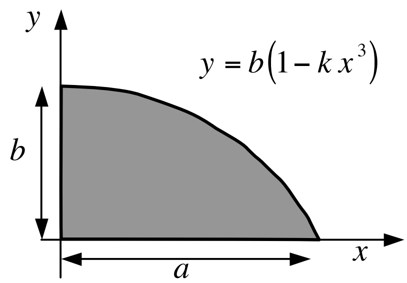
CALCULO DE CENTROS DE MASA: PLACAS

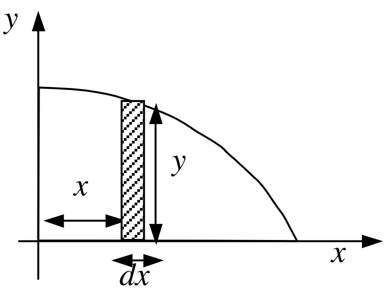
Calcular la posición del centro de masas de la siguiente placa suponiendo que su masa está uniformemente distribuida por toda ella:



Solución: **I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04**

En primer lugar, y antes de iniciar los cálculos del C.M., vamos a determinar el valor de la constante k para la curva. Para $x = a$ se anula el valor de y, con lo que deducimos que $k = a^{-3}$. La curva viene dada por lo tanto por la ecuación: $y = b\left(1 - \frac{x^3}{a^3}\right)$.

Para calcular la coordenada x del C.M. será conveniente dividir la placa en diferenciales de área cuyos puntos posean una coordenada x la misma para todos ellos. Vamos por lo tanto a dividir la placa en bandas verticales de espesor dx.



El área de cada banda será:

$$dA = y\,dx = b\left(1 - \frac{x^3}{a^3}\right)dx$$

El área de toda la placa será por lo tanto:

$$A = \int dA = \int_0^a b\left(1 - \frac{x^3}{a^3}\right)dx = b\left(x - \frac{x^4}{4a^3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{3}{4}ab$$

La coordenada x del C.M. será:

$$\int x\,dA = \int_0^a x\,b\left(1 - \frac{x^3}{a^3}\right)dx = b\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5a^3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{3}{10}a^2 b$$

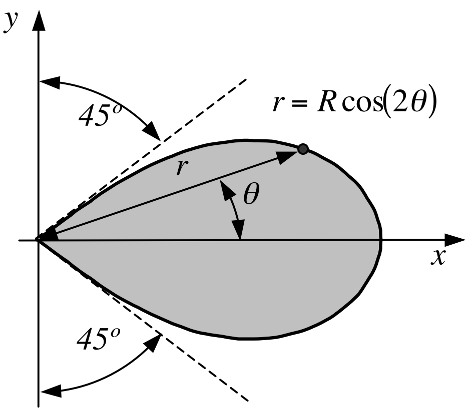
$$\Rightarrow \qquad x_{C.M.} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \boxed{\frac{2}{5}a}$$

Para calcular la coordenada y del C.M. sería conveniente dividir la placa en diferenciales de área cuyos puntos poseyeran una coordenada y la misma para todos ellos, es decir en bandas horizontales de espesor dy, sin embargo podemos aprovechar los mismos diferenciales de área del cálculo anterior. Si asimilamos cada banda vertical a un segmento vertical homogéneo de longitud y, y sabiendo que la posición que representa en cierta forma a dicho segmento es la posición de su centro de masas que se encuentra a mitad de altura, podemos tomar dicha posición como la posición representativa de la banda:

$$\int y_{banda}\,dA = \int\left(\frac{1}{2}y\right)dA = \int_0^a \frac{1}{2}b^2\left(1-\frac{x^3}{a^3}\right)^2 dx = \frac{1}{2}b^2\left(x-\frac{x^4}{2a^3}+\frac{x^7}{7a^6}\right)\Bigg|_0^a = \frac{9}{28}ab^2$$

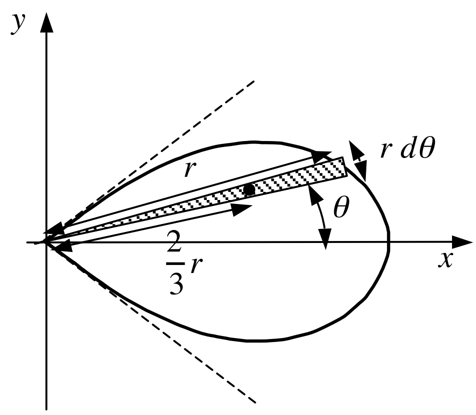
$$\Rightarrow \qquad y_{C.M.} = \frac{\int y_{banda}\,dA}{\int dA} = \boxed{\frac{3}{7}b}$$

Calcular la posición del centro de masas de la siguiente placa suponiendo que su masa está uniformemente distribuida por toda ella:



Solución: **I.T.I. 01, I.T.T. 01, 04**

Visto que nos dan la expresión de la curva que define la placa en coordenadas polares, trabajaremos en dicho tipo de coordenadas. Podemos dividir la placa en sectores angulares de abertura $d\theta$. Cada sector angular podemos asociarlo a un triángulo (isósceles en nuestro caso), y como sabemos la posición del C.M. de un triángulo (situado a un tercio de la altura sobre la base) tomaremos dicha posición como la representativa de cada sector angular.



