Apéndice de matemáticas

M.1 Dígitos significativos
M.2 Ecuaciones
M.3 Proporciones directas e inversas
M.4 Ecuaciones lineales
M.5 Ecuaciones cuadráticas y factorización
M.6 Exponentes y logaritmos
M.7 Geometría
M.8 Trigonometría
M.9 Desarrollo del binomio
M.10 Números complejos
M.11 Cálculo diferencial
M.12 Cálculo integral

En este apéndice se revisarán algunas de las reglas básicas del álgebra, de la geometría, de la trigonometría y del cálculo diferencial e integral. En muchos casos sólo se enunciarán las reglas sin demostrarlas. En la tabla M.1 se recogen algunos símbolos matemáticos.

M.1 DÍGITOS SIGNIFICATIVOS

Muchos de los números utilizados en ciencia son el resultado de medidas y, por lo tanto, sólo se conocen con cierto grado de indeterminación, que se refleja en el número de dígitos utilizado. Por ejemplo, si disponemos de una regla de 1 metro con un espaciado de 1 cm, sabemos que se puede medir la altura de una caja con una precisión de aproximadamente un quinto de centímetro. Con esta regla podríamos hallar que la altura de la caja es 27,0 cm. Si en la regla hay una escala con un espaciado de 1 mm, quizás se podría obtener como medida de la altura de la caja 27,03 cm. Sin embargo, si en la regla se dispusiera de una escala con un espaciado de 1 mm, podríamos no ser capaces de medir con mayor precisión que 27,03 cm porque la altura podría variar más o menos en 0,01 cm, dependiendo de la parte de la caja en la que se hace la medida. Cuando se anota que la altura de la caja es 27,03 cm, estamos diciendo que nuestro mejor cálculo de la altura es 27,03 cm, pero no estamos afirmando que la caja tenga exactamente 27,03000... centímetros de altura. Los cuatro dígitos de 27,03 se denominan dígitos significativos. La longitud medida 2,730 m tiene cuatro dígitos significativos. Los dígitos significativos también reciben el nombre de cifras significativas.

El número de dígitos significativos en el resultado de un cálculo dependerá del número de dígitos significativos en los datos utilizados. Cuando se opera con números que presentan dígitos no seguros hay que tener cuidado de no incluir más dígitos que los que garanticen la seguridad de las medidas. Cálculos aproximados (dentro del orden de magnitud) siempre traen como consecuencia resultados que tienen sólo un dígito significativo o ninguno. Cuando se multiplican, dividen, suman o restan números se debe tener en cuenta la precisión de los resultados. A continuación, se dan algunas reglas que ayudan a determinar el número de dígitos significativos en los resultados.

Tabla M.1 Símbolos matemáticos

$=$	es igual a
$\neq$	no es igual a
$\approx$	es aproximadamente igual a
$\sim$	es del orden de
$\propto$	es proporcional a
$>$	es mayor que
$\geq$	es mayor o igual que
$\gg$	es mucho mayor que
$<$	es menor que
$\leq$	es menor o igual que
$\ll$	es mucho menor que
Δx	variación o incremento de x
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
n!	$n(n-1)(n-2)\ldots 1$
$\sum$	suma
lim	límite
$\Delta t \to 0$	Δt tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	derivada de x respecto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x respecto a t
$\int$	integral

1. Cuando se multiplican o dividen cantidades, el número de dígitos significativos en el resultado final no es mayor que el de la cantidad con el menor número de dígitos significativos.
2. Cuando se suman o restan cantidades, el número de decimales del resultado debería igualar al del término con el número más pequeño de decimales.
3. Los valores exactos tienen un número ilimitado de dígitos significativos. Por ejemplo, un valor obtenido contando objetos carece de toda duda y es un valor exacto. Además, el factor de conversión 0,0254000... m/in es un valor exacto porque 1,000... pulgada es exactamente igual a 0,0254000... metros. (La yarda es, por definición, exactamente igual a 0,9144 metros, y 0,9144 dividido por 36 es exactamente igual a 0,0254.)
4. A veces los ceros son significativos y a veces no. Si un cero está delante de un dígito distinto de cero, entonces el cero no es significativo. Por ejemplo, el número 0,00890 tiene tres dígitos significativos. Los tres primeros ceros no son dígitos significativos sino meros indicadores para situar el punto decimal. Obsérvese que el cero después del nueve es significativo.
5. Los ceros que están entre dígitos de valor no nulo son significativos. Por ejemplo, 5603 tiene cuatro dígitos significativos.
6. El número de dígitos significativos en números que arrastran ceros y no llevan coma decimal es ambiguo. Por ejemplo, 31 000 podría tener como mucho cinco dígitos significativos y como poco dos dígitos significativos. Para evitar la ambigüedad en los números, habría que hacer uso de la notación científica.

Ejemplo M.1 Cálculo del promedio de tres números

Hallar el promedio de 19,90, −7,524, y −11,8179.

PLANTEAMIENTO Se suman los tres números y el resultado se divide por tres. El primer número tiene tres dígitos significativos, el segundo tiene cuatro y el tercero tiene cinco.

SOLUCIÓN

1. Sumar los tres números: $19{,}90 + (-7{,}524) + (-11{,}8179) = 0{,}55\mathit{81}$
2. Si el problema sólo pide la suma de los tres números, se podría redondear el resultado al menor número de decimales entre todos los números que se suman. Sin embargo, se ha de dividir este resultado intermedio por 3, de manera que se utiliza ese resultado con dos dígitos de más (en cursiva): $\frac{0{,}55\mathit{81}}{3} = 0{,}18\mathit{60333}\ldots$
3. Sólo dos de los dígitos del resultado intermedio, $0{,}18\mathit{60333}\ldots$, son dígitos significativos y se debe redondear este número para llegar a nuestro resultado final. El número 3 del denominador es un número entero y posee un número ilimitado de dígitos significativos. Por lo tanto, el resultado final tiene el mismo número de dígitos significativos que el numerador, que es 2: El resultado final es $\boxed{0{,}19.}$

COMPROBACIÓN La suma del paso 1 tiene dos dígitos significativos después de la coma decimal, los mismos que tienen los números que se suman cuando se utiliza el menor número de dígitos significativos después de la coma decimal.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

1. $\frac{5{,}3\ \text{mol}}{22{,}4\ \text{mol/L}}$
2. 57,8 m/s − 26,24 m/s

M.2 ECUACIONES

Una **ecuación** es una relación de números y símbolos para indicar que dos cantidades, escritas a un lado y otro de un signo igual, son iguales. La cantidad en un lado del signo igual puede constar de un solo término, o de la suma o diferencia de dos o más **términos**. Por ejemplo, la ecuación $x = 1 - (ay + b)/(cx - d)$ contiene tres términos, x, 1 y $(ay + b)/(cx - d)$.

En las ecuaciones, se pueden realizar las siguientes operaciones:

1. Se puede sumar o restar la misma cantidad a un lado (miembro) y otro de la ecuación.
2. Cada uno de los miembros de la ecuación puede multiplicarse o dividirse por la misma cantidad.
3. Cada uno de los miembros de la ecuación puede elevarse a la misma potencia.

Se entiende que estas operaciones se aplican a cada miembro de la ecuación y no a cada término. (Como la multiplicación es distributiva con respecto a la suma, la operación 2 —y sólo la 2— de las operaciones precedentes también se aplica término a término.)

***Advertencia**: la división por cero está prohibida en cualquier etapa de la solución de la ecuación; los resultados (si los hubiese) no serían válidos.*

Adición o sustracción de cantidades iguales
Para hallar x cuando $x - 3 = 7$, sumar 3 a ambos lados de la ecuación: $(x - 3) + 3 = 7 + 3$; de este modo, $x = 10$.

Multiplicación o división por cantidades iguales
Si $3x = 17$, para despejar x se dividen ambos miembros de la ecuación por 3; así, $x = \frac{17}{3}$, o 5,7.

Ejemplo M.2 Simplificación de recíprocos en una ecuación

Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Ecuaciones con recíprocos de incógnitas se presentan en óptica geométrica y en el análisis de circuitos eléctricos; por ejemplo, en el cálculo de la resistencia neta de resistores en paralelo.

PLANTEAMIENTO En esta ecuación, el término que contiene x está en el mismo miembro que un término que no contiene x. Además, x aparece en el denominador de una fracción.

SOLUCIÓN

1. Sustraer $\frac{1}{4}$ de cada miembro: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

2. Simplificar el segundo miembro haciendo uso del mínimo común denominador: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$; por tanto, $\frac{1}{x} = \frac{1}{12}$

3. Multiplicar ambos miembros de la ecuación por $12x$ para obtener el valor de x: $12x\frac{1}{x} = \cancel{12}x\frac{1}{\cancel{12}}$

$$\boxed{12} = x$$

COMPROBACIÓN Sustituir en el primer miembro de la ecuación original x por el valor 12.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMAS PRÁCTICOS Obtener el valor de x en las siguientes ecuaciones:

3. $(7{,}0\ \text{cm}^3)x = 18\ \text{kg} + (4{,}0\ \text{cm}^3)x$
4. $\frac{4}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{x}$

M.3 PROPORCIONES DIRECTAS E INVERSAS

Cuando se dice que las cantidades variables x e y son **directamente proporcionales**, se quiere señalar que cuando x e y cambian, la razón x/y es constante. Decir que dos cantidades son proporcionales significa que son directamente proporcionales. Cuando se dice que las variables x e y son **inversamente proporcionales**, se indica que cuando x e y varían, el producto xy es constante.

Las relaciones de proporcionalidad directa e inversa son comunes en física. Objetos que se desplazan a la misma velocidad, tienen cantidades de movimiento directamente proporcionales a sus masas. La ley de los gases ideales ($PV = nRT$) establece que la presión es directamente proporcional a la temperatura absoluta T, cuando el volumen V permanece constante, y es inversamente proporcional al volumen, cuando la temperatura permanece constante. La ley de Ohm ($V = IR$) establece que el voltaje V en un resistor es directamente proporcional a la corriente eléctrica que circula por el resistor cuando la resistencia R permanece constante.

CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD

Cuando dos cantidades son directamente proporcionales, las dos están relacionadas por una *constante de proporcionalidad*. Si a una persona se le paga un jornal de, por ejemplo, R euros por día, el dinero m que gana es directamente proporcional al tiempo t que trabaja; el jornal R es la constante de proporcionalidad que relaciona el dinero ganado en euros y el tiempo trabajado t en días:

$$\frac{m}{t} = R \quad \text{o} \quad m = Rt$$

Si la persona ha ganado 400 € en 5 días, el valor de R es 400 € / (5 días) = 80 € / día. Para obtener la cantidad ganada en 8 días, habría que realizar el cálculo

$$m = (80\,€/\text{día})(8\ \text{días}) = 640\,€$$

A veces no se hace uso de la constante de proporcionalidad en los problemas de proporciones. Dado que la cantidad ganada en 8 días es $\frac{8}{5}$ de la ganada en 5 días, se tiene

$$m = \frac{8}{5}(400\,€) = 640\,€$$

Ejemplo M.3 Pintando cubos

Se necesitan 15,4 mL de pintura para cubrir una cara de un cubo. El área de una cara es 426 cm^2. ¿Cuál es la relación entre el volumen de pintura necesario para cubrir la cara y su área? ¿Cuánta pintura se necesita para pintar una cara de un cubo de área 503 cm^2?

PLANTEAMIENTO Para determinar la cantidad de pintura para una cara de área 503 cm^2, se necesita establecer una proporción.

