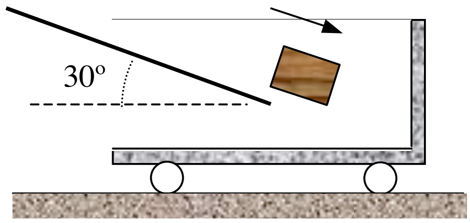
TRABAJO Y ENERGIA:
IMPULSO

Un paquete de 10 kg cae de una rampa con v = 3 m/s a una carreta de 25 kg en reposo, pudiendo ésta rodar libremente. Determinar: a) la velocidad final de la carreta, b) el impulso ejercido por la carreta sobre el paquete, c) la fracción de energía inicial que se pierde en el choque.



Solución: **I.T.I. 94**

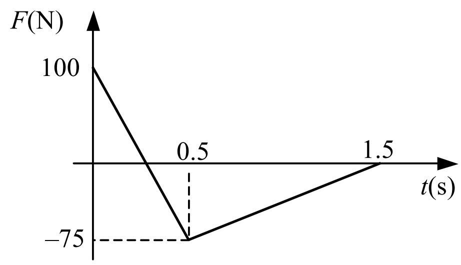
Texto solución

Un tren ligero formado por dos unidades va a 90 km/h siendo sus masas de 25 y 20 toneladas respectivamente. Cuando se aplican los frenos una fuerza constante de frenado de 30 kN se aplica a cada vagón. Determínese: a) el tiempo necesario para detener el tren, b) las fuerzas en la unión entre los vagones mientras dura la frenada.

Solución: **I.T.I. 99**

Texto solución

Un bloque de 20 kg, está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal, y se le aplica una fuerza F paralela a la superficie y que varia con el tiempo como indica la gráfica. Si no hay rozamiento determinar la máxima velocidad adquirida por el bloque. ¿Cuál es la velocidad en el instante $t = 1.5$ s?. Repetir el apartado anterior si el coeficiente de rozamiento μ entre la superficie y el bloque es 0.25.



Solución: **I.T.I. 92, 98, 01, I.T.T. 01, 04**

Según la gráfica la fuerza aplicada sobre el bloque viene dada por (F en nuestro problema representa la componente de la fuerza en la dirección de movimiento. Todos los cálculos están expresados en unidades del sistema internacional):

$$F(t) = \begin{cases} 100 - 350t & 0 \le t \le 0.5 \\ -75 + 75(t - 0.5) & 0.5 \le t \le 1.5 \end{cases}$$

Podemos calcular el instante $t = t_a$ en que dicha fuerza se anula:

$$F(t_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_a = \frac{2}{7} \approx 0.286$$

El impulso comunicado por la fuerza aplicada al bloque será (teniendo en cuenta que debe ser una función continua):

$$I(t) = \int_0^t F(t)\,dt = \begin{cases} 100t - 175t^2 & 0 \le t \le 0.5 \\ \dfrac{425}{8} - \dfrac{225}{2}t + \dfrac{75}{2}t^2 & 0.5 \le t \le 1.5 \end{cases}$$

Una vez calculado el impulso podemos calcular la velocidad del bloque:

$$v(t) = \frac{I(t)}{m} = \begin{cases} 5t - \dfrac{35}{4}t^2 & 0 \le t \le 0.5 \\ \dfrac{85}{32} - \dfrac{45}{8}t + \dfrac{15}{8}t^2 & 0.5 \le t \le 1.5 \end{cases}$$

La máxima velocidad la alcanzará cuando el impulso comunicado al bloque sea máximo. Esto ocurrirá cuando la fuerza F se anule, ya que a partir de dicho momento al tomar F valores negativos el impulso comunicado al bloque comenzará disminuir (también se podría calcular anulando la derivada).

$$v_{máx.} = v(t_a) = 5t_a - \frac{35}{4}t_a^2 = \boxed{\frac{5}{7}\ \mathrm{m/s} \approx 0.714\ \mathrm{m/s}}$$

