MOMENTO ANGULAR:

El vector de posición de un cuerpo de 6 kg de masa está dado por $\vec{r} = \left(3t^2 - 6t\right)\hat{i} - 4t^3\,\hat{j}$ (r en m y t en s). Hallar la fuerza que actúa sobre la partícula, el momento de fuerzas respecto del origen, el momento lineal y el momento angular de la partícula respecto del origen.

Solución: I.T.I. 95, 96, 97, 99, 00, 03, I.T.T. 00, 04

Derivando dos veces respecto del tiempo obtenemos la aceleración del cuerpo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 6\hat{i} - 24t\,\hat{j}$$

Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos la fuerza que actúa sobre él:

$$\vec{F}(t) = m\vec{a} = \boxed{36\hat{i} - 144t\,\hat{j}}$$

El momento de fuerzas respecto del origen será:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \boxed{288t^2(3-t)\hat{k}}$$

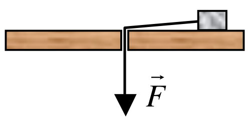
El momento lineal de la partícula será:

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} = \boxed{36(t-1)\hat{i} - 72t^2\,\hat{j}}$$

El momento angular respecto del origen será:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \boxed{72t^3(4-t)\hat{k}}$$

Un cuerpo de masa M describe circunferencias de radio r_0 a velocidad v_0 sobre una mesa horizontal lisa (despreciamos todo tipo de rozamientos) y sujeto por un hilo que pasa por un orificio en el centro de la mesa como se indica en la figura. Si se tira del hilo hacia abajo las circunferencias se acortan hasta tener un radio r. Calcular en función de las magnitudes mencionadas la nueva velocidad del objeto.



Solución: I.T.I. 98, 01, I.T.T. 97, 99, 01, 04

Al tirar del hilo hacia abajo la tensión de la cuerda modifica el movimiento del cuerpo disminuyendo el radio de su trayectoria circular. Ahora bien, esta fuerza es central, está orientada constantemente hacia el centro del circulo con lo cual el momento angular del cuerpo va a permanecer constante durante todo el proceso. Teniendo en cuenta que en todo momento $\vec{r}$ y $\vec{p} = m\vec{v}$ son perpendiculares:

$$\left.\begin{array}{r} L_{inicial} = mv_0 r_0 \\ \\ L_{final} = mvr \end{array}\right\} \quad L_{inicial} = L_{final} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{v_0 r_0}{r}}$$

Un proyectil de masa m es disparado desde el punto O con una velocidad v_0 y un ángulo θ sobre la horizontal. Calcular el momento angular del proyectil respecto del punto O en función del tiempo. Determinar su variación a lo largo del tiempo. Calcular el momento del peso del proyectil respecto de O y compararlo con el resultado anterior.

Solución: I.T.I. 96, 98, 99, 01, I.T.T. 96, 99, 01, 03

Si tomamos el origen de coordenadas en el punto O, escogemos los ejes X e Y de tal forma que el movimiento se realiza en el plano XY y ponemos a cero el cronómetro cuando se dispara el proyectil, la posición y la velocidad del proyectil vendrán dadas por:

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 \cos\theta\, t, v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2, 0\right) \qquad \vec{v}(t) = \left(v_0 \cos\theta, v_0 \operatorname{sen}\theta - gt, 0\right)$$

El momento lineal de la partícula será:

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) = m\left(v_0 \cos\theta, v_0 \operatorname{sen}\theta - gt, 0\right)$$

El momento angular respecto de O será:

$$\vec{L}_O(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \ldots = -\frac{1}{2} m v_0 \cos\theta\, g t^2\, \hat{k}$$

Su variación con el tiempo será:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -m v_0 \cos\theta\, g t\, \hat{k}$$

Si calculamos el momento de fuerzas del peso del proyectil respecto del punto O:

$$\vec{\tau}_O(t) = \vec{r}(t) \times m\vec{g} = \ldots = -m v_0 \cos\theta\, g t\, \hat{k}$$

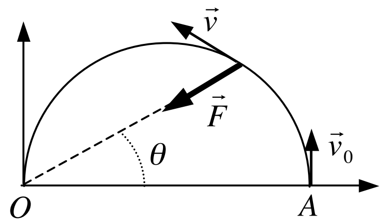
Comparando vemos que los dos últimos resultados coinciden. Lo cual verifica la segunda ley de Newton para magnitudes angulares: $\vec{\tau}_O = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt}$

Se pretende que una partícula de masa m describa la trayectoria parabólica de ecuación $y = ax^2 + b$ con velocidad areolar constante, bajo la acción de una fuerza que pasa por el origen de coordenadas. Si en el instante inicial $t_0 = 0$ se encuentra en P_0 de coordenadas (x_0,y_0) con velocidad $v(t_0) = v_0$, obtener: a) la velocidad areolar, b) las componentes de la velocidad de la partícula en función de su posición, c) la fuerza que ha de actuar sobre la partícula en función de su posición.

Solución: I.T.T. 97

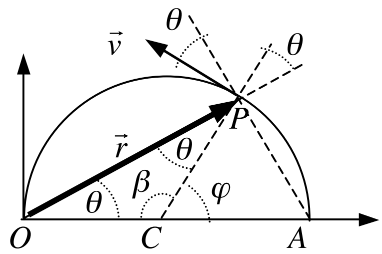
Texto solución

Una partícula de masa m se lanza desde A con una velocidad v_0 perpendicular a la línea OA y se mueve bajo la acción de una fuerza central F a lo largo de una trayectoria semicircular de diámetro OA. Demostrar: a) que la velocidad de la partícula es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r de la partícula al centro de fuerza O, b) que la fuerza F es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia r. c) Hállese el módulo de F para $\theta = 0$.



Solución: **I.T.I. 00, 04, I.T.T. 02, 05**

En la figura se muestran diferentes ángulos que aparecerán en los cálculos siguientes. El triángulo OCP es isósceles. En dicho triángulo $2\theta + \beta = 180°$. Por otro lado $\varphi + \beta = 180°$ con lo que deducimos que $\varphi = 2\theta$. Cualquier triángulo circunscrito a una semicircunferencia es un triángulo rectángulo, en nuestro caso el triángulo OAP será rectángulo, con lo que el vector velocidad $\vec{v}$, que es tangente a la circunferencia, formará un ángulo θ con la dirección AP.



a) Como se trata de un problema de fuerzas centrales, siendo el centro de fuerzas el origen O, el momento angular calculado respecto al origen será constante:

$$L = \left| \vec{r} \times m\vec{v} \right| = mv\,r\cos\theta$$

Por el teorema de los senos:

$$\frac{R}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{r}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{r}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{r}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{r}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{r}{2R}$$

Sustituyendo en la expresión para el momento angular y despejando la velocidad:

$$L = mv\frac{r^2}{2R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{2RL}{m\,r^2}}$$

b) Teniendo en cuenta que la dirección normal a la trayectoria, dirección CP, forma un ángulo θ con la dirección OP, que es la dirección de la fuerza central, y por lo tanto la dirección de la aceleración $\vec{a}$ de la partícula:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = a\cos\theta \quad \Rightarrow \quad F = ma = \frac{mv^2}{R\cos\theta} = \frac{m}{R}\left(\frac{2RL}{m\,r^2}\right)^2\left(\frac{2R}{r}\right) = \boxed{\frac{8R^2L^2}{m\,r^5}}$$

c) Para $\theta = 0$ la distancia al origen era $r = 2R$, sustituyendo en la expresión de la fuerza:

$$F(r = 2R) = \boxed{\frac{L^2}{4m\,r^3}}$$