M.A.S. FORZADO

Un vibrómetro es un aparato destinado a medir las amplitudes de las vibraciones y consiste, esencialmente, en una caja que contiene una varilla delgada a la cual está unida una masa *m*; la frecuencia natural del sistema masa-varilla es de 5 Hz. Al unir rígidamente el aparato a la carcasa de un motor que gira a razón de 600 rpm se observa que vibra con una amplitud de 1.6 mm respecto a la caja. Deducir la amplitud del movimiento vertical del motor.

Solución: I.T.T. 96, 03

Llamemos x_1 al movimiento del vibrómetro respecto del S.R. del laboratorio (es el movimiento vertical del motor), x_2 al movimiento de la masa de la varilla respecto de la caja del vibrómetro y $x = x_1 + x_2$ al movimiento de la masa de la varilla respecto del laboratorio. Con los datos del enunciado:

$$x_1(t) = \delta_m \cos(\omega_f t) \quad , \quad x_2(t) = A\cos(\omega_f t + \varphi)$$

Cuando la carcasa del motor se mueve con un M.A.S. $x_1(t) = \delta_m \cos(\omega_f t)$ comunica a la masa de la varilla una fuerza oscilatoria: $F(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$ con una amplitud F_0 relacionada con el desplazamiento del motor: $F_0 = k\delta_m$ donde *k* es la constante elástica del sistema varilla-masa. Si suponemos que no hay rozamiento o que es despreciable ($\gamma = 0$) el movimiento de la masa de la varilla vendrá dado por:

$$\left.\begin{array}{c} x(t) = B\,\text{sen}(\omega_f + \beta) \\ B = \dfrac{F_0/m}{\left|\omega_0^2 - \omega_f^2\right|} = \dfrac{(k\delta_m)/m}{\omega_f^2 - \omega_0^2} = \dfrac{\delta_m \omega_0^2}{\omega_f^2 - \omega_0^2} \\ \beta = \text{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x(t) = B\,\text{sen}\left(\omega_f - \frac{\pi}{2}\right) = B\cos(\omega_f - \pi)$$

La composición de movimientos nos indica que $x_2 = x - x_1$, con lo que:

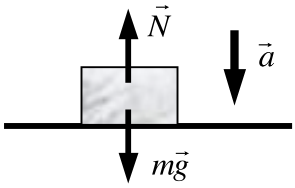
$$\begin{aligned} A\cos(\omega_f t + \varphi) &= B\cos(\omega_f - \pi) - \delta_m \cos(\omega_f t) = \\ &= B\cos(\omega_f - \pi) + \delta_m \cos(\omega_f t - \pi) = \\ &= (B + \delta_m)\cos(\omega_f - \pi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi = -\pi \\ A = B + \delta_m = \dfrac{\delta_m \omega_0^2}{\omega_f^2 - \omega_0^2} + \delta_m \quad \Rightarrow \quad \delta_m = \left(\dfrac{A}{\omega_f^2}\right)\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right) = \boxed{1.2 \text{ mm}} \end{array}\right.$$

Un motor de velocidad variable está unido rígidamente a una viga. El rotor está ligeramente desequilibrado y hace que la viga vibre con una frecuencia igual a la del motor. Cuando este funciona por debajo de las 600 rpm o por encima de las 1200 rpm se observa que un pequeño objeto *A* colocado encima de la viga permanece en contacto con esta, mientras que entre 600 rpm y 1200 rpm el objeto "brinca" y pierde realmente el contacto con la viga. Determínese la amplitud de movimiento de *A* cuando la frecuencia del motor es de a) 600 rpm, b) 1200 rpm.

Solución: I.T.T. 97, 01, 04

Si dibujamos el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el objeto *A* cuando la viga en su vibración se acelera hacia abajo, y aplicamos la segunda ley de Newton tenemos:



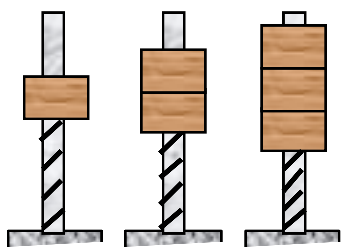
$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad mg - N = ma \quad \Rightarrow \quad N = m(g - a)$$

Esto quiere decir que para aceleraciones a superiores o iguales a la aceleración de la gravedad la normal N se anularía perdiendo el objeto el contacto con la viga.