SOLUCIÓN

1. El volumen V de pintura necesario aumenta en proporción al área A:

   $\boxed{V \text{ y } A \text{ son directamente proporcionales.}}$

   es decir, $\frac{V}{A} = k$ o $V = kA$

   donde k es la constante de proporcionalidad

2. Hallar el valor de la constante k utilizando los valores $V_1 = 15{,}4$ mL y $A_1 = 426$ cm^2:

   $$k = \frac{V_1}{A_1} = \frac{15{,}4\ \text{mL}}{426\ \text{cm}^2} = 0{,}0361\ \text{mL/cm}^2$$

3. Calcular el volumen de pintura necesario para cubrir una cara cuya área es 503 cm^2 utilizando la constante de proporcionalidad del paso 1:

   $$V_2 = kA_2 = (0{,}0361\ \text{mL/cm}^2)(503\ \text{cm}^2) = \boxed{18{,}2\ \text{mL}}$$

COMPROBACIÓN El valor para V_2 es mayor que para V_1, como era de esperar. La cantidad de pintura para cubrir un área de 503 cm^2 ha de ser mayor que la necesaria para un área de 426 cm^2.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

5. Un recipiente cilíndrico contiene 0,384 L de agua cuando está lleno. ¿Qué cantidad de agua contendría si su radio se doblase y su altura fuese la misma?
   Ayuda: el volumen de un cilindro recto viene dado por V = $\pi r^2 h$, *donde* r *es el radio y* h *la altura. De este modo,* V *es directamente proporcional a* r^2 *cuando* h *permanece constante.*
6. En el caso del recipiente del problema 5, ¿cuánta agua contendría si su altura y su radio se doblasen y su altura permaneciese constante?
   Sugerencia: el volumen V *de un cilindro viene dado por* $V = \pi r^2 h$, *donde* r *es su radio y* h *su altura.*

M.4 ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma $x + 2y - 4z = 3$. Es decir, una ecuación es lineal si cada término es constante o es el producto de una constante y una variable elevada a la primera potencia. Se dice que tales ecuaciones son lineales porque sus representaciones gráficas son líneas rectas o planos. Las ecuaciones que representan una proporción directa entre dos variables son ecuaciones lineales.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA RECTA

Una ecuación lineal que relacione dos variables x e y puede expresarse siempre en la forma estándar

$$y = mx + b \qquad \text{M.1}$$

donde m y b son constantes que pueden ser positivas o negativas. En la figura M.1, se ve un gráfico de los valores de x e y que satisfacen la ecuación M.1. La constante b, denominada **ordenada en el origen**, es el valor que toma y para $x = 0$. La constante m es la **pendiente** de la recta, que es igual al cociente entre la variación de y y la variación correspondiente de x. En la figura se han indicado dos puntos en la recta, x_1, y_1 y x_2, y_2 y las variaciones $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$. La pendiente m es entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si se desconocen tanto x como y, no hay una solución única para sus valores. Cualquier par de valores (x_1, y_1) de la línea de la figura M.1 satisfará la ecuación. Si tenemos dos ecuaciones, con las mismas incógnitas x e y, pueden resolverse simultáneamente las dos ecuaciones para obtener las dos incógnitas.

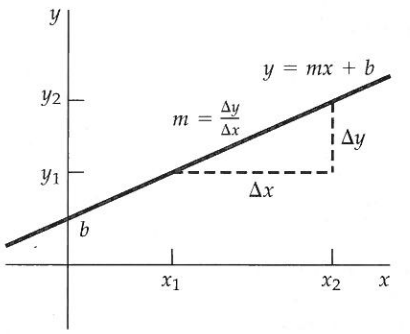


FIGURA M.1 Representación gráfica de la ecuación lineal $y = mx + b$, donde b es la ordenada en el origen y $m = \Delta y/\Delta x$ es la pendiente.

Ejemplo M.4 Utilizar dos ecuaciones para hallar la solución de dos incógnitas

Hallar los valores de x e y que satisfacen simultáneamente

$$3x - 2y = 8 \qquad \text{M.2}$$

y

$$y - x = 2 \qquad \text{M.3}$$

PLANTEAMIENTO La figura M.2 muestra ambas ecuaciones en un solo gráfico. En el punto en que se cortan ambas líneas, los valores de x e y satisfacen a la vez ambas ecuaciones. Podemos resolverlas simultáneamente despejando primero en una de ellas una de las variables en función de la otra, y sustituyendo luego el resultado en la otra ecuación.

SOLUCIÓN

1. De la ecuación M.3, resulta: $y = x + 2$
2. Sustituir este valor de y en la ecuación M.2: $3x - 2(x + 2) = 8$
3. Simplificar, y despejar x:
$$3x - 2x - 4 = 8$$
$$x - 4 = 8$$
$$x = \boxed{12}$$
4. Para hallar el valor de y, utilizar una de las ecuaciones dadas y el valor obtenido de x: $y - x = 2$, siendo $x = 12$
$$y - 12 = 2$$
$$y = 2 + 12 = \boxed{14}$$

COMPROBACIÓN Un método alternativo consiste en multiplicar una ecuación por una constante, de tal manera que una de las incógnitas se elimine cuando las ecuaciones se suman o restan. Así, podemos multiplicar por 2 la ecuación M.3

$$2(y - x) = 2(2)$$
$$2y - 2x = 4$$

y sumar el resultado a la ecuación M.2 y despejar x:

$$\begin{array}{r} 2y - 2x = 4 \\ 3x - 2y = 8 \\ \hline 3x - 2x = 12 \Rightarrow x = 12 \end{array}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación M.3 y despejando y:

$$y - 12 = 2 \Rightarrow y = 14$$

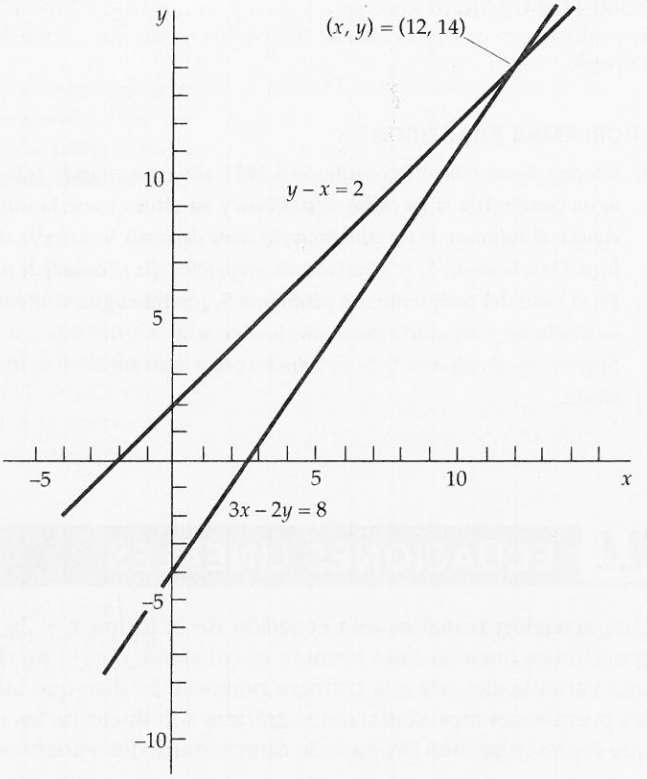


FIGURA M.2 Representación gráfica de las ecuaciones M.2 y M.3. En el punto de corte de ambas rectas, los valores de x e y satisfacen ambas ecuaciones.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

7. Verdadero o falso: $xy = 4$ es una ecuación lineal.
8. En el tiempo $t = 0{,}0$ s, la posición de una partícula que se desplaza a lo largo del eje x a velocidad constante es $x = 3{,}0$ m. En $t = 2{,}0$ s, la posición es $x = 12{,}0$ m. Escribir una ecuación lineal que muestre la relación entre x y t.
9. Resolver el siguiente par de ecuaciones:

$$\frac{5}{4}x + \frac{1}{3}y = 30$$
$$y - 5x = 20$$

M.5 ECUACIONES CUADRÁTICAS Y FACTORIZACIÓN

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + g = 0$, donde x e y son variables y a, b, c, e, f, y g son constantes. En cada término de la ecuación, las potencias de las variables son enteros cuya suma es 2, 1, o 0. La ecuación de una sola variable se denomina *ecuación de segundo grado* y se escribe en la forma estándar

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{M.4}$$

donde a, b y c son constantes. Esta ecuación tiene dos soluciones o raíces, que son los valores de x para los que se cumple la ecuación.

FACTORIZACIÓN

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver expresándolas en **factores**. Con frecuencia, los términos de una ecuación se pueden agrupar u organizar en otros términos. Esto se consigue buscando multiplicadores y multiplicandos —que a partir de ahora denominaremos factores— que darán dos o más nuevos términos en forma de producto. Por ejemplo, podemos hallar las raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 - 3x + 2 = 0$ expresando el primer miembro como producto de factores, es decir, $(x - 2)(x - 1) = 0$. Las raíces son $x = 2$ y $x = 1$.

Este procedimiento es útil para simplificar ecuaciones y para comprender las relaciones entre cantidades. Podríamos familiarizarnos con la multiplicación de los factores $(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$.

Son fáciles de reconocer algunas combinaciones típicas de factores:

1. Factor común: $2ax + 3ay = a(2x + 3y)$
2. Cuadrado perfecto: $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$ (Si la expresión del primer miembro de una ecuación cuadrática en forma estándar es un cuadrado perfecto, las dos raíces serán iguales.)
3. Diferencia de cuadrados: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Así mismo, buscar factores que sean números primos ayuda a encontrar factores y simplificar términos. Por ejemplo, la ecuación $98x^2 - 140 = 0$ puede simplificarse porque 98 y 140 comparten el factor común 2. Es decir, $98x^2 - 140 = 0$ se convierte en $2(49x^2 - 70) = 0$, de manera que se tiene $49x^2 - 70 = 0$.

Este resultado puede simplificarse más porque 49 y 70 tienen a 7 como factor común. Así, $49x^2 - 70 = 0$ se convierte en $7(7x^2 - 10) = 0$, o lo que es lo mismo $7x^2 - 10 = 0$.

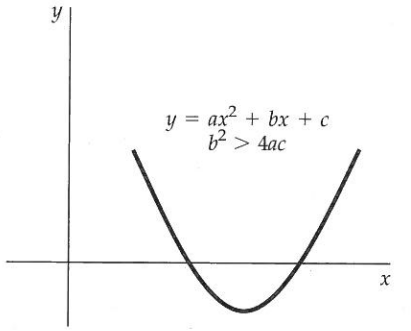


FIGURA M.3 Representación de y en función de x cuando $y = ax^2 + bx + c$ en el caso en que $b^2 > 4ac$. Los dos valores de x en los que $y = 0$ satisfacen la ecuación de segundo grado (ecuación M.4).

LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

No todas las ecuaciones cuadráticas se pueden expresar mediante un producto de factores. Sin embargo, cualquier **ecuación de segundo grado** en su forma estándar puede resolverse mediante la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad \text{M.5}$$

Cuando b^2 es menor que $4ac$, hay dos soluciones que corresponden a los signos + y −. La figura M.3 muestra una gráfica de y en función de x, donde $y = ax^2 + bx + c$. La curva, que es una parábola, corta dos veces el eje x. (La representación más sencilla de una parábola en coordenadas (x, y) es una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$.) Las dos raíces de esta ecuación son los valores para los que $y = 0$; es decir, corresponden a las *intersecciones* sobre el eje x.

Cuando b^2 es menor que $4ac$, la gráfica de y en función de x no corta el eje x, como se muestra en la figura M.4; todavía hay dos raíces, pero ellas no son números reales (véase la discusión de los números complejos al principio de la página M.19). Cuando $b^2 = 4ac$, la gráfica de y en función de x es tangente al eje x en el punto $x = -b/2a$; las dos raíces son iguales al valor $-b/2a$.

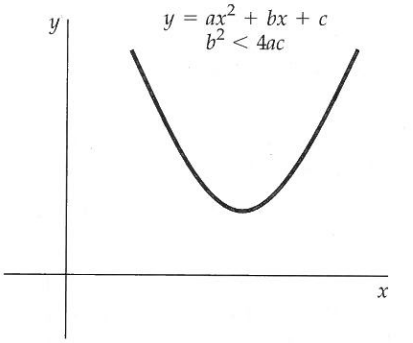


FIGURA M.4 Representación gráfica de y en función de x cuando $y = ax^2 + bx + c$ y se tiene que $b^2 < 4ac$. En este caso no existen valores (reales) de x para los que $y = 0$.

Ejemplo M.5 Factorización de un polinomio de segundo grado

Convertir en factores la expresión $6x^2 + 19xy + 10y^2$.

PLANTEAMIENTO Examinar los coeficientes de los términos para ver si la expresión se puede expresar como producto de factores sin tener que recurrir a métodos más avanzados. Recordar que $(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$.

SOLUCIÓN

1. El coeficiente de x^2 es 6, que puede expresarse de dos maneras: $ac = 6$
   $3 \cdot 2 = 6$ o bien $6 \cdot 1 = 6$
2. El coeficiente de y^2 es 10, y puede expresarse de dos maneras: $bd = 10$
   $5 \cdot 2 = 10$ o bien $10 \cdot 1 = 10$

3. Hacer una tabla con los posibles valores de a, b, c y d e incluir una columna para $ad + bc$.

   Si $a = 3$, entonces $c = 2$, y viceversa. Además, si $a = 6$, entonces $c = 1$, y viceversa. Para cada valor de a hay cuatro valores de b.

a	b	c	d	$ad + bc$
3	5	2	2	16
3	2	2	5	19
3	10	2	1	23
3	1	2	10	32
2	5	3	2	19
2	2	3	5	16
2	10	3	1	32
2	1	3	10	23
6	5	1	2	17
6	2	1	5	32
6	10	1	1	16
6	1	1	10	61
1	5	6	2	32
1	2	6	5	17
1	10	6	1	61
1	1	6	10	16

4. Hallar una combinación tal que $ad + bc = 19$. En la tabla puede verse que hay dos de esas combinaciones y ambas dan los mismos resultados:

$$ad + bc = 19$$
$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$$

5. Utilizar la combinación de la segunda fila de la tabla en los factores de la expresión dada:

$$6x^2 + 19xy + 10y^2 = (3x + 2y)(2x + 5y)$$

COMPROBACIÓN Como comprobación, desarrollar $(3x + 2y)(2x + 5y)$.

$$(3x + 2y)(2x + 5y) = 6x^2 + 15xy + 4xy + 10y^2 = 6x^2 + 19xy + 10y^2$$

La combinación de la quinta fila de la tabla también da el resultado del paso 4.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

10. Demostrar que la combinación de la fila quinta de la tabla también da el resultado del paso 4.
11. Hallar los factores de $2x^2 - 4xy + 2y^2$.
12. Hallar los factores de $2x^4 + 10x^3 + 12x^2$.

