CINEMÁTICA:
MOVIMIENTO CIRCULAR,
OTROS DATOS.

Un punto gira retardadamente en una trayectoria circular de radio R de modo que en todo momento sus aceleraciones normal y tangencial tienen módulos iguales. En el instante inicial $t_0 = 0$ la velocidad del punto es v_0. Hallar: a) el módulo v de la velocidad en función del tiempo y de la distancia s recorrida sobre la trayectoria, b) el módulo de la aceleración total del punto en función de v, y de s.

Solución: **I.T.T. 97, 03**

a) Dada la condición acerca de las aceleraciones y teniendo en cuenta que el movimiento circular es retardado podemos escribir: $a_t = -a_n$. Escribiendo la expresión para cada aceleración y operando:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{dt}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{t}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = \left(\frac{R}{R + v_0 t}\right) v_0}$$

Para la distancia tenemos que:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^s ds = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \left(\frac{R}{R + v_0 t}\right) v_0\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s(t) = R \ln\left(\frac{R + v_0 t}{R}\right)}$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad:

$$\frac{s}{R} = \ln\left(\frac{R + v_0 t}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad v(s) = v_0 e^{-\frac{s}{R}}$$

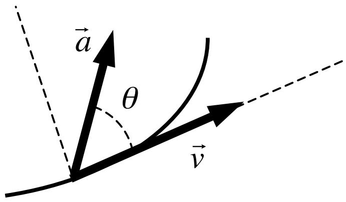
b) Para el cálculo del módulo de la aceleración tenemos:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{2a_n^2} = \sqrt{2}\,a_n = \boxed{\sqrt{2}\left(\frac{v^2}{R}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{v_0^2}{R}\right) e^{-\frac{2s}{R}}}$$

Un punto se mueve por el arco de una circunferencia de radio R. Su velocidad depende del recorrido s según la ley $v = \alpha\sqrt{s}$ donde α es una constante. Determinar, en función de s, el ángulo θ entre los vectores velocidad y aceleración.

Solución: **I.T.T. 97, 03**

El ángulo θ entre los vectores velocidad y aceleración es el ángulo que forma el vector aceleración con la dirección tangencial a la trayectoria:



$$\mathrm{tg}\theta = \frac{a_n}{a_t}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{\sqrt{s}}\left(\dfrac{ds}{dt}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{\sqrt{s}}\, v = \dfrac{1}{2}\alpha^2 \\[2ex] \qquad a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{\alpha^2 s}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{tg}\theta = \frac{2s}{R}}$$

Un sólido gira retardadamente alrededor de un eje fijo con una aceleración angular $\alpha \propto \sqrt{\omega}$ donde ω es la velocidad angular. Hallar la velocidad angular media del cuerpo durante el tiempo que estuvo girando si en el momento de partir su velocidad era ω_0.

Solución: **I.T.T. 97, 03**

Si gira retardadamente eso quiere decir que $\alpha = -c\sqrt{\omega}$ con c una constante positiva. Para determinar la velocidad angular en función del tiempo operamos de la siguiente forma:

$$\frac{d\omega}{dt} = -c\sqrt{\omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = -c\,dt$$

Integrando imponiendo las condiciones iniciales del movimiento en los límites de las integrales tenemos que:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = -\int_0^t c\,dt \quad \Rightarrow \quad \omega = \left(\sqrt{\omega_0} - \frac{1}{2}c\,t\right)^2$$

El cuerpo girará hasta que su velocidad se anule: $\omega\left(t_{giro}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{giro} = 2\dfrac{\sqrt{\omega_0}}{c}$

El desplazamiento angular realizado durante todo ese tiempo será:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{\theta_0}^{\theta_{final}} d\theta = \int_0^{t_{giro}} \omega \, dt = \int_0^{t_{giro}} \left(\sqrt{\omega_0} - \frac{1}{2} c t \right)^2 dt$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{final} - \theta_0 = \omega_0 t_{giro} - \frac{1}{2} c \sqrt{\omega_0} \, t_{giro}^2 + \frac{1}{12} c^2 t_{giro}^3$$

Y la velocidad angular media será:

$$\omega_m = \frac{\theta_{final} - \theta_0}{t_{giro}} = \omega_0 - \frac{1}{2} c \sqrt{\omega_0} \, t_{giro} + \frac{1}{12} c^2 t_{giro}^2 = \boxed{\frac{\omega_0}{3}}$$

Un cuerpo sólido gira alrededor de un eje fijo de forma que su velocidad angular depende del ángulo de rotación φ según la ley $\omega = \omega_0 - a\varphi$, donde ω_0 y a son constantes positivas. En el instante $t = 0$ el ángulo φ es nulo. Hallar: a) $\varphi(t)$, b) $\omega(t)$.

Solución: I.T.T. 97, 03

a) Para determinar el ángulo en función del tiempo operamos de la siguiente forma:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - a\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{\omega_0 - a\varphi} = dt$$

Integrando imponiendo las condiciones iniciales del movimiento en los límites de las integrales tenemos que:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega_0 - a\varphi} = \int_0^{t} dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{\omega_0 - a\varphi}{\omega_0} \right) = t$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{\omega_0 - a\varphi}{\omega_0} \right) = -at \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_0 - a\varphi}{\omega_0} = e^{-at}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi(t) = \left(\frac{\omega_0}{a} \right) \left(1 - e^{-at} \right)}$$

b) Derivando obtenemos la velocidad angular en función del tiempo:

$$\boxed{\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \, e^{-at}}$$