En el instante final $t = t_b = 1.5$ s la velocidad será:

$$v(t_b) = \frac{85}{32} - \frac{45}{8} t_b + \frac{15}{8} t_b^2 = \boxed{-\frac{25}{16}\ \mathrm{m/s} \approx -1.56\ \mathrm{m/s}}$$

Si sobre el bloque actúa una fuerza de rozamiento ésta no va a impedir que el bloque sea puesto en movimiento ya que: $\left|\vec{F}_{roz.est.máx.}\right| = \mu mg = 49\,\mathrm{N} < \left|\vec{F}(t=0)\right| = 100\,\mathrm{N}$. Una vez puesto el bloque en movimiento la fuerza de rozamiento será cinemática y su componente horizontal tomará un valor constante de –49 N (el enunciado no nos distingue entre coeficiente de rozamiento estático y cinemático).
El análisis que vamos a hacer a continuación sólo será válido mientras el bloque se encuentre en movimiento. Si en algún momento el bloque se parase la fuerza de rozamiento que habría que considerar sería estática, con lo cual su valor ya no sería constante, pudiendo ser desde nula hasta el valor máximo considerado anteriormente. Incluso podría cambiar de sentido si el bloque llega en algún momento a invertir su movimiento. Teniendo en cuenta estas consideraciones, la primera expresión que podemos escribir para la fuerza total $F_{total} = F + F_{roz.}$ que actúa sobre el bloque sería:

$$F_{total}(t) = 51 - 350t \qquad 0 \le t \le 0.5$$
(si no se incumplen las suposiciones iniciales)

Podemos calcular el instante $t = t_c$ en que dicha fuerza se anula:

$$F_{total}(t_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_c = 0.146$$

El impulso comunicado por la fuerza total al bloque:

$$I(t) = \int_0^t F_{total}(t)\,dt = 51t - 175t^2 \qquad 0 \le t \le 0.5$$
(si no se incumplen las suposiciones iniciales)

Una vez calculado el impulso podemos calcular la velocidad del bloque:

$$v(t) = \frac{I(t)}{m} = \frac{51}{20}t - \frac{35}{4}t^2 \qquad 0 \le t \le 0.5$$
(si no se incumplen las suposiciones iniciales)

La máxima velocidad la alcanzará cuando el impulso comunicado al bloque sea máximo. Esto ocurrirá cuando la fuerza total F_{total} se anule, ya que a partir de dicho momento al tomar F_{total} valores negativos el impulso comunicado al bloque comenzará disminuir.

$$v_{máx.} = v(t_c) = \frac{51}{20}t_c - \frac{35}{4}t_c^2 = \boxed{0.186\ \mathrm{m/s}}$$

Como hemos dicho al principio este análisis solo es válido mientras el bloque se encuentre en movimiento. Según la expresión anterior la velocidad se anulará en:

$$v(t_d) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{51}{20}t_d - \frac{35}{4}t_d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_d = 2t_c = 0.291$$

Por lo tanto las expresiones anteriores para $F_{total}(t)$, $I(t)$ y $v(t)$ sólo son válidas hasta $t = t_d = 0.291$. A partir de este momento el bloque permanecerá en reposo (las dos fuerzas se anulan entre sí) hasta que la fuerza F supere, en valor absoluto, la fuerza de rozamiento estática máxima de 49 N:

$$\left|F(t_e)\right| = F_{roz.est.máx.} = 49\text{N} \quad \Rightarrow \quad \left|100 - 350t_e\right| = 49\text{N} \quad \Rightarrow \quad t_e = 0.426$$