M.6 EXPONENTES Y LOGARITMOS

EXPONENTES

La notación x^n indica la cantidad que se obtiene al multiplicar x por sí mismo n veces. Por ejemplo, $x^2 = x \cdot x$ y $x^3 = x \cdot x \cdot x$. La cantidad n se denomina **potencia**, o **exponente**, de x (la **base**). A continuación, se da un conjunto de reglas que ayudan a simplificar términos que tienen exponentes.

1. Cuando dos potencias de x se multiplican, los exponentes se suman:

$$(x^m)(x^n) = x^{m+n} \qquad \text{M.6}$$

   Ejemplo: $x^2x^3 = x^{2+3} = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$

2. Por definición, todo número (excepto 0) elevado a la potencia 0 es la unidad:

$$x^0 = 1 \qquad \text{M.7}$$

3. Basado en la regla 2,

$$x^n x^{-n} = x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{M.8}$$

4. Cuando dos potencias se dividen, los exponentes se restan:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n x^{-m} = x^{n-m} \qquad \text{M.9}$$

5. Cuando una potencia se eleva a otra potencia, los exponentes se multiplican:

$$(x^n)^m = x^{nm} \qquad \text{M.10}$$

6. Cuando los exponentes se escriben como fracciones, representan las raíces de la base. Por ejemplo,

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x$$

de modo que

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad (x > 0)$$

Ejemplo M.6 Simplificación de una cantidad que tiene exponentes

Simplificar $\dfrac{x^4 x^7}{x^8}$.

PLANTEAMIENTO De acuerdo con la regla 1, cuando dos potencias de x se multiplican, los exponentes se suman. La regla 4 establece que cuando dos potencias se dividen, los exponentes se restan.

SOLUCIÓN

1. Simplificar el numerador $x^4 x^7$ utilizando la regla 1: $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$
2. Simplificar $\dfrac{x^{11}}{x^8}$ usando la regla 4: $\dfrac{x^{11}}{x^8} = x^{11} x^{-8} = x^{11-8} = x^3$

COMPROBACIÓN Usar el valor $x = 2$ para determinar si la respuesta es correcta.

$$\frac{2^4 2^7}{2^8} = 2^3 = 8$$

$$\frac{2^4 2^7}{2^8} = \frac{(16)(128)}{256} = \frac{2048}{256} = 8$$

PROBLEMAS PRÁCTICOS

13. $(x^{1/18})^9 =$
14. $x^6 x^0 =$

LOGARITMOS

Cualquier número positivo se puede expresar como una potencia de otro número positivo excepto el 1. Si y está relacionado con x mediante la expresión $y = a^x$, se dice que el número x es el **logaritmo** de y en la **base** a, y se expresa

$$x = \log_a y$$

Por lo tanto, los logaritmos son exponentes, y las reglas para operar con logaritmos se corresponden con leyes semejantes para los exponentes. A continuación, se recogen reglas que ayudarán a simplificar términos que tienen logaritmos.

1. Si $y_1 = a^n$ y $y_2 = a^m$, entonces

$$y_1 y_2 = a^n a^m = a^{n+m}$$

Igualmente,

$$\log_a y_1 y_2 = \log_a a^{n+m} = n + m = \log_a a^n + \log_a a^m = \log_a y_1 + \log_a y_2 \qquad \text{M.11}$$

de donde se sigue que

$$\log_a y^n = n \log_a y \qquad \text{M.12}$$

2. Como $a^1 = a$ y $a^0 = 1$,

$$\log_a a = 1 \qquad \text{M.13}$$

y

$$\log_a 1 = 0 \qquad \text{M.14}$$

Existen dos bases de uso común: la base 10, y entonces se llaman **logaritmos comunes** o decimales, y la base e (e = 2,728...), llamados **logaritmos naturales** o neperianos.

En este texto, el símbolo ln se usa para logaritmos naturales y el símbolo log, sin subíndice, se emplea para logaritmos decimales. Así,

$$\log_e x = \ln x \quad \text{y} \quad \log_{10} x = \log x \qquad \text{M.15}$$

y entonces si $y = \ln x$, implica

$$x = e^y \qquad \text{M.16}$$

Los logaritmos pueden transformarse de una base a otra. Supongamos que

$$z = \log x \qquad \text{M.17}$$

Entonces

$$10^z = 10^{\log x} = x \qquad \text{M.18}$$

Tomando logaritmos naturales de ambos miembros de la ecuación M.18, se obtiene

$$z \ln 10 = \ln x$$

y sustituyendo $\log x$ por z (M.17), se obtiene

$$\ln x = (\ln 10)\log x \qquad \text{M.19}$$

Ejemplo M.7 Conversión entre logaritmos decimales y logaritmos naturales

Los pasos que llevan a la ecuación M.19 muestran que, en general, $\log_b x = (\log_b a)\log_a x$, y de este modo esa conversión de logaritmos de una base a otra requiere sólo la multiplicación por una constante. Describir la relación matemática entre la constante para convertir logaritmos decimales en logaritmos naturales y la constante para convertir logaritmos naturales en logaritmos decimales.

PLANTEAMIENTO Se dispone de una fórmula matemática general para convertir logaritmos de una base a otra. Se ha de buscar la relación matemática intercambiando a por b, y viceversa, en la fórmula.

SOLUCIÓN

1. Hay una fórmula para convertir logaritmos de base a a base b: $\log_b x = (\log_b a)\log_a x$
2. Convertir de base b a base a, y viceversa: $\log_a x = (\log_a b)\log_b x$
3. Dividir ambos miembros de la ecuación del paso 1 por $\log_a x$: $\dfrac{\log_b x}{\log_a x} = \log_b a$
4. Dividir ambos miembros de la ecuación del paso 2 por $(\log_a b)\log_a x$: $\dfrac{1}{\log_a b} = \dfrac{\log_b x}{\log_a x}$
5. Los resultados muestran que los factores de conversión $\log_b a$ y $\log_a b$ son recíprocos: $\dfrac{1}{\log_a b} = \log_b a$

COMPROBACIÓN Para el valor de $\log_{10} e$, nuestra calculadora dará 0,43429. Para ln 10, dará 2,3026. La multiplicación de estos dos números dará 1,0000.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

15. Calcular $\log_{10} 1000$.
16. Calcular $\log_2 5$.

M.7 GEOMETRÍA

Las propiedades de la mayoría de las **figuras geométricas** —formas en dos o tres dimensiones cuyas longitudes, áreas o volúmenes están gobernadas por razones específicas— son una herramienta analítica básica en física. Por ejemplo, las razones características dentro de los triángulos nos dan las leyes de la *trigonometría* (ver la próxima sección de esta revisión), que a su vez nos da la teoría de vectores, esencial en el análisis del movimiento en dos o más dimensiones. Círculos y esferas son imprescindibles para entender, entre otros conceptos, el momento angular y las densidades de probabilidad de la mecánica cuántica.

FÓRMULAS BÁSICAS DE LA GEOMETRÍA

Círculo El cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es un número irracional π que tiene el valor aproximado de

$$\pi = 3{,}141592$$

Así pues, la longitud de la circunferencia C está relacionada con el diámetro d y su radio r por

$$C = \pi d = 2\pi r \qquad \text{longitud de la circunferencia} \qquad \text{M.20}$$

El área del círculo es (figura M.5)

$$A = \pi r^2 \qquad \text{área del círculo} \qquad \text{M.21}$$

Paralelogramo El área de un paralelogramo es el producto de la longitud de la base b por la altura h (figura M.6):

$$A = bh$$

La de un triángulo es la mitad de su base por la altura (figura M.7)

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Esfera Una esfera de radio r (figura M.8) tiene una superficie cuya área viene dada por

$$A = 4\pi r^2 \qquad \text{área de la superficie esférica} \qquad \text{M.22}$$

y un volumen dado por

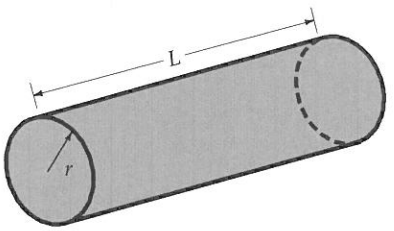
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{volumen de una esfera} \qquad \text{M.23}$$

Cilindro Un cilindro de radio r y longitud L (figura M.9) tiene un área de su superficie lateral (sin incluir las caras extremas) de

$$A = 2\pi rL \qquad \text{superficie lateral de un cilindro} \qquad \text{M.24}$$

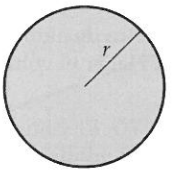
y un volumen de

$$V = \pi r^2 L \qquad \text{volumen del cilindro} \qquad \text{M.25}$$



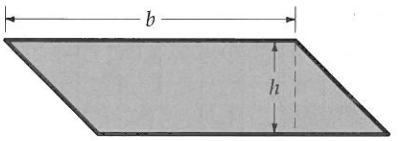
Área de la superficie cilíndrica
$A = 2\pi rL$
Volumen del cilindro
$V = \pi r^2 L$

FIGURA M.9 Área superficial (sin incluir las caras extremas) y volumen del cilindro.



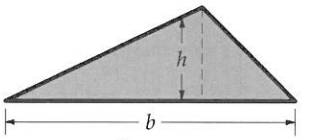
Área del círculo $A = \pi r^2$

FIGURA M.5 Área del círculo.



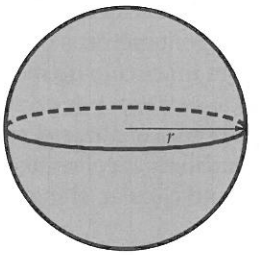
Área del paralelogramo
$A = bh$

FIGURA M.6 Área del paralelogramo.



Área del triángulo
$A = \frac{1}{2}bh$

FIGURA M.7 Área del triángulo.



Área de la superficie esférica
$A = 4\pi r^2$
Volumen de la esfera
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

FIGURA M.8 Área de la superficie esférica y volumen de la esfera.

Ejemplo M.8 Cálculo de la masa de una corteza esférica

Una corteza esférica de aluminio tiene un diámetro exterior de 40,0 cm y un diámetro interior de 39,0 cm. Hallar el volumen de aluminio de esta corteza.

PLANTEAMIENTO El volumen del aluminio de la corteza esférica es el volumen que resulta de sustraer el volumen interior de la esfera, que tiene $d_i = 2r_i = 39{,}0$ cm, del volumen de la esfera exterior, que tiene $d_o = 2r_o = 40{,}0$ cm.

SOLUCIÓN

1. Restar el volumen de la esfera de radio r_i del volumen de la esfera de radio de radio r_o: $V = \frac{4}{3}\pi r_o^3 - \frac{4}{3}\pi r_i^3 = \frac{4}{3}\pi(r_o^3 - r_i^3)$
2. Sustituir 20,0 cm en r_0 y 19,5 en r_i: $V = \frac{4}{3}\pi[(20{,}0\text{ cm})^3 - (19{,}5\text{ cm})^3] = \boxed{2{,}45 \times 10^3\text{ cm}^3}$

COMPROBACIÓN Es de esperar que el volumen de la corteza sea del mismo orden de magnitud que el volumen de un cubo hueco con una longitud de arista exterior de 40,0 cm y una interior de 39,0 cm. El volumen de ese cubo hueco es $(40{,}0\text{ cm})^3 - (39{,}0\text{ cm})^3 = 4{,}68 \times 10^3\text{ cm}^3$. El resultado del paso 2 concuerda con lo esperado, ya que el volumen de la corteza es del mismo orden de magnitud que el volumen del cubo hueco.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

17. Hallar la razón entre el volumen V y el área de la superficie A de una esfera de radio r.
18. ¿Cuál es el área de un cilindro cuyo radio mide 1/3 de su longitud?

M.8 TRIGONOMETRÍA

La **trigonometría**, que debe su nombre a las raíces griegas que significan "triángulo" y "medida", es el estudio de importantes funciones matemáticas, denominadas **funciones trigonométricas**, la mayor parte de las cuales se definen como cocientes entre los lados de triángulos rectángulos. Sin embargo, estas definiciones son de uso limitado porque sólo son válidas para ángulos entre cero y 90°. No obstante, la validez de estas definiciones de triángulo rectángulo se puede extender definiendo las funciones trigonométricas en términos de la razón de las coordenadas de puntos situados sobre un círculo de radio unidad cuyo centro está en el origen del plano xy.

En Física, se tratan por primera vez las funciones trigonométricas cuando se utilizan vectores para analizar el movimiento en dos dimensiones. También son esenciales estas funciones en el análisis de cualquier comportamiento periódico, tales como el movimiento circular, el movimiento oscilatorio y la mecánica de ondas.