Si llamamos B a la amplitud de oscilación de la viga en la posición donde está situado el objeto A, la aceleración máxima que va a alcanzar la viga en su movimiento oscilatorio será: $a_{máx.} = \omega^2 B = (2\pi\nu)^2 B$. Para valores de $a_{máx.}$ mayores que g en algún momento de la oscilación de la viga el cuerpo A perderá el contacto con ella. Esto empieza a ocurrir cuando el motor vibra con una frecuencia $\nu_1 = 600\,\text{rpm}$ y deja de ocurrir cuando el motor sobrepasa la frecuencia $\nu_2 = 1200\,\text{rpm}$. Es decir para frecuencias del motor entre 600 rpm y 1200 rpm la aceleración $a_{máx.}$ sobrepasa el valor de g. Para las dos frecuencias mencionadas $a_{máx.}$ iguala el valor de g. El valor de las amplitudes para estas dos frecuencias será:

$$(2\pi\nu_i)^2 B_i = g \quad \Rightarrow \quad B_i = \frac{g}{(2\pi\nu_i)^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B_1 = \boxed{2.48\,\text{mm}} \\ B_2 = \boxed{0.62\,\text{mm}} \end{cases}$$

Una barra vertical con un resorte a su alrededor está rígidamente unida al armazón de un motor que gira a una velocidad constante. Después de que un anillo de masa *m* se coloque sobre el resorte se observa que vibra con una amplitud de 15 mm. Si se colocan dos anillos, ambos de masa *m*, se observa que la amplitud es de 18 mm. ¿Qué amplitud de vibración debe esperarse cuando se pongan tres anillos? (Obtener dos respuestas)



Solución: I.T.T. 97, 01, 04

Si el motor está descentrado al girar actúa como una fuerza periódica externa que fuerza a los anillos a vibrar. Si llamamos ω_f a la frecuencia de dicha fuerza externa (que coincide con la velocidad angular del motor), F_0 a su amplitud, y consideramos el rozamiento despreciable, la amplitud del movimiento oscilatorio forzado que se produce en los tres casos será:

$$A_1 = \frac{F_0 / m}{\left|\omega_0^2 - \omega_f^2\right|} = \frac{F_0}{\left|k - m\omega_f^2\right|} = 15\,\text{mm}$$

$$A_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{F_0}{\left|k - 2m\omega_f^2\right|} = 18\,\text{mm}$$

$$A_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{F_0}{\left|k - 3m\omega_f^2\right|} = ?$$

En las expresiones anteriores hay dos incógnitas que no conocemos pero podemos calcular a partir de los datos: $\dfrac{k}{F_0}$ y $\dfrac{m\omega_f^2}{F_0}$. Para ello necesitamos saber si las expresiones dentro de los valores absolutos son positivas o negativas. Podemos distinguir tres casos:

a) $k > 2m\omega_f^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{A_1} = \dfrac{k}{F_0} - \dfrac{m\omega_f^2}{F_0} \\[2ex] \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{k}{F_0} - \dfrac{2m\omega_f^2}{F_0} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k}{F_0} = \dfrac{2}{A_1} - \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{7}{90}\,\text{mm}^{-1} \\[2ex] \dfrac{m\omega_f^2}{F_0} = \dfrac{1}{A_1} - \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{1}{90}\,\text{mm}^{-1} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \quad A_3 = \boxed{22.5\,\text{mm}}$$