A partir de este momento el móvil empieza a desplazarse hacia la izquierda sometido a una fuerza de rozamiento cinemática de 49 N orientada hacia la derecha. Dentro de la suposición de que el bloque se encuentre en movimiento, la fuerza total $F_{total} = F + F_{roz.}$ que actúa sobre el bloque sería:

$$F_{total}(t) = \begin{cases} 149 - 350t & t_e \le t \le 0.5 \\ -26 + 75(t - 0.5) & 0.5 \le t \le 1.5 \end{cases}$$

(si no se incumplen las suposiciones iniciales)

El impulso comunicado por la fuerza aplicada al bloque será (teniendo en cuenta que debe ser una función continua y que lo calculamos a partir de t_e):

$$I(t) = \int_{t_e}^{t} F(t)dt = \begin{cases} -31.72 + 149t - 175t^2 & t_e \le t \le 0.5 \\ 21.41 - \dfrac{127}{2}t + \dfrac{75}{2}t^2 & 0.5 \le t \le 1.5 \end{cases}$$

Una vez calculado el impulso podemos calcular la velocidad del bloque (teniendo en cuenta que $v(t_e) = 0$):

$$v(t) = \frac{I(t)}{m} = \begin{cases} -1.586 + \dfrac{149}{20}t - \dfrac{35}{4}t^2 & t_e \le t \le 0.5 \\ 1.070 - \dfrac{127}{40}t + \dfrac{15}{8}t^2 & 0.5 \le t \le 1.5 \end{cases}$$

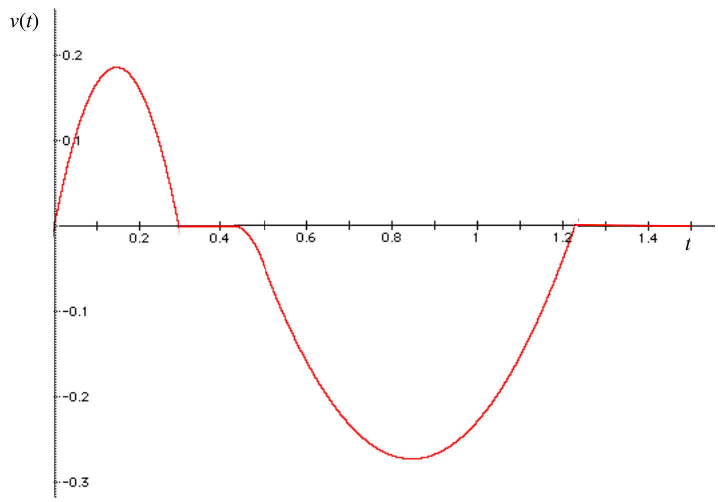
De nuevo este segundo análisis solo es válido mientras el bloque se encuentre en movimiento. Según la expresión anterior la velocidad se anulará en:

$$v(t_f) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1.070 - \frac{127}{40}t_f + \frac{15}{8}t_f^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = 1.229$$

Por lo tanto las expresiones anteriores para $F_{total}(t)$, $I(t)$ y $v(t)$ sólo son válidas hasta $t = t_f = 1.229$. A partir de este momento el bloque permanecerá en reposo (las dos fuerzas se anulan entre sí) hasta el momento final.

$$\boxed{v(t = 1.5) = 0\,\mathrm{m/s}}$$

La gráfica para la velocidad del bloque será la siguiente:



Sobre una partícula de 2 kg, actúa la fuerza $\vec{F} = (8-6t)\hat{i} + \left(4-t^2\right)\hat{j} + (4+t)\hat{k}$ N. Si la velocidad de la partícula es $\vec{v} = 150\hat{i} + 100\hat{j} - 250\hat{k}$ m/s en $t = 0$, determinar el tiempo para el cual la velocidad de la partícula es paralela al plano *YZ*, y la velocidad en ese instante.