ÁNGULOS Y SU MEDIDA: GRADOS Y RADIANES

El tamaño de un ángulo formado por la intersección de dos líneas rectas se conoce como su **medida**. El modo habitual de hallar la medida de un ángulo es situar éste con su vértice, o punto de intersección de las dos rectas que forman el ángulo, en el centro de un círculo localizado en el origen de una gráfica que tiene coordenadas cartesianas, de forma que una de las rectas se extienda a lo largo del eje x. La distancia recorrida *en sentido contrario a las agujas de un reloj* sobre la circunferencia desde el eje de las x positivas hasta alcanzar la intersección de la circunferencia con la otra línea define la medida del ángulo. (Desplazarse hacia la segunda recta en el sentido de las agujas del reloj daría simplemente una medida negativa; para ilustrar conceptos básicos, colocamos el ángulo de tal manera que la rotación más pequeña sea en la dirección contraria a las agujas del reloj.)

La unidad más común para expresar la medida de un ángulo es el **grado**, que equivale a 1/360 de la longitud de la circunferencia. Para mayor precisión, o para ángulos más pequeños, indicamos grados, minutos (′) y segundos (″), siendo $1' = 1°/60$

y $1'' = 1'/60 = 1°/3600$; o también indicamos los grados como un número decimal ordinario.

En el trabajo científico, la medida más útil de un ángulo es el **radián** (rad). De nuevo, se coloca el ángulo con su vértice en el centro de un círculo y se mide la rotación alrededor de la circunferencia en sentido contrario a las agujas de un reloj. La medida del ángulo en radianes se define entonces como la longitud del arco circular desde una recta a la otra dividida por el radio del círculo (figura M.10). Si la longitud del arco es s y el radio del círculo vale r, el ángulo θ medido en radianes es

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{M.26}$$

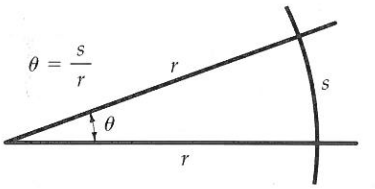


FIGURA M.10 Se define el ángulo θ en radianes como el cociente s/r, siendo s la longitud del arco interceptado sobre un círculo de radio r.

Como el ángulo medido en radianes es el cociente de dos longitudes, es adimensional. La relación entre radianes y grados es

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

o sea

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57{,}3°$$

En la figura M.11, se muestran algunas relaciones útiles entre ángulos.

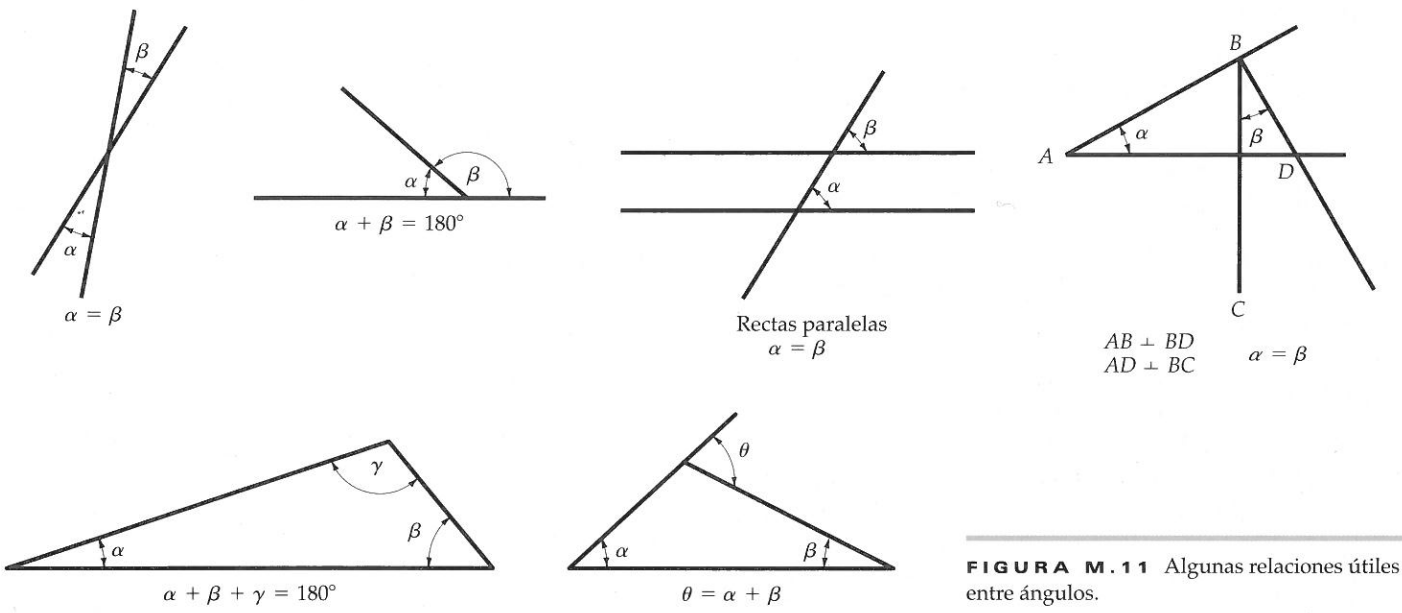


FIGURA M.11 Algunas relaciones útiles entre ángulos.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la figura M.12, se ha dibujado un triángulo rectángulo trazando la recta BC perpendicular a AC. Las longitudes de los lados se denominan a, b y c. Se definen las funciones trigonométricas sen θ, cos θ y tg θ de un ángulo agudo θ como

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{M.27}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{M.28}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} \qquad \text{M.29}$$

(**Ángulos agudos** son ángulos cuya rotación positiva alrededor de la circunferencia de un círculo es menor que 90° o $\pi/2$.) Existen otras tres funciones trigonomé-

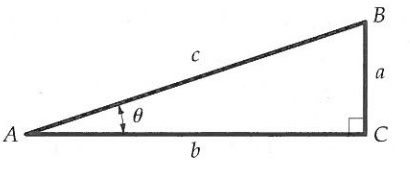


FIGURA M.12 Triángulo rectángulo con catetos de longitud a y b e hipotenusa de longitud c.

tricas inversas de las anteriores y denominadas **secante** (sec), **cosecante** (cosec) y **cotangente** (cotg)

$$\sec\theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{M.30}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{M.31}$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{M.32}$$

El ángulo θ cuyo seno es x se denomina arco seno de x y se escribe arcsen x. Es decir, si

$$\operatorname{sen}\theta = x$$

será

$$\theta = \operatorname{arcsen} x = \operatorname{sen}^{-1} x \qquad \text{M.33}$$

El arco seno es el inverso del seno. De modo análogo, se definen los inversos del coseno y de la tangente. El ángulo cuyo coseno es y es el arco coseno de y. Es decir, si

$$\cos\theta = y$$

será

$$\theta = \arccos y = \cos^{-1} y \qquad \text{M.34}$$

El ángulo cuya tangente es z es el arco tangente de z. Es decir, si

$$\operatorname{tg}\theta = z$$

será

$$\theta = \operatorname{arctg} z = \operatorname{tg}^{-1} z \qquad \text{M.35}$$

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Se pueden deducir varias fórmulas útiles, llamadas **identidades trigonométricas**, analizando relaciones entre las funciones trigonométricas. Las ecuaciones M.30-M.32 recogen tres de las más evidentes identidades, fórmulas que expresan algunas funciones trigonométricas como recíprocas de otras. Casi tan fáciles de obtener son las identidades deducidas del **teorema de Pitágoras**,

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{M.36}$$

(La figura M.13 constituye una demostración gráfica del teorema.) Operaciones algebraicas sencillas de la ecuación M.36 nos dan tres identidades más. Primero, si dividimos cada término de esta ecuación por c^2, se obtiene

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

o bien, a partir de las definiciones de sen θ y cos θ,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{M.37}$$

Análogamente, se puede dividir cada término de la ecuación M.36 por a^2 o b^2 y así obtener

$$1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \qquad \text{M.38}$$

y

$$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{M.39}$$

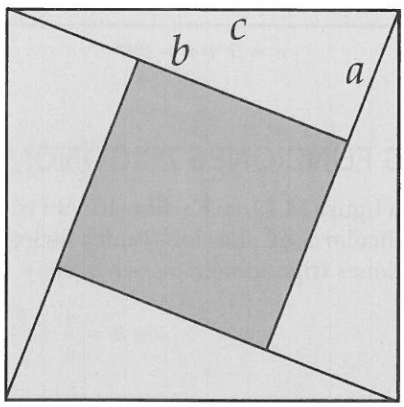


FIGURA M.13 Cuando se publicó por primera vez esta figura no aparecían las letras, pero venía acompañada de la frase: "¡Fíjese bien! Utilizando el dibujo, demuestre el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$."

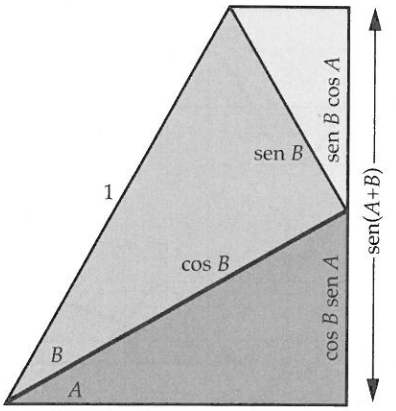


FIGURA M.14 Haciendo uso de este dibujo, demostrar la relación sen $(A + B)$ = sen A cos B + cos A sen B. También se puede utilizar para probar la relación cos $(A + B)$ = cos A cos B − sen A sen B. Inténtelo.

Tabla M.2 Fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(A \pm B)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(A \mp B)\right]$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left[\frac{1}{2}(A + B)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(A - B)\right]$$

$$\cos A - \cos B = 2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(A + B)\right] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}(B - A)\right]$$

$$\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen}(A \pm B)}{\cos A \cos B}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1;\ \sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1;\ \operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{cotg}^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}};\ \cos\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}};\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$$

En la tabla M.2, se relacionan éstas y otras fórmulas trigonométricas de interés. Obsérvese que pertenecen a cuatro categorías: funciones de sumas o diferencias de ángulos, sumas o diferencias de cuadrados de funciones, funciones de ángulos dobles (2θ), y funciones de ángulos mitad $\left(\frac{1}{2}\theta\right)$. Fíjese también que algunas de las fórmulas contienen pares de alternativas, expresadas con los signos $\pm$ y $\mp$; recordar que esas fórmulas siempre se aplican con todos los signos "superiores" o con todos los signos "inferiores". La figura M.14 es una demostración gráfica de las dos primeras fórmulas de suma de ángulos

ALGUNOS VALORES IMPORTANTES DE LAS FUNCIONES

La figura M.15 es un diagrama de un triángulo rectángulo **isósceles** (un triángulo isósceles es un triángulo con dos lados iguales) a partir del cual se puede hallar el seno, el coseno y la tangente de 45°. Los dos ángulos agudos de este triángulo son iguales. Como la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180° y el ángulo recto mide 90°, cada ángulo agudo debe medir 45°. Para simplificar, supongamos que cada uno de los lados iguales tiene una longitud de 1 unidad. El teorema de Pitágoras nos da un valor para la hipotenusa de

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ unidades}$$

Calculamos los valores de las funciones de la manera siguiente.

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \quad \cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \quad \operatorname{tg} 45° = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$$

Otro triángulo común, el triángulo **rectángulo 30°-60°**, aparece en la figura M.16. Como este triángulo rectángulo es la mitad de un triángulo equilátero (un triángulo 60°-60°-60°, o un triángulo que tiene tres lados iguales y tres ángulos iguales), se puede ver que el seno de 30° debe ser exactamente 0,5 (figura M.17). El triángulo **equilátero** tiene todos los lados iguales a c, la hipotenusa del triángulo rectángulo 30°-60°. Así, el lado a es la mitad de la longitud de la hipotenusa, y por lo tanto,

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$$

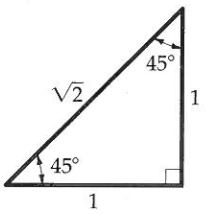


FIGURA M.15 Triángulo rectángulo isósceles.

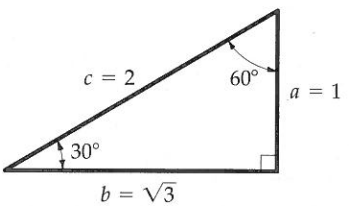


FIGURA M.16 Triángulo rectángulo de ángulos 30°-60°.

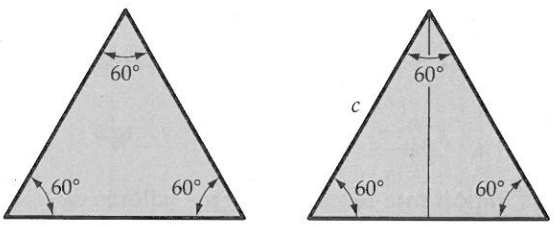


FIGURA M.17 (*a*) Un triángulo equilátero. (*b*) Un triángulo equilátero que se ha dividido por medio de una bisectriz para formar dos triángulos rectángulos de ángulos 30°-60°.