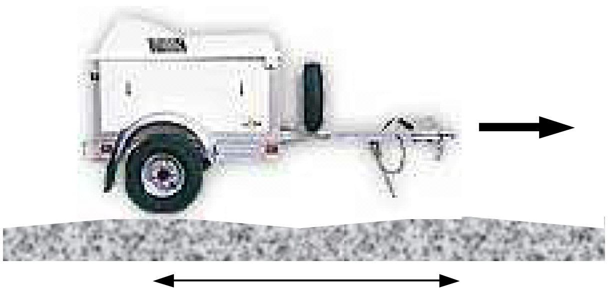
b) $m\omega_f^2 < k < 2m\omega_f^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{A_1} = \dfrac{k}{F_0} - \dfrac{m\omega_f^2}{F_0} \\[2ex] \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{2m\omega_f^2}{F_0} - \dfrac{k}{F_0} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k}{F_0} = \dfrac{2}{A_1} + \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{17}{90}\,\text{mm}^{-1} \\[2ex] \dfrac{m\omega_f^2}{F_0} = \dfrac{1}{A_1} + \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{11}{90}\,\text{mm}^{-1} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \quad A_3 = \boxed{5.6\,\text{mm}}$$

c) $k < m\omega_f^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{A_1} = \dfrac{m\omega_f^2}{F_0} - \dfrac{k}{F_0} \\[2ex] \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{2m\omega_f^2}{F_0} - \dfrac{k}{F_0} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k}{F_0} = \dfrac{1}{A_2} - \dfrac{2}{A_1} = \dfrac{-7}{90}\,\text{mm}^{-1} \\[2ex] \dfrac{m\omega_f^2}{F_0} = \dfrac{1}{A_2} - \dfrac{1}{A_1} = \dfrac{-1}{90}\,\text{mm}^{-1} \end{array} \right.$

¡NO TIENE SENTIDO FISICO!

Un remolque pequeño que pesa 300 kg con su carga, se sostiene mediante dos resortes, ambos de constante 17500 N/m. Se tira del remolque sobre un camino cuya superficie se asemeja a una curva sinusoidal de amplitud 4 cm y 5 m de separación entre amplitudes máximas positivas sucesivas. Determínese a) la velocidad a la cual se producirá la resonancia, y b) la amplitud de la vibración del remolque a una velocidad de 65 km/h. c) Si la amplitud de vibración del remolque no debe de exceder de 2 cm, determinar la velocidad mínima a la cual se puede tirar de este remolque en este camino.



Solución: **I.T.T. 95, 97, 99, 00, 02, 05**

a) Al variar sinusoidalmente el suelo donde se apoya el remolque se le comunica una fuerza externa periódica. Para calcular la amplitud de dicha fuerza imaginémonos por un instante que actuamos sobre el remolque manteniendo constante su altura igual a la que tendría si el camino fuese liso. La fuerza que tenemos que ejercer debe ser igual y opuesta a la fuerza que ejerce el camino ondulado. Como la amplitud de las oscilaciones del camino es $\delta_{máx.}$ = 4 cm, ésta será también la contracción o alargamiento máximo de los muelles, con lo que tendremos que luchar contra una fuerza elástica máxima de valor $k\delta_{máx.}$. La fuerza periódica que se ejerce sobre el remolque será por lo tanto:

$$F = F_0 \cos(\omega_f t) = k\delta_{máx.} \cos(\omega_f t)$$

El valor ω_f de la frecuencia de dicha fuerza lo podemos calcular teniendo en cuenta que su periodo es el tiempo que tarda el remolque en pasar de un máximo a otro a lo largo del camino:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_f} = \frac{d}{v} \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{2\pi v}{d}$$

Vemos que variar la velocidad del remolque implica variar la frecuencia de dicha fuerza periódica

La resonancia se alcanzará a una velocidad $v_{res.}$ para la cual $\omega_f = \omega_0$:

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi v_{res.}}{d} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2k_{muelle}}{m}} \quad \Rightarrow \quad v_{res.} = \frac{d}{2\pi}\sqrt{\frac{2k_{muelle}}{m}} = \boxed{30.9 \text{ km/h}}$$

Hemos tenido en cuenta que la constante elástica equivalente del conjunto es la suma de las constantes elásticas de los dos muelles.