Solución: I.T.I. 92, 99, 01, I.T.T. 01, 04

El impulso comunicado por la fuerza a la partícula es:

$$\vec{I}(t) = \int_0^t \vec{F}(t)\,dt = \left(8t - 3t^2\right)\hat{i} + \left(4t - \frac{1}{3}t^3\right)\hat{j} + \left(4t + \frac{1}{2}t^2\right)\hat{k}$$

Como dicho impulso es igual a la variación de momento lineal de la partícula:

$$\vec{I}(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = m\left(\vec{v}(t) - \vec{v}(0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \left(\frac{1}{m}\right)\vec{I}(t) = \left(150 + 4t - \frac{3}{2}t^2\right)\hat{i} + \left(100 + 2t - \frac{1}{6}t^3\right)\hat{j} + \left(-250 + 2t + \frac{1}{4}t^2\right)\hat{k}$$

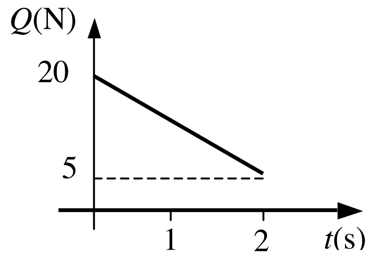
En el instante t_a la velocidad de la partícula es paralela al plano *YZ*, luego:

$$v_x\left(t_a\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 150 + 4t_a - \frac{3}{2}t_a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{t_a = -8.76\,\text{s}}\,, \quad \boxed{t_a = 11.42\,\text{s}}$$

En ese momento la velocidad será:

$$\boxed{\vec{v}\left(t_a\right) = 0\,\hat{i} - 125.5\,\hat{j} - 194.5\,\hat{k} \quad \text{m/s}}$$

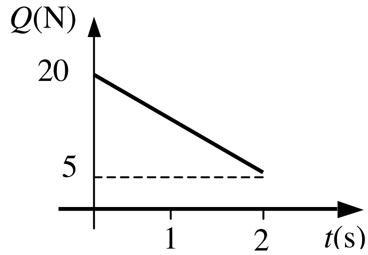
Un collarín de 3 kg que está inicialmente en reposo está sometido a la fuerza Q que varía como se indica en la figura. Si el coeficiente de rozamiento es $\mu = 0.25$ determínese su velocidad cuando $t = 0$ y $t = 1$ s.



Solución: **I.T.I. 94**

Texto solución

Un collarín de 3 kg que está inicialmente en reposo está sometido a la fuerza Q que varía como se indica en la figura. Si $\mu = 0.25$ determínese la velocidad máxima que alcanza y el tiempo necesario para ello, así como el tiempo que tarda en llegar al reposo.



Solución: **I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 02, 05**

Sobre el collarín van a actuar dos fuerzas: $Q(t) = (20 - 7.5t)\ \mathrm{N}$ que trata de deslizarlo y una fuerza de rozamiento $F_{roz.} = \mu mg = 7.35\ \mathrm{N}$ que se opone a dicho deslizamiento. Siempre que $Q > F_{roz.}$ el móvil se irá acelerando, aumentando su velocidad, con lo que la velocidad máxima se alcanzará en el instante t_m en que las dos fuerzas se igualen (ya que a partir de entonces $Q < F_{roz.}$ y el móvil irá perdiendo velocidad):

$$20 - 7.5t_m = 7.35 \quad \Rightarrow \quad t_m = \boxed{1.69\ \mathrm{s}}$$

El impulso comunicado por las fuerzas desde el inicio hasta un instante t cualquiera será:

$$I(t) = \int_0^t F_{total}(t)\,dt = \int_0^t \left[Q(t) - F_{roz.}\right]dt = \int_0^t (12.65 - 7.5\,t)\,dt = 12.65\,t - 3.75\,t^2$$