Para hallar las otras razones dentro del triángulo rectángulo de ángulos 30°-60°, asignamos un valor de 1 al lado opuesto al ángulo de 30°. Entonces

$$c = \frac{1}{0{,}5} = 2 \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866 \qquad \text{tg } 30° = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

$$\text{sen } 60° = \frac{b}{c} = \cos 30° = 0{,}866 \qquad \cos 60° = \frac{a}{c} = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1{,}732$$

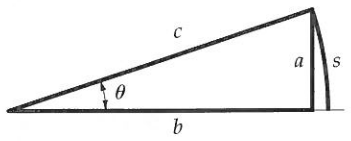


FIGURA M.18 En el caso de ángulos pequeños, sen $\theta = a/c$, tg $\theta = a/b$ y el ángulo $\theta = s/c$ son todos ellos aproximadamente iguales.

APROXIMACIÓN DE ÁNGULOS PEQUEÑOS

En el caso de ángulos pequeños, la longitud a es casi igual a la longitud s del arco, como puede verse en la figura M.18. Por lo tanto, el ángulo $\theta = s/c$ es casi igual a sen $\theta = a/c$:

$$\text{sen } \theta \approx \theta \qquad \text{para valores pequeños de } \theta \qquad \text{M.40}$$

Análogamente, las longitudes c y b son casi iguales, de forma que tg $\theta = a/b$ es también casi igual tanto a θ como a sen θ para valores pequeños de θ:

$$\text{tg } \theta \approx \text{sen } \theta \approx \theta \qquad \text{para valores pequeños de } \theta \qquad \text{M.41}$$

Las ecuaciones M.40 y M.41 son válidas únicamente si θ se mide en radianes. Como cos $\theta = b/c$ y estas longitudes son prácticamente iguales para valores pequeños de θ, tenemos

$$\cos \theta \approx 1 \qquad \text{para valores pequeños de } \theta \qquad \text{M.42}$$

En la figura M.19, puede verse un gráfico de θ, sen θ y tg θ para valores pequeños de θ. Si se necesita una precisión con un pequeño porcentaje de aproximación, se pueden utilizar las aproximaciones de ángulos pequeños para ángulos de alrededor de un cuarto de radián (o 15°) o menores. Por debajo de este valor, conforme el ángulo se hace más pequeño, la aproximación $\theta \approx \text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta$ es incluso más exacta.

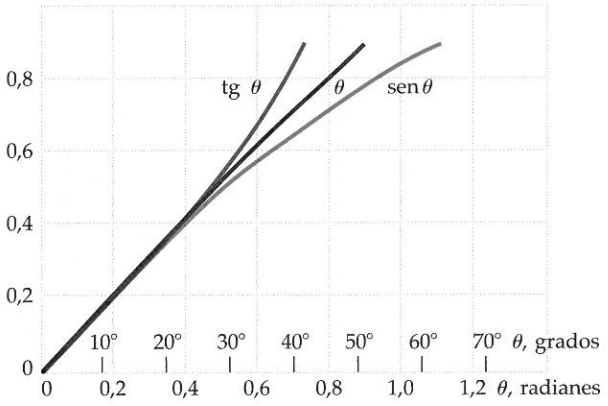


FIGURA M.19 Gráficos de tg θ, θ y sen θ en función de θ para pequeños valores de θ.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMO FUNCIONES DE NÚMEROS REALES

Hasta aquí hemos presentado las funciones trigonométricas como propiedades de ángulos. La figura M.20 muestra un ángulo **obtuso** con su vértice en el origen y un lado sobre el eje x. Para un ángulo genérico, las funciones trigonométricas se definen como

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{c} \qquad \text{M.43}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{c} \qquad \text{M.44}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{x} \qquad \text{M.45}$$

Es importante recordar que los valores de x a la izquierda del eje vertical y los de y por debajo del eje horizontal son negativos; c en la figura se considera siempre positiva. En la figura M.21, se han representado estas funciones en función de θ. La función seno tiene un periodo de 2π rad. Así, para cualquier valor de θ, sen $(\theta + 2\pi) = \text{sen } \theta$. Es decir, cuando un ángulo varía en 2π rad, la función

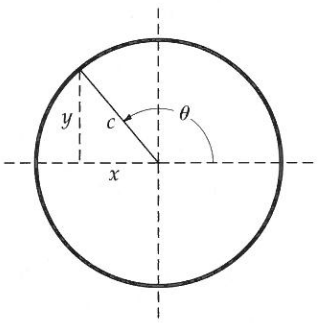


FIGURA M.20 Diagrama para definir las funciones trigonométricas en un ángulo obtuso.

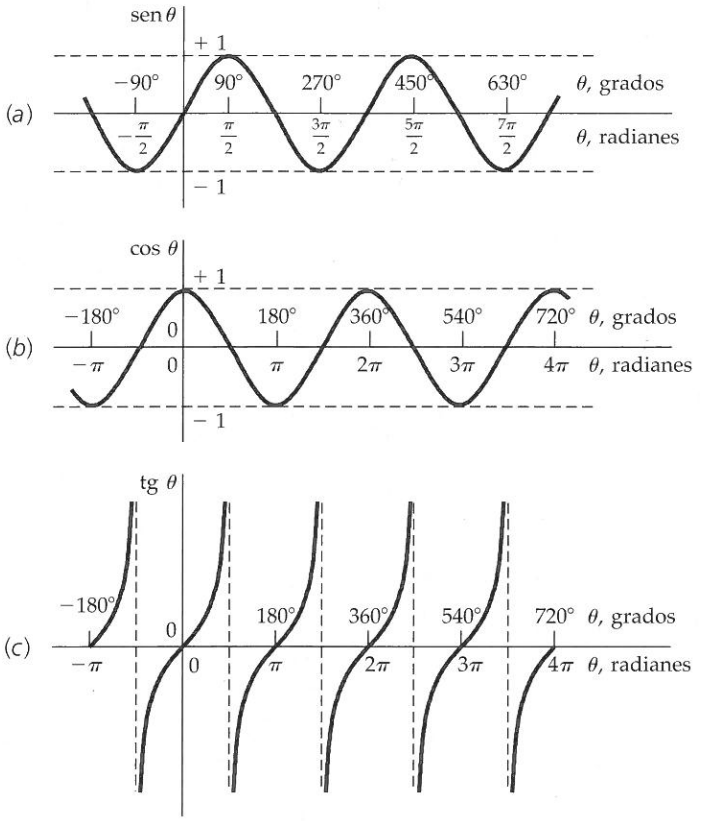


FIGURA M.21 Funciones trigonométricas sen θ, cos θ y tg θ en función del ángulo θ.

vuelve a tener su valor original. La función tangente tiene un periodo de π rad. Así, $\text{tg}(\theta + \pi) = \text{tg}\ \theta$, y así sucesivamente. Otras relaciones útiles son

$$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\ \theta \qquad \text{M.46}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad \text{M.47}$$

$$\text{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \cos\theta \qquad \text{M.48}$$

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \text{sen}\ \theta \qquad \text{M.49}$$

Como el radián es adimensional, no es difícil ver a partir de las curvas de la figura M.21 que las funciones trigonométricas son funciones de todos los números reales. Las funciones trigonométricas pueden expresarse en series de potencias de θ. Las series para el sen θ y el cos θ son

$$\text{sen}\ \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \qquad \text{M.50}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \qquad \text{M.51}$$

Cuando θ es pequeño, se obtienen buenas aproximaciones utilizando sólo los primeros términos de las series.

Ejemplo M.9 Coseno de una suma

Haciendo uso de la fórmula trigonométrica apropiada de la tabla M.2, hallar cos (135° + 22°). Dar la respuesta con cuatro cifras significativas.

PLANTEAMIENTO Mientras todos los ángulos estén dados en grados, no hay necesidad de hacer la conversión a radianes, porque todas las operaciones son valores numéricos de las funciones. Sin embargo, hay que estar seguros de que la calculadora está en el modo grado. La fórmula adecuada es $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \text{sen}\ A\ \text{sen}\ B$, donde los signos superiores son los que hay que considerar.

SOLUCIÓN

1. Escribir la fórmula trigonométrica para el coseno de una suma, con $A = 135°$ y $B = 22°$: $\cos(135° + 22°) = (\cos 135°)(\cos 22°) - (\text{sen } 135°)(\text{sen } 22°)$
2. Utilizando una calculadora, hallar cos 135°, sen 135°, cos 22° y sen 22°: $\cos 135° = -0{,}7071$ $\quad \text{sen } 135° = 0{,}7071$ $\quad \cos 22° = 0{,}9272$ $\quad \text{sen } 22° = 0{,}3746$
3. Introducir los valores en la fórmula y calcular la respuesta: $\cos(135° + 22°) = (-0{,}7071)(0{,}9272) - (0{,}7071)(0{,}3746) = -0{,}9205$

COMPROBACIÓN La calculadora muestra que el $\cos(135° + 22°) = \cos(157°) = -0{,}9205$.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

19. Hallar sen θ y cos θ para el triángulo rectángulo de la figura M.12 en el que $a = 4$ cm y $b = 7$ cm. ¿Cuál es el valor de θ?
20. Hallar sen θ, siendo $\theta = 8{,}2°$. ¿Concuerda el valor obtenido con la aproximación de ángulos pequeños?

M.9 DESARROLLO DEL BINOMIO

Un **binomio** es una expresión que consta de dos términos unidos por un signo + o −. El **teorema del binomio** establece que un binomio elevado a una potencia puede escribirse, o desarrollarse, como una serie de términos. Si el binomio $(1 + x)$ se eleva a una potencia n, el teorema del binomio adopta la forma

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad \text{M.52}$$

La serie es válida para cualquier valor de n si $|x|$ es menor que 1. El desarrollo del binomio es muy útil para obtener expresiones algebraicas aproximadas, porque cuando $|x| < 1$, los términos de mayor orden en la suma son pequeños. (El orden de un término es la potencia de x en el término. Así, los términos mostrados de manera explícita en la ecuación M.52 son de orden 0, 1, 2 y 3.) La serie es especialmente útil cuando $|x|$ es pequeño comparado con 1; en este caso, cada término es *mucho* menor que el término precedente y pueden eliminarse todos salvo los dos o tres primeros términos del desarrollo. Si $|x|$ es mucho menor que 1, se tiene

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx, \qquad |x| \ll 1 \qquad \text{M.53}$$

El desarrollo del binomio se utiliza para deducir muchas fórmulas de cálculo que son importantes en física. Un uso muy conocido en física de la aproximación de la ecuación M.53 es la prueba de que la energía cinética relativista se reduce a la fórmula clásica cuando la velocidad de una partícula es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz c.

Ejemplo M.10 Uso del desarrollo del binomio en el cálculo de la potencia de un número

Utilizar la ecuación M.53 para hallar un valor aproximado de la raíz cuadrada de 101.

PLANTEAMIENTO El número 101 sugiere fácilmente un binomio, a saber, (100 + 1). Para aproximarse a la respuesta por medio del desarrollo del binomio, hemos de manipular la expresión para conseguir un binomio que conste de 1 y un término menor que 1.

SOLUCIÓN

1. Escribir $(101)^{1/2}$ para dar una expresión $(1 + x)^n$ en la que x es mucho menor que 1: $(101)^{1/2} = (100 + 1)^{1/2} = (100)^{1/2}(1 + 0{,}01)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2}$
2. Utilizar la ecuación M.53 con $n = \frac{1}{2}$ y $x = 0{,}01$ para desarrollar $(1 + 0{,}01)^{1/2}$: $(1 + 0{,}01)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(0{,}01) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(0{,}01)^2 + \cdots$

3. Como $|x| \ll 1$, es de esperar que la magnitud de los términos de orden 2 y superiores sea considerablemente más pequeña que la del término de primer orden. Aproximar el binomio (1) manteniendo sólo los términos de orden cero y de primer orden, y (2) manteniendo sólo los tres primeros términos:

Conservando sólo los términos de órdenes cero y uno, da

$$(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(0{,}01) = 1 + 0{,}0050000$$
$$= 1{,}0050000$$

Si se conservan sólo los de orden cero, uno y dos, da

$$(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(0{,}01) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(0{,}01)^2$$
$$\approx 1 + 0{,}0050000 - 0{,}0000125$$
$$= 1{,}0049875$$

4. Sustituir estos resultados en la ecuación del paso 1:

Manteniendo sólo los términos de órdenes cero y uno, da

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx \boxed{10{,}050000}$$

Manteniendo sólo los términos de órdenes cero, uno y dos, da

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx \boxed{10{,}049875}$$

COMPROBACIÓN Es de esperar que la respuesta sea correcta dentro de un margen del 0,001%. El valor de $(101)^{1/2}$, con ocho cifras, es 10,049876. Este difiere de 10,050000 en 0,000124, o alrededor de una parte en 10^5, y difiere de 10,049875 en aproximadamente una parte en 10^7.

