx . La contribución al momento de inercia respecto del eje X de cada una de las rodajas será:

$$dI_x = \frac{1}{2} dm y^2 = \frac{1}{2} (\rho \pi y^2 dx) y^2 = \frac{1}{2} \rho \pi y^4 dx = \frac{1}{2} \rho \pi a^4 \left(\frac{x^{4n}}{h^{4n}} \right) dx$$

El momento de inercia respecto del eje X de todo el sólido será:

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \frac{1}{2} \rho \pi a^4 \left(\frac{x^{4n}}{h^{4n}} \right) dx = \frac{1}{2} \rho \pi a^4 \frac{h}{4n+1}$$

Para ponerlo en función de su masa calculamos ésta:

$$m = \int dm = \int_0^h \rho \pi y^2 dx = \int_0^h \rho \pi a^2 \left(\frac{x^{2n}}{h^{2n}} \right) dx = \rho \pi a^2 \frac{h}{2n+1} \Rightarrow \rho = \frac{(2n+1)m}{\pi a^2 h}$$

Sustituyendo en la expresión del momento de inercia:

$$I_x = \frac{1}{2} \left(\frac{2n+1}{4n+1} \right) m a^2$$

Calculemos ahora el momento de inercia respecto del eje Y . Consideremos primeramente unos ejes Y^* y Z^* contenidos en el plano de cada rodaja y paralelos respectivamente a los ejes Y y Z . Para cada rodaja tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{por simetría: } dI_{y^*} = dI_{z^*} \\ \text{teor. de los ejes perp.: } dI_x = dI_{y^*} + dI_{z^*} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dI_{y^*} = dI_{z^*} = \frac{1}{2} dI_x = \frac{1}{4} dm y^2 = \\ = \frac{1}{4} \rho \pi a^4 \frac{x^{4n}}{h^{4n}} dx \end{array}$$

Utilizando el teorema de Steiner podemos calcular el momento de inercia de cada rodaja respecto del eje Y :

$$dI_y = dI_{y^*} + dm x^2 = \frac{1}{4} \rho \pi a^4 \frac{x^{4n}}{h^{4n}} dx + \rho \pi a^2 \left(\frac{x^{2n+2}}{h^{2n}} \right) dx$$

El momento de inercia del sólido respecto del eje Y será:

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \left[\frac{1}{4} \rho \pi a^4 \left(\frac{x^{4n}}{h^{4n}} \right) dx + \rho \pi a^2 \left(\frac{x^{2n+2}}{h^{2n}} \right) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \rho \pi a^4 \frac{h}{4n+1} + \rho \pi a^2 \frac{h^3}{2n+3} = \frac{1}{4} \left(\frac{2n+1}{4n+1} \right) m a^2 + \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right) m h^2$$