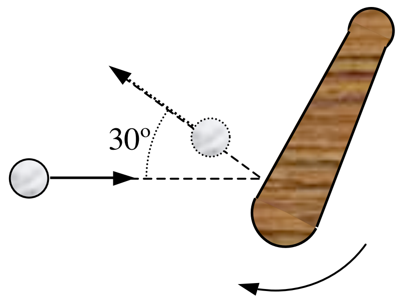
La velocidad del collarín en el instante t_m la podemos calcular mediante el impulso comunicado hasta dicho momento por las dos fuerzas. Ese impulso se ha invertido en modificar el momento lineal del collarín:

$$I(t_m) = \Delta p = m\Delta v = mv_{máx.} \quad \Rightarrow \quad v_{máx.} = \frac{I(t_m)}{m} = \frac{1}{3}\left(12.65t_m - 3.75t_m^2\right) = \boxed{3.56\ \mathrm{m/s}}$$

En el momento t_d en el que el collarín se detiene, el impulso comunicado por las fuerzas tiene que ser nulo (salió del reposo y ha vuelto al reposo):

$$I\left(t_d\right) = \Delta p = 0 \quad \Rightarrow \quad 12.65\,t_d - 3.75\,t_d^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_d = \boxed{3.37\text{ s}}$$

Se lanza horizontalmente una pelota de béisbol de 120 g hacia un jugador a la velocidad de 20 m/s. Después de ser golpeada por el bate sale proyectada a 40 m/s según se muestra en la figura. El tiempo de contacto del bate sobre la pelota es de 30 m/s. Calcular la fuerza media que actúa sobre la pelota.



Solución: I.T.I. 94, 03, I.T.T 99, 03

El impulso comunicado por la fuerza se invierte en modificar el momento lineal de la pelota luego:

$$\vec{F}_m \Delta t = \Delta\vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_{final} - m\vec{v}_{inicial}}{\Delta t} = \frac{mv_{final}\left(-\cos\theta\,\hat{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{j}\right) - mv_{inicial}\,\hat{i}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\left(-mv_{final}\cos\theta - mv_{inicial}\right)\hat{i} + mv_{final}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{j}}{\Delta t} = \boxed{\left(-219\,\hat{i} + 80\,\hat{j}\right)\ \mathrm{N}}$$

El vector de posición de una partícula de 5 kg de masa, expresado en el SI, es: $\vec{r} = \left(t^3 - 2\right)\hat{i} + \left(1 - t\right)\hat{j} + \left(3t^2 - 6\right)\hat{k}$, calcular: a) el momento lineal de la partícula en el instante t = 2 s, b) el momento angular respecto del origen en el mismo instante, c) el trabajo desarrollado en el tercer segundo, d) el impulso comunicado por la fuerza en los primeros 2 s.

Solución: I.T.I. 04

a) El momento lineal vendrá dado por: $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) = m\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 15t^2\hat{i} - 5\,\hat{j} + 30t\,\hat{k}$,

a los dos segundos tendremos que:

$$\vec{p}(2\mathrm{s}) = \boxed{60\,\hat{i} - 5\,\hat{j} + 60\,\hat{k}\ \mathrm{Ns}}$$

b) El momento angular respecto del origen será:

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \left(-15t^2 + 30t - 30\right)\hat{i} + \left(15t^4 - 90t^2 + 60t\right)\hat{j} + \left(10t^3 - 15t^2 + 10\right)\hat{k}$$

y a los dos segundos:

$$\vec{L}(2\mathrm{s}) = \boxed{-30\,\hat{i} + 30\,\hat{k}}$$

c) El trabajo desarrollado desde t = 2s hasta t = 3s será igual a la variación de energía cinética de la partícula en dicho intervalo:

$$W = \Delta E_c = \Delta\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \Delta\left[\frac{p^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}\left[p^2(3\text{s}) - p^2(2\text{s})\right] = \boxed{1912.5\text{ J}}$$

d) El impulso comunicado por la fuerza durante los dos primeros segundos se ha invertido en variar el momento lineal de la partícula:

$$\vec{I}(2\text{s}) = \Delta\vec{p} = \vec{p}(2\text{s}) - \vec{p}(0\text{s}) = \boxed{60\hat{i} + 60\hat{k}}$$