PROBLEMAS PRÁCTICOS En los problemas que se dan a continuación, calcular la respuesta quedándose en el desarrollo del binomio con los términos de orden cero y uno (ecuación M.53), hallar la respuesta utilizando una calculadora y mostrar la discrepancia porcentual entre los dos valores.

21. $(1 + 0{,}001)^{-4}$
22. $(1 - 0{,}001)^{40}$

M.10 NÚMEROS COMPLEJOS

Números reales son todos los números, desde $-\infty$ a $+\infty$, que pueden *ordenarse*. Sabemos que, dados dos números reales, uno es siempre igual, mayor o menor que el otro. Por ejemplo, $3 > 2$, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, y $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. Un número que no se *puede* ordenar es $\sqrt{-1}$; no se puede dar el valor de este número y, por tanto, no tiene sentido decir, por ejemplo, que $3 \times \sqrt{-1}$ es mayor que o menor que $2 \times \sqrt{-1}$. Los primeros matemáticos que trataron con números que contenían $\sqrt{-1}$ llamaron a estos números *imaginarios* porque no podían usarse para medir o contar algo. En matemáticas se utiliza el símbolo i para representar $\sqrt{-1}$.

La ecuación M.5, la fórmula cuadrática, se aplica a ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La fórmula muestra que no hay raíces reales cuando $b^2 < 4ac$. Hay todavía, sin embargo, dos raíces. Cada una de las raíces es un número que contiene dos términos: un número real y un múltiplo de $i = \sqrt{-1}$. El múltiplo de i recibe el nombre de **número imaginario** e i se denomina **unidad imaginaria**.

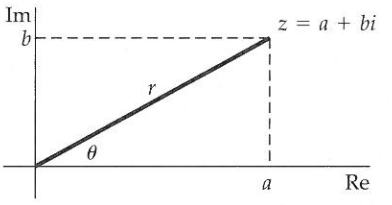
Un **número complejo** z, en general, puede escribirse como

$$z = a + bi \qquad \text{M.54}$$

donde a y b son números reales. Al número a se le llama parte real y al b parte imaginaria de z. Podemos representar un número complejo z en un plano, como se ve en la figura M.22, en donde el eje x es el **eje real** y el eje y es el **eje imaginario**. Pueden utilizarse las relaciones $a = r\cos\theta$ y $b = r\,\text{sen}\,\theta$ de la figura M.22 para expresar el número complejo z mediante **coordenadas polares** (un sistema en el que un punto se designa por el ángulo de rotación θ y la distancia r en la dirección de θ):

$$z = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{M.55}$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ se denomina **módulo** o **magnitud** de z



$$z = a + bi$$
$$= r\cos\theta + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$
$$= r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

FIGURA M.22 Representación de un número complejo en un plano. La parte real del número complejo se representa a lo largo del eje horizontal y la parte imaginaria a lo largo del eje vertical.

Cuando se han de sumar o restar números complejos, sus partes reales y sus partes imaginarias se suman o restan por separado:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \qquad \text{M.56}$$

Sin embargo, cuando se han de multiplicar dos números complejos, se debe multiplicar cada término de un factor por cada término del otro:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + i^2b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned} \qquad \text{M.57}$$

donde hemos utilizado $i^2 = -1$.

El **complejo conjugado** z^* de un número complejo z es aquel número que se obtiene sustituyendo i por $-i$. Si $z = a + ib$, z^* es

$$z^* = (a + ib)^* = a - ib \qquad \text{M.58}$$

(Cuando una ecuación cuadrática tiene raíces complejas, las raíces son **números complejos conjugados**, de la forma $a \pm bi$.) El producto de un número complejo por su complejo conjugado es igual al cuadrado del módulo de dicho número:

$$zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2 \qquad \text{M.59}$$

Una función de un número complejo particularmente útil es la exponencial $e^{i\theta}$. Haciendo uso del desarrollo e^x, se tiene

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

Utilizando $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, y así sucesivamente, y separando las partes reales de las imaginarias, este desarrollo puede escribirse como

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right)$$

Comparando este resultado con las ecuaciones M.50 y M.51, podemos ver que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \qquad \text{M.60}$$

Y haciendo uso de este resultado, podemos expresar un número complejo en general como una exponencial

$$z = a + ib = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = re^{i\theta} \qquad \text{M.61}$$

Si $z = x + iy$, donde x e y son variables reales, entonces z es una **variable compleja**.

VARIABLES COMPLEJAS EN FÍSICA

Las variables complejas se utilizan a menudo en fórmulas que describen circuitos de corriente alterna: la impedancia de un condensador o un inductor incluye una parte real (la resistencia) y una parte imaginaria (la reactancia). (Sin embargo, hay maneras alternativas de analizar los circuitos ac, como los vectores giratorios llamados *fasores*, que no necesitan que se les asignen valores imaginarios.) Las variables complejas son importantes también en el estudio de ondas armónicas por medio del análisis y síntesis de Fourier. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo contiene una función de variable compleja de la posición y el tiempo.

Ejemplo M.11 Hallar una potencia de un número complejo

Calcular $(1 + 3i)^4$ haciendo uso del desarrollo del binomio.

PLANTEAMIENTO La expresión es de la forma $(1 + x)^n$. Como n es un entero positivo, el desarrollo es válido para cualquier valor de x, y todos los términos distintos de los de orden n o más pequeños deben ser iguales a cero.

SOLUCIÓN

1. Escribir el desarrollo de $(1 + 3i)^4$ para mostrar los términos hasta el cuarto orden:

$$1 + 4 \cdot 3i + \frac{4(3)}{2!}(3i)^2 + \frac{4(3)(2)}{3!}(3i)^3 + \frac{4(3)(2)(1)}{4!}(3i)^4$$

2. Obtener cada término, recordando que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, y $i^4 = +1$: $1 + 12i - 54 - 108i + 81$

3. Mostrar el resultado en la forma $a + bi$: $(1 + 3i)^4 = \boxed{28 - 96i}$

COMPROBACIÓN Se puede resolver el problema algebraicamente para mostrar que la solución es correcta. Primero se eleva al cuadrado $(1 + 3i)$ y, a continuación, el valor obtenido se eleva de nuevo al cuadrado para obtener $(1 + 3i)^4$:

$$(1 + 3i)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$$
$$(-8 + 6i)^2 = (-8)(-8) + 2(-8)(6i) + (6i)^2 = 64 - 96i - 36 = 28 - 96i$$

PROBLEMAS PRÁCTICOS Expresar en la forma $a + bi$:

23. $e^{i\pi}$

24. $e^{i\pi/2}$

M.11 CÁLCULO DIFERENCIAL

El **cálculo** es la rama de las matemáticas que permite establecer tasas instantáneas de variación de funciones y variables. A partir de la ecuación de una función, digamos x función de t, se puede siempre hallar x para un valor particular de t. pero con los métodos del cálculo se puede ir mucho más lejos. Se puede saber dónde x tendrá ciertas propiedades, tales como un valor máximo o mínimo, sin tener que manejar interminables valores de t. Con el cálculo, si se dan los datos apropiados, se puede hallar, por ejemplo, la posición del esfuerzo máximo en una viga, o la velocidad y posición en el tiempo t de un objeto que cae, o la energía que adquiere al caer un objeto en un tiempo t o la energía que adquiere durante el impacto el cuerpo que cae. Las reglas del cálculo tienen su origen en el examen de las funciones a nivel infinitesimal, analizando, pongamos por caso, cómo variará x cuando t se vaya haciendo cada vez más pequeño. Empezamos con el **cálculo diferencial**, en el que se determina el límite de la tasa de variación de x con respecto a t cuando la variación en t se hace cada vez más próxima a cero.

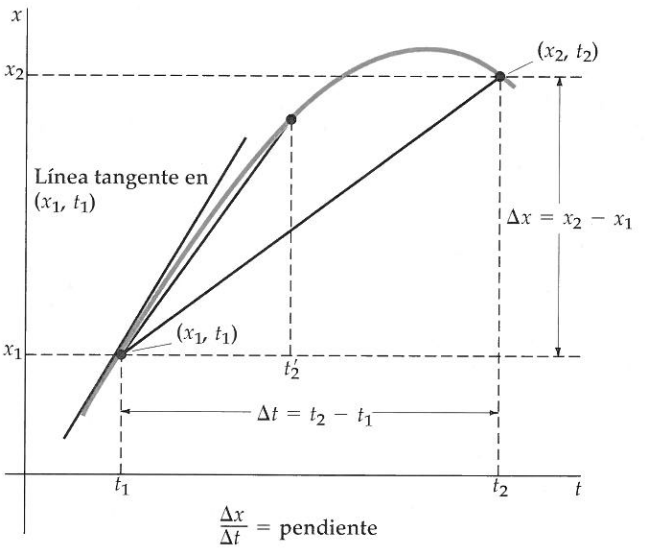


FIGURA M.23 Representación gráfica de una función típica $x(t)$. Los puntos (x_1, t_1) y (x_2, t_2) están unidos por una recta, cuya pendiente es $\Delta x/\Delta t$. Cuando disminuye el intervalo de tiempo que comienza en t_1, la pendiente de dicho intervalo se aproxima a la pendiente de la tangente a la curva en el instante t_1, que es la derivada de x respecto a t.

La figura M.23 muestra un gráfico de x en función de t para una función típica $x(t)$. Para un valor particular $t = t_1$, x tiene el valor x_1, como está indicado; y para otro t_2, x tiene el valor x_2. La variación o incremento de t, $t_2 - t_1$, se escribe $\Delta t = t_2 - t_1$, y el correspondiente a x, se escribe $\Delta x = x_2 - x_1$. El cociente $\Delta x/\Delta t$ es la pendiente de la recta que une los puntos (x_1, t_1) y (x_2, t_2). Si hacemos a Δt cada vez menor, la recta que acabamos de mencionar tiende a convertirse en la tangente a la curva en el punto (x_1, t_1). La pendiente de esta recta tangente se denomina **derivada** de x respecto a t, y se escribe dx/dt:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{M.62}$$

(Cuando hemos hallado la derivada de una función, decimos que hemos **derivado** la función; y los elementos muy pequeños "dx" y "dy" se denominan **diferenciales** de x y t, respectivamente.) La derivada de una función de t es otra función de t. Si x es una constante y no varía, la representación gráfica de x frente a t es una recta horizontal de pendiente cero. Por lo tanto, la derivada de una constante es cero. En la figura M.24, x no es constante sino proporcional a t:

$$x = Ct$$

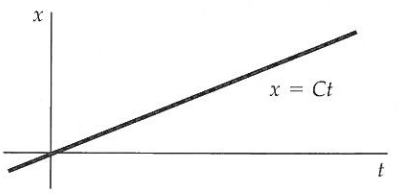


FIGURA M.24 Representación gráfica de la función lineal $x = Ct$. Esta función tiene una pendiente constante C.

Esta función tiene una pendiente constante igual a C. Así, la derivada de Ct es C. La tabla M.3 recoge algunas propiedades de las derivadas y las derivadas de algunas funciones que aparecen a menudo en física, seguidas de comentarios encaminados a hacer estas propiedades y reglas más claras. Se pueden encontrar análisis más detallados en la mayoría de los libros de cálculo.

Tabla M.3 Propiedades de las derivadas y derivadas de funciones particulares

Linealidad

1. La derivada de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función:

$$\frac{d}{dt}[Cf(t)] = C\frac{df(t)}{dt}$$

2. La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones:

$$\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

Regla de la cadena

3. Si f es función de x y a su vez x es función de t, la derivada de f respecto a t es igual al producto de la derivada de f respecto a x por la derivada de x respecto a t:

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Derivada de un producto

4. La derivada de un producto de funciones $f(t)g(t)$ es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera:

$$\frac{d}{dt}[f(t)g(t)] = f(t)\frac{dg(t)}{dt} + g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

Derivada inversa

5. La derivada de t respecto a x es la recíproca de la derivada de x respecto a t, suponiendo que ninguna de ellas sea nula:

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} \quad \text{si} \quad \frac{dt}{dx} \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Derivadas de funciones particulares

6. Si C es una constante, entonces $dC/dt = 0$.

7. $\dfrac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}$ Si n es constante.

8. $\dfrac{d}{dt}\operatorname{sen}\omega t = \omega\cos\omega t$ Si ω es constante.

9. $\dfrac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\operatorname{sen}\omega t$ Si ω es constante.

10. $\dfrac{d}{dt}\operatorname{tg}\omega t = \omega\operatorname{sen}^2\omega t$ Si ω es constante.

11. $\dfrac{d}{dt}e^{bt} = be^{bt}$ Si b es constante.

12. $\dfrac{d}{dt}\ln bt = \dfrac{1}{t}$ Si b es constante.

COMENTARIOS A LAS REGLAS 1 A 5

Las reglas 1 y 2 resultan del hecho de que el proceso de límite es lineal. Podemos comprender la regla 3 (regla de la cadena) multiplicando $\Delta f/\Delta t$ por $\Delta x/\Delta x$ y observando que, puesto que x es una función de t, tanto Δx como Δf tienden a cero cuando Δt tiende a cero. Entonces, se tiene

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta t}\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

ya que el límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.