b) El remolque va a realizar un M.A.S. forzado dado por la expresión:

$$y(t) = B\,\mathrm{sen}\left(\omega_f t + \beta\right)$$

La amplitud B de dicho M.A.S. vendrá dada, si ignoramos rozamientos, por:

$$B = \frac{F_0 / m}{\left|\omega_f^2 - \omega_0^2\right|} = \frac{\delta_{máx.}\omega_0^2}{\left|\omega_f^2 - \omega_0^2\right|} = \frac{\delta_{máx.}}{\left|\left(\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2 - 1\right|} = \frac{\delta_{máx.}}{\left|\left(\frac{v}{v_{res.}}\right)^2 - 1\right|}$$

Para una velocidad de v_1 = 65 km/h que es superior a la velocidad de resonancia tenemos que la amplitud del movimiento valdrá:

$$B(v_1) = \frac{\delta_{máx.}}{\left(\frac{v_1}{v_{res.}}\right)^2 - 1} = \boxed{1.17 \text{ cm}}$$

c) Si la amplitud de oscilación no debe superar los 2 cm:

$$B(v) = \frac{\delta_{máx.}}{\left|\left(\frac{v}{v_{res.}}\right)^2 - 1\right|} \leq B_{máx.} = 2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{v}{v_{res.}}\right)^2 - 1 \geq \frac{\delta_{máx.}}{B_{máx.}} \quad \Rightarrow \quad v \geq \left(\frac{\delta_{máx.}}{B_{máx.}} + 1\right)^{1/2} v_{res.} = \boxed{53.6 \text{ km/h}}$$

Una plataforma de 100 kg, sostenida mediante dos resortes, ambos de constante elástica k = 43700 N/m, está sujeta a una fuerza periódica de magnitud máxima de 590 N. Si se sabe que el coeficiente de amortiguamiento es de 1600 Ns/m, determinar a) la frecuencia en rpm de la fuerza periódica para una amplitud de movimiento máxima y dicha amplitud, b) el desfase entre el movimiento de la plataforma y la fuerza periódica en esta situación. c) Comparar la amplitud máxima con la amplitud a la frecuencia natural de la plataforma.

Solución: **I.T.T. 97, 00, 03**

a) La constante elástica equivalente a los dos muelles que soportan la plataforma es:

$$k_{eq.} = k + k = 2k \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq.}}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 29.56 \text{ rad/s}$$

El coeficiente γ de rozamiento valdrá en nuestro caso: $\gamma = \dfrac{\lambda}{2m} = 8\ \mathrm{s}^{-1}$

La plataforma va a realizar un M.A.S. forzado dado por la expresión:

$$y(t) = B\,\mathrm{sen}\left(\omega_f t + \beta\right)$$

La amplitud B y la fase β del movimiento oscilatorio forzado vienen dados por:

$$B\left(\omega_f\right) = \frac{F_0 / m}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2\right]^{1/2}} \quad , \quad \beta\left(\omega_f\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{2\gamma\omega_f}\right)$$

Si llamamos $\omega_{f,máx.}$ a la frecuencia de la fuerza externa para la cual la amplitud B es máxima:

$$\left.\frac{dB}{d\omega_f}\right|_{\omega_f = \omega_{f,máx.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \left[2\left(\omega_0^2 - \omega_{f,máx.}^2\right)\left(-2\omega_{f,máx.}\right) + 8\gamma^2\omega_{f,máx.}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \cancel{\omega_{f,máx.}} = 0 \quad \text{(no es válida ya que corresponde a un mínimo)} \\ \omega_{f,máx.} = \left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right)^{1/2} = \boxed{27.31\ \mathrm{rad/s} = 260.8\ \mathrm{rpm}} \end{cases}$$

Y el valor de la amplitud máxima será:

$$B_{máx.} = B\left(\omega_{f,máx.}\right) = \ldots = \frac{F_0 / m}{2\gamma\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)^{1/2}} = \boxed{12.96\ \mathrm{mm}}$$

b) El valor de la fase β en dicha situación será:

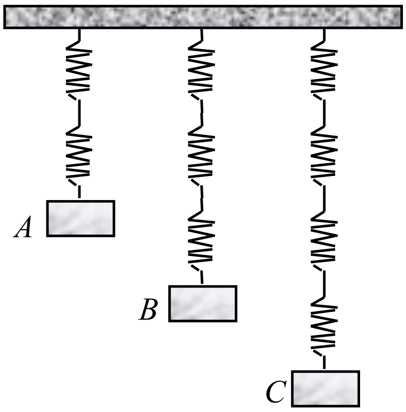
$$\beta\left(\omega_{f,máx.}\right) = \ldots = \mathrm{arctg}\left(\frac{\gamma}{\left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right)^{1/2}}\right) = \boxed{0.2849\ \mathrm{rad} = 16.33^{\mathrm{o}}}$$

c) La amplitud a la frecuencia natural de la plataforma sería:

$$B\left(\omega_0\right) = \frac{F_0 / m}{2\gamma\omega_0} = \boxed{12.47\ \mathrm{mm}}$$

La amplitud resultante sería cerca de medio milímetro inferior al valor máximo calculado en el apartado a).

Tres cilindros idénticos se cuelgan de una barra por varios resortes también idénticos. Se sabe que la barra se mueve verticalmente de la forma $y = \delta_m \operatorname{sen}(\omega t)$. Si las amplitudes de vibración de los cilindros A y B son respectivamente 8 cm y 4 cm respectivamente determinar la amplitud de vibración del tercer cilindro.



Solución: **I.T.T. 95, 99, 01, 04**

Cuando la barra donde están enganchados los muelles se mueve con un M.A.S. de amplitud δ_m comunica al objeto colgado una fuerza oscilatoria: $F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ con una amplitud F_0 relacionada con el desplazamiento de la barra: $F_0 = k_{ef.}\delta_m$ donde $k_{ef.}$ es la constante del muelle que sería elásticamente equivalente a toda la cadena de muelles entre la barra y el objeto colgado.

Para una sucesión de muelles en cadena se puede demostrar que la constante elástica efectiva del muelle equivalente a toda la sucesión es: $\frac{1}{k_{ef.}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$

En nuestro caso para cada cilindro la constante elástica efectiva será respectivamente $k/2$, $k/3$ y $k/4$ respectivamente.

La amplitud del movimiento oscilatorio forzado será (suponemos que el rozamiento no es importante):

$$A = \frac{F_0 / m}{\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|} = \frac{k_{ef.}\delta_m / m}{\left|\frac{k_{ef.}}{m} - \omega^2\right|} = \frac{\delta_m}{\left|1 - \frac{m\omega^2}{k_{ef.}}\right|}$$

Aplicándolo a los tres cilindros tendremos:

$$A_1 = \frac{\delta_m}{\left|1 - \frac{2m\omega^2}{k}\right|} = 8\,\text{cm} \qquad A_2 = \frac{\delta_m}{\left|1 - \frac{3m\omega^2}{k}\right|} = 4\,\text{cm} \qquad A_3 = \frac{\delta_m}{\left|1 - \frac{4m\omega^2}{k}\right|} = ?$$

En las expresiones anteriores hay dos incógnitas que no conocemos pero podemos calcular a partir de los datos: δ_m y $\frac{m\omega^2}{k}$. Para ello necesitamos saber si las expresiones dentro de los valores absolutos son positivas o negativas. De todos los posibles casos:

$1 < \frac{2m\omega^2}{k}$, $\frac{2m\omega^2}{k} < 1 < \frac{3m\omega^2}{k}$, $\frac{3m\omega^2}{k} < 1$, sólo el primero tiene sentido físico (los otros dos conducen a absurdos). Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene que:

$$\delta_m = 8\,\text{cm} \quad , \quad \frac{m\omega^2}{k} = 1 \quad \Rightarrow \quad A_3 = \boxed{\frac{8}{3}\,\text{cm}}$$