La regla 4 no resulta tan evidente. La derivada de un producto de funciones es el límite del cociente

$$\frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t)-f(t)g(t)}{\Delta t}$$

Si sumamos y restamos la cantidad $f(t+\Delta t)g(t)$ en el numerador, podemos escribir este cociente como

$$\frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t)-f(t+\Delta t)g(t)+f(t+\Delta t)g(t)-f(t)g(t)}{\Delta t}$$
$$=f(t+\Delta t)\left[\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right]+g(t)\left[\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\right]$$

Cuando Δt tiende a cero, los términos entre corchetes se convierten en $dg(t)/dt$ y $df(t)/dt$, respectivamente, y el límite de esta expresión es

$$f(t)\frac{dg(t)}{dt}+g(t)\frac{df(t)}{dt}$$

La regla 5 se deduce directamente de la definición:

$$\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^{-1}=\left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1}$$

COMENTARIOS A LA REGLA 7

Podemos obtener este importante resultado utilizando el desarrollo del binomio. Se tiene

$$f(t)=t^n$$
$$f(t+\Delta t)=(t+\Delta t)^n=t^n\left(1+\frac{\Delta t}{t}\right)^n$$
$$=t^n\left[1+n\frac{\Delta t}{t}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^3+\cdots\right]$$

Entonces

$$f(t+\Delta t)-f(t)=t^n\left[n\frac{\Delta t}{t}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2+\cdots\right]$$

y

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=nt^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}t^{n-2}\Delta t+\cdots$$

El término siguiente que se ha omitido de la última suma es proporcional a $(\Delta t)^2$, el siguiente lo es a $(\Delta t)^3$, y así sucesivamente. Todos los términos excepto el primero tienden a cero cuando Δt tiende a cero. Así pues,

$$\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=nt^{n-1}$$

COMENTARIOS A LAS REGLAS 8 A 10

Escribiremos sen ωt = sen θ, siendo $\theta=\omega t$, y utilizaremos la regla de la cadena,

$$\frac{d\,\text{sen}\,\theta}{dt}=\frac{d\,\text{sen}\,\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\omega\frac{d\,\text{sen}\,\theta}{d\theta}$$

Luego emplearemos la fórmula trigonométrica correspondiente al seno de la suma de dos ángulos θ y $\Delta\theta$:

$$\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) = \operatorname{sen}\Delta\theta \cos\theta + \cos\Delta\theta \operatorname{sen}\theta$$

Como $\Delta\theta$ ha de tender a cero, podemos utilizar las aproximaciones correspondientes a ángulos pequeños

$$\operatorname{sen}\Delta\theta \approx \Delta\theta \qquad \text{y} \qquad \cos\Delta\theta \approx 1$$

Entonces

$$\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) \approx \Delta\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$$

y

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) - \operatorname{sen}\theta}{\Delta\theta} \approx \cos\theta$$

Puede aplicarse un razonamiento semejante a la función coseno para obtener la regla 9.

La regla 10 se obtiene escribiendo $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$ y aplicando la regla 4, así como las reglas 8 y 9:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\operatorname{tg}\theta) = \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)^{-1} &= \operatorname{sen}\theta\frac{d}{dt}(\cos\theta)^{-1} + \frac{d(\operatorname{sen}\theta)}{dt}(\cos\theta)^{-1} \\ &= \operatorname{sen}\theta(-1)(\cos\theta)^{-2}(-\operatorname{sen}\theta) + (\cos\theta)(\cos\theta)^{-1} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta\end{aligned}$$

Para obtener la regla 10, sustituir $\theta = \omega t$ y usar la regla de la cadena.

COMENTARIOS A LA REGLA 11

Una vez más utilizamos la regla de la cadena

$$\frac{de^{\theta}}{dt} = \frac{b\,de^{\theta}}{b\,dt} = b\frac{de^{\theta}}{d(bt)} = b\frac{de^{\theta}}{d\theta} \qquad \text{con} \qquad \theta = bt$$

y el desarrollo en serie de la función exponencial:

$$e^{\theta+\Delta\theta} = e^{\theta}e^{\Delta\theta} = e^{\theta}\left[1 + \Delta\theta + \frac{(\Delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\Delta\theta)^3}{3!} + \cdots\right]$$

Entonces

$$\frac{e^{\theta+\Delta\theta} - e^{\theta}}{\Delta\theta} = e^{\theta} + e^{\theta}\frac{\Delta\theta}{2!} + e^{\theta}\frac{(\Delta\theta)^2}{3!} + \cdots$$

Cuando $\Delta\theta$ tiende a cero, el segundo miembro de la ecuación anterior tiende a e^{θ}.

COMENTARIOS A LA REGLA 12

Sea

$$y = \ln bt$$

Entonces

$$e^{y} = bt \Rightarrow t = \frac{1}{b}e^{y}$$

A partir de aquí, utilizando la regla 11, se obtiene

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{b}e^{y} \therefore \frac{dt}{dy} = t$$

Y, por último, utilizando la regla 5, se llega a

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dt}{dy}\right)^{-1} = \frac{1}{t}$$

DERIVADAS DE SEGUNDO ORDEN Y SUPERIOR. ANÁLISIS DIMENSIONAL

Una vez que se ha derivado una función, se puede derivar la expresión resultante mientras queden términos que derivar. Una función como $x = e^{bt}$ se puede derivar indefinidamente: $dx/dt = be^{bt}$ (esta función se deriva para dar b^2e^{bt}, y así sucesivamente).

Considerar la velocidad y la aceleración. Se puede definir la velocidad como la tasa de variación de la posición de una partícula, o dx/dt, y la aceleración como la tasa de variación de la velocidad, o la *segunda* derivada de x con respecto a t, es decir, d^2x/dt^2. Si la partícula se desplaza a velocidad constante, entonces dx/dt será constante. La aceleración, sin embargo, será cero: tener velocidad constante es lo mismo que no tener aceleración, y la derivada de una constante es cero. Consideremos ahora la caída de un objeto sometido a la aceleración constante de la gravedad: la velocidad dependerá del tiempo y la *segunda* derivada d^2x/dt^2 será constante.

Las *dimensiones físicas* de una derivada con respecto a una variable son aquellas que resultarían si la función original de la variable se dividiese por el valor de la variable. Por ejemplo, la dimensión de una ecuación en la que un término es x (para la posición) es la de longitud (L), las dimensiones de la derivada de x con respecto al tiempo t son las de velocidad (L/T) y las dimensiones de d^2x/dt^2 son las de aceleración (L/T^2).

Ejemplo M.12 Posición, velocidad y aceleración

Hallar la primera y segunda derivada de $x = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, donde a, b y c son constantes. La función da la posición (en metros) de una partícula en una dimensión, donde t es el tiempo (en segundos), a es la aceleración (en m/s^2), b es la velocidad (en m/s) a $t = 0$, y c es la posición (en metros) de la partícula a $t = 0$.

PLANTEAMIENTO Tanto la primera como la segunda derivada son sumas de términos; para cada una de las derivadas, se deriva cada término por separado y se suman los resultados.

SOLUCIÓN

1. Para hallar la derivada primera, se calcula primero la derivada del primer término: $\dfrac{d(\frac{1}{2}at^2)}{dt} = \left(\dfrac{1}{2}a\right)2t^1 = at$
2. Calcular la derivada primera del segundo y tercer término: $\dfrac{d(bt)}{dt} = b, \quad \dfrac{d(c)}{dt} = 0$
3. Sumar estos resultados: $\dfrac{dx}{dt} = at + b$
4. Para calcular la derivada segunda, repetir el proceso para el resultado del paso 3: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = a + 0 = a$

COMPROBACIÓN Las dimensiones físicas muestran que el resultado es plausible. La función es una ecuación de la posición; todos los términos están dados en metros —las unidades de t^2 y t anulan las unidades de s^2 y s en las constantes a y b, respectivamente. En la función para dx/dt, todos los términos están igualmente en m/s: la derivada de la constante c es cero y la unidad de t anula una de las unidades de s de la constante a. En la función para d^2x/dt^2, sólo la aceleración permanece constante; como era de esperar, sus dimensiones son L/T^2.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

25. Hallar dy/dx para $y = \frac{5}{8}x^3 - 24x - \frac{5}{8}$.
26. Hallar dy/dt para $y = ate^{bt}$, donde a y b son constantes.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES UTILIZANDO NÚMEROS COMPLEJOS

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que las derivadas de una función aparecen como variables. Es también una ecuación cuyas variables están relacionadas a través de sus derivadas. Considerar una ecuación de la forma

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = A\cos\omega t \qquad \text{M.63}$$

que representa un proceso físico, tal como un oscilador armónico amortiguado forzado por una fuerza sinusoidal, o una asociación *LCR* en serie forzada por una caída de potencial sinusoidal. Aunque cada uno de los parámetros de la ecuación M.63 es un número real, el término coseno dependiente del tiempo sugiere que podríamos hallar la solución estacionaria de esta ecuación introduciendo números complejos. Primero construimos la ecuación "paralela"

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = A\,\text{sen}\,\omega t \qquad \text{M.64}$$

Esta ecuación carece de significado físico por sí misma, y no tenemos interés en resolverla. Sin embargo, resulta útil para resolver la ecuación M.63. Después de multiplicar la ecuación M.64 por la unidad imaginaria i y sumarla a la ecuación M.63, se obtiene

$$\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + ai\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(b\frac{dx}{dt} + bi\frac{dy}{dt}\right) + (cx + ciy) = A\cos\omega t + Ai\,\text{sen}\,\omega t$$

A continuación, combinamos términos para obtener

$$a\frac{d^2(x+iy)}{dt^2} + b\frac{d(x+iy)}{dt} + c(x+iy) = A(\cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t) \qquad \text{M.65}$$

que es válida porque la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas. Simplificamos este resultado definiendo $z = x + iy$ y utilizando la identidad $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t$. Sustituyendo estas dos expresiones en la ecuación M.65, se obtiene

$$a\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + cz = Ae^{i\omega t} \qquad \text{M.66}$$

que ahora resolvemos para z. Una vez obtenida z, se puede hallar la solución para x utilizando $x = \text{Re}(z)$.

Como estamos buscando sólo la solución estacionaria de la ecuación M.65, podemos suponer que esta solución es de la forma $x = x_0\cos(\omega t - \phi)$, donde ϕ es una constante. Esto equivale a suponer que la solución de la ecuación M.66 es de la forma $z = \eta e^{i\omega t}$, donde η es un número complejo constante. Entonces, $dz/dt = i\omega z$, $d^2z/dt^2 = -\omega^2 z$, y $e^{i\omega t} = z/\eta$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación M.65, se obtiene

$$-a\omega^2 z + i\omega bz + cz = A\frac{z}{\eta}$$

Dividiendo ambos lados de esta ecuación por z y despejando η, resulta

$$\eta = \frac{A}{-a\omega^2 + i\omega b + c}$$

En forma polar, el denominador se expresa

$$(-a\omega^2 + c) + i\omega b = \sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}\, e^{i\phi}$$

donde $\text{tg}\,\phi = \omega^2 b^2/(-a\omega^2 + c)$. De este modo,

$$\eta = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} e^{-i\phi}$$

y

$$z = \eta e^{i\omega t} = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} [\cos(\omega t - \phi) + i \operatorname{sen}(\omega t - \phi)] \qquad \text{M.67}$$

de donde se deduce que

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} \cos(\omega t - \phi) \qquad \text{M.68}$$

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Una **función exponencial** es una función de la forma a^{bx}, donde $a > 0$ y b son constantes. La función se escribe habitualmente en la forma e^{cx}, donde c es constante.

Cuando la tasa de cambio de una cantidad es proporcional a la propia cantidad, ésta aumenta o disminuye exponencialmente, dependiendo del signo de la constante de proporcionalidad. Un ejemplo del decrecimiento exponencial es la desintegración nuclear. Si el número de núcleos radiactivos en un cierto instante es N, entonces su variación dN en un determinado intervalo de tiempo dt muy pequeño será proporcional a N y a dt:

$$dN = -\lambda N\, dt$$

donde la constante de proporcionalidad λ es la *constante de desintegración* (no confundir con la tasa de desintegración dN/dt, que decrece exponencialmente). La función N que satisface esta ecuación es

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{M.69}$$

donde N_0 es el número de núcleos radiactivos en el instante $t = 0$. La figura M.25 muestra N en función de t. Una característica del decrecimiento exponencial es que N disminuye en un factor constante en un intervalo de tiempo determinado. El intervalo de tiempo necesario para que N disminuya hasta su mitad se denomina *periodo de semidesintegración* $t_{1/2}$, que se obtiene haciendo $N = \frac{1}{2}N_0$ en la ecuación M.69 y hallando el valor de t.

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} \qquad \text{M.70}$$

Un ejemplo de *crecimiento exponencial* es el aumento de población. Si el número de organismos vivos es N, la variación de N al cabo de un intervalo de tiempo pequeño dt viene dado por

$$dN = +\lambda N\, dt$$

donde λ es ahora la *constante de crecimiento*. Entonces, la función N que satisface esta ecuación es

$$N = N_0 e^{\lambda t} \qquad \text{M.71}$$

(Obsérvese el cambio de signo del exponente.) En la figura M.26, se muestra un gráfico de esta función. Un crecimiento exponencial se caracteriza por un tiempo de duplicación T_2, que está relacionado con λ por

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} \qquad \text{M.72}$$

Muy a menudo, conocemos el crecimiento de población como un aumento porcentual por año y deseamos calcular el tiempo de duplicación. En este caso, hallamos T_2 (en años) a partir de la ecuación

$$T_2 = \frac{69{,}3}{r} \qquad \text{M.73}$$

donde r es el porcentaje por año. Por ejemplo, si la población aumenta en un 2% cada año la población se duplicará cada $69{,}3/2 \approx 35$ años. En la tabla M.4, se recogen algunas relaciones útiles de las funciones exponenciales y logarítmicas.

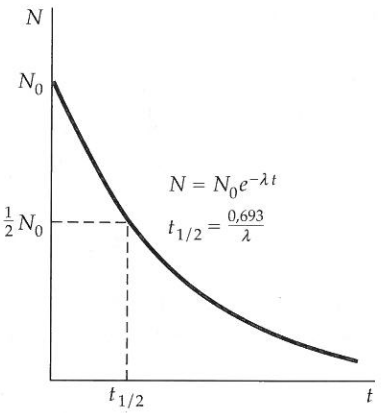


FIGURA M.25 Gráfico de N en función de t cuando N decrece exponencialmente. El tiempo $t_{1/2}$ es el tiempo que se tarda en que N disminuya a la mitad.

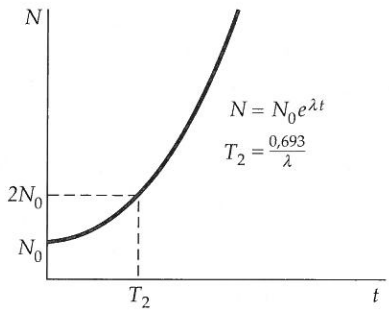


FIGURA M.26 Representación de N en función de t cuando N crece exponencialmente. El tiempo T_2 es el tiempo que emplea N en duplicarse.

Tabla M.4 Funciones exponenciales y logarítmicas

$e = 2{,}71828$

$e^0 = 1$

Si $y = e^x$, entonces $x = \ln y$

$e^{\ln x} = x$

$e^x e^y = e^{(x+y)}$

$(e^x)^y = e^{xy} = (e^y)^x$

$\ln e = 1;\ \ln 1 = 0$

$\ln xy = \ln x + \ln y$

$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

$\ln e^x = x;\ \ln a^x = x \ln a$

$\ln x = (\ln 10) \log x$

$= 2{,}30\,26 \log x$

$\log x = (\log e) \ln x = 0{,}43429 \ln x$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \ldots$

$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Ejemplo M.13 Desintegración radiactiva del cobalto-60

El período de semidesintegración del cobalto-60 (^{60}Co) es 5,27 años. A $t = 0$ se tiene una muestra de ^{60}Co de masa 1,20 mg. ¿Cuánto tiempo t (en años) habrá de transcurrir para que 0,400 mg de la muestra de ^{60}Co se hayan desintegrado?

PLANTEAMIENTO En la deducción del período de semidesintegración pusimos $N/N_0 = 1/2$. En este ejemplo, hemos de hallar el tiempo de permanencia de dos tercios de la muestra, es decir, cuando la fracción N/N_0 sea de 0,667.

SOLUCIÓN

1. Expresar la fracción N/N_0 como una función exponencial: $\frac{N}{N_0} = 0{,}667 = e^{-\lambda t}$
2. Obtener los valores recíprocos de ambos miembros: $\frac{N_0}{N} = 1{,}50 = e^{\lambda t}$
3. Despejar t: $t = \frac{\ln 1{,}50}{\lambda} = \frac{0{,}405}{\lambda}$
4. La constante de desintegración está relacionada con el período de semidesintegración por medio de $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$ (ecuación M.70). Sustituir $(\ln 2)/t_{1/2}$ por λ y calcular el tiempo: $t = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} t_{1/2} = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} \times 5{,}27 \text{ años} = 3{,}08 \text{ años}$

COMPROBACIÓN Para que la masa de una muestra de ^{60}Co decreciese hasta el 50% de su masa inicial habrían de transcurrir 5,27 años. Por lo tanto, es de esperar que la muestra tardase menos de 5,27 años para perder el 33,3% de su masa. Por tanto, el resultado obtenido (3,08 años), concuerda con lo esperado.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

27. La constante de tiempo de descarga de un condensador en un circuito RC es el tiempo que tarda el condensador en descargarse hasta e^{-1} (o sea 0,368) veces su carga a $t = 0$. Si $\tau = 1$ s para un condensador, ¿cuánto tiempo t (en segundos) habrá de transcurrir para descargarse hasta el 50% de su carga inicial?
28. Si la población de coyotes en un determinado lugar está creciendo a un ritmo del 8,0% por década y continúa creciendo al mismo ritmo indefinidamente, ¿en cuántos años se alcanzará una población 1,5 veces la actual?

M.12 CÁLCULO INTEGRAL

El **cálculo integral** se puede considerar el inverso del cálculo diferencial. Si una función $f(t)$ se integra, se obtiene una función $F(t)$, de forma que $f(t)$ es la derivada de $F(t)$ con respecto a t.

LA INTEGRAL COMO UN ÁREA BAJO UNA CURVA. ANÁLISIS DIMENSIONAL

La integración está relacionada con el problema de hallar el área bajo una curva. La figura M.27 muestra una función $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i\,\Delta t_i$, en donde f_i se calcula en un punto cualquiera del intervalo Δt_i. Esta aproximación mejora si Δt_i es muy pequeño. Se halla el área total desde t_1 hasta t_2 sumando todos los elementos de área desde t_1 a t_2 y tomando el límite cuando Δt_i tiende a cero. Este límite se denomina la **integral** de f extendida al intervalo t_1, t_2 y se escribe

$$\int f\,dt = \text{área} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i \Delta t_i \qquad \text{M.74}$$

Las dimensiones físicas de una integral de una función $f(t)$ se hallan multiplicando las dimensiones del integrando (la función que se ha de integrar) por las dimensiones de la variable de in-

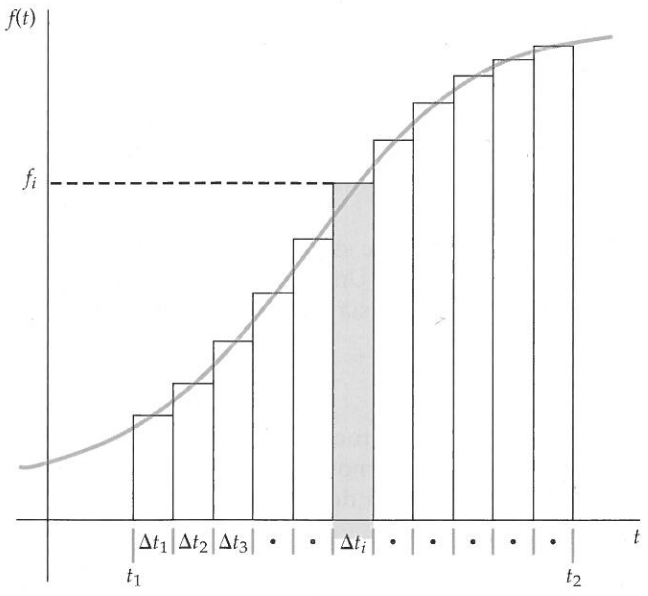


FIGURA M.27 Función general $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i\,\Delta t_i$, en donde f_i se calcula para un punto cualquiera del intervalo.

tegración t. Por ejemplo, si el integrando es una función velocidad $v(t)$ (dimensiones L/T) y la variable de integración es el tiempo t, la dimensión de la integral es L = (L/T) × T. Esto es, las dimensiones de la integral son las de la velocidad multiplicadas por el tiempo.

Sea

$$y = \int_{t_1}^{t} f\,dt \qquad \text{M.75}$$

La función y es el área bajo la curva de f en función de t desde t_1 hasta un cierto valor general t. En el caso de un intervalo Δt pequeño, la variación en el área Δy es aproximadamente $f\,\Delta t$:

$$\Delta y \approx f\,\Delta t$$

$$f \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si tomamos el límite cuando Δt tiende a cero, podemos ver que f es la derivada de y:

$$f = \frac{dy}{dt} \qquad \text{M.76}$$

INTEGRALES INDEFINIDAS E INTEGRALES DEFINIDAS

Cuando escribimos

$$y = \int f\,dt \qquad \text{M.77}$$

estamos mostrando y como una **integral indefinida** de f extendida a t. Para calcular una integral indefinida, se halla la función y cuya derivada es f. Como esa función podría contener un término constante cuya derivada es cero, se incluye como término final una **constante de integración** C. Si se integra la función sobre un segmento conocido —como el que se extiende desde t_1 a t_2 en la figura M.27— se puede hallar una **integral definida**, eliminando la constante desconocida C:

$$\int_{t_1}^{t_2} f\,dt = y(t_2) - y(t_1) \qquad \text{M.78}$$

En la tabla M.5, se recogen algunas fórmulas integrales importantes. Pueden encontrarse unas listas más extensas de fórmulas de derivadas e integrales en cualquier manual de cálculo o buscando "tablas de integrales" en Internet.

Tabla M.5 Fórmulas de integración†

1. $\int A\,dt = At$
2. $\int At\,dt = \frac{1}{2}At^2$
3. $\int At^n\,dt = A\frac{t^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$
4. $\int At^{-1}\,dt = A\ln|t|$
5. $\int e^{bt}\,dt = \frac{1}{b}e^{bt}$
6. $\int \cos\omega t\,dt = \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t$
7. $\int \operatorname{sen}\omega t\,dt = -\frac{1}{\omega}\cos\omega t$
8. $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$
9. $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
10. $\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{2}{a}$
11. $\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$
12. $\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}\,dx = \frac{4}{a^2}$
13. $\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$

† En estas fórmulas, A, b y ω son constantes. En las siete primeras fórmulas puede sumarse al segundo miembro de cada ecuación una constante arbitraria C. La constante a es mayor que cero.

Ejemplo M.14 Integración de las ecuaciones del movimiento

Una partícula se mueve con una aceleración constante a. Escribir una fórmula para la posición x en función del tiempo t si la posición y la velocidad son x_0 y v_0 cuando $t = 0$.

PLANTEAMIENTO La velocidad v es la derivada de x con respecto a t, y la aceleración es la derivada de v con respecto a t. Se podría obtener una función $x(t)$ después de efectuar dos integraciones.

SOLUCIÓN

1. Integrar a con respecto a t para hallar v como una función de t. La aceleración a puede sacarse del integrando porque es constante:

$$v = \int a\,dt = a\int dt$$

$$v = at + C_1$$

donde C_1 es a multiplicada por la constante de integración.

2. La velocidad es $v = v_0$ cuando $t = 0$:

$$v_0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0$$

de modo que $v = v_0 + at$

3. Para hallar x como una función de t, se integra v con respecto a t: $x = \int v\,dt = \int (v_0 + at)\,dt = \int v_0\,dt + \int at\,dt$

$x = v_0 \int dt + a \int t\,dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C_2$

donde C_2 representa las constantes de integración combinadas

4. La posición $x = x_0$ cuando $t = 0$: $x_0 = 0 + 0 + C_2$

de modo que $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

COMPROBACIÓN Derivar dos veces el resultado del paso 4 para obtener la aceleración

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2) = 0 + v_0 + at$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 + at) = a$$

PROBLEMAS PRÁCTICOS

29. $\int_3^6 3\,dx =$

30. $V = \int_5^8 \pi r^2\,dL =$

Respuestas a los problemas prácticos

1. 0,24 L
2. 31,6 m/s
3. 6,0 kg/cm^3
4. -3
5. 1,54 L
6. 3,07 L
7. Falso
8. $x = (4{,}5\text{ m/s})t + 3{,}0\text{ m}$
9. $x = 8, y = 60$
11. $2(x - y)^2$
12. $x^2(2x + 4)(x + 3)$
13. $x^{1/2}$
14. x^6
15. 3
16. ~ 2,322
17. $V/A = \frac{1}{3}r$
18. $A = \frac{2}{3}\pi L^2$
19. $\text{sen}\,\theta = 0{,}496$; $\cos\theta = 0{,}868$; $\theta = 29{,}7°$
20. $\text{sen}\,8{,}2° = 0{,}1426$; $8{,}2° = 0{,}1431$ rad
21. 0,996; 0,99600; próximo al 0%
22. 0,96; 0,96077; $\ll 1\%$
23. $-1 + 0i = -1$
24. $0 + i = i$
25. $dy/dx = \frac{5}{24}x^2 - 24$
26. $dy/dt = ae^{bt}(bt + 1)$
27. 0,693 s
28. 51 años
29. 9
30. $3\pi r^2$