El área de toda la placa será por lo tanto:

$$A = \int dA = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r\left(r\,d\theta\right) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}R^2\cos^2(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{8}\text{sen}\left(4\theta\right)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}R^2$$

La coordenada x del C.M. será:

$$\int x_{\text{sector}}\, dA = \int \frac{2}{3} r\cos\theta\, dA = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} R^3 \cos^3(2\theta)\cos\theta\, d\theta =$$

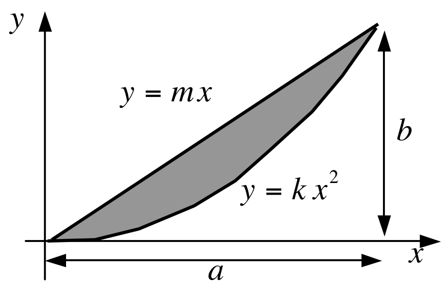
$$= \frac{1}{3} R^3 \left(\frac{3}{8}\text{sen}(\theta) + \frac{1}{8}\text{sen}(3\theta) + \frac{1}{40}\text{sen}(5\theta) + \frac{1}{56}\text{sen}(7\theta) \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{16\sqrt{2}}{105} R^3$$

$$\Rightarrow \quad x_{C.M.} = \frac{\int x_{\text{sector}}\, dA}{\int dA} = \boxed{\frac{128\sqrt{2}}{105\pi} R \approx 0.549R}$$

El cálculo de la coordenada y del C.M. no es necesario hacerlo ya que el eje X es un eje de simetría de la placa y por lo tanto el C.M. se encontrará en él, con lo que:

$$\boxed{y_{C.M.} = 0}$$

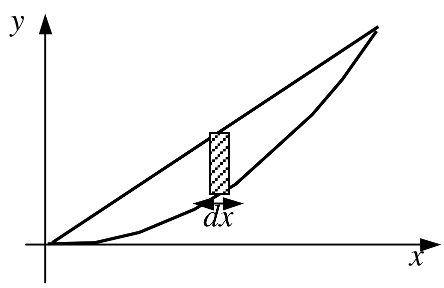
Calcular la posición del centro de masas de la siguiente placa suponiendo que su masa está uniformemente distribuida por toda ella:



Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04

En primer lugar, y antes de iniciar los cálculos del C.M., vamos a determinar el valor de las constantes m y k para las dos curvas. Para $x = a$ tenemos que $y = b$, con lo que deducimos que $m = \frac{b}{a}$ y $k = \frac{b}{a^2}$. Las dos curvas vienen dadas por lo tanto por las ecuaciones: $y_1 = \left(\frac{b}{a}\right) x$ y $y_2 = \left(\frac{b}{a^2}\right) x^2$.

Para calcular la coordenada x del C.M. será conveniente dividir la placa en diferenciales de área cuyos puntos posean una coordenada x la misma para todos ellos. Vamos por lo tanto a dividir la placa en bandas verticales de espesor dx.



El área de cada banda será:

$$dA = \left(y_1 - y_2\right) dx = b\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

El área de toda la placa será por lo tanto:

$$A = \int dA = \int_0^a b\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = b\left(\frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{6}ab$$

La coordenada *x* del C.M. será:

$$\int x\, dA = \int_0^a x\, b\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = b\left(\frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{12}a^2 b$$

$$\Rightarrow \quad x_{C.M.} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} = \boxed{\frac{1}{2}a}$$

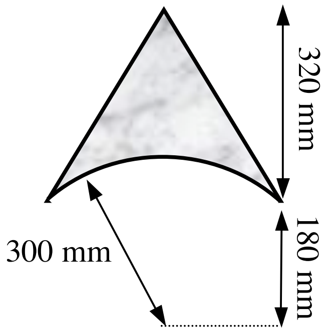
Para calcular la coordenada *y* del C.M. sería conveniente dividir la placa en diferenciales de área cuyos puntos poseyeran una coordenada *y* la misma para todos ellos, es decir en bandas horizontales de espesor *dy*, sin embargo podemos aprovechar los mismos diferenciales de área del cálculo anterior. Si asimilamos cada banda vertical a un segmento vertical homogéneo de longitud $y_1 - y_2$, y sabiendo que la posición que representa en cierta forma a dicho segmento es la posición de su centro de masas que se encuentra a mitad de altura, podemos tomar dicha posición como la posición representativa de la banda:

$$\int y_{banda}\, dA = \int \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) dA = \int_0^a \frac{b}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) b\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= \int_0^a \frac{1}{2}b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4}\right) dx = \frac{1}{2}b^2\left(\frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^5}{5a^4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{15}ab^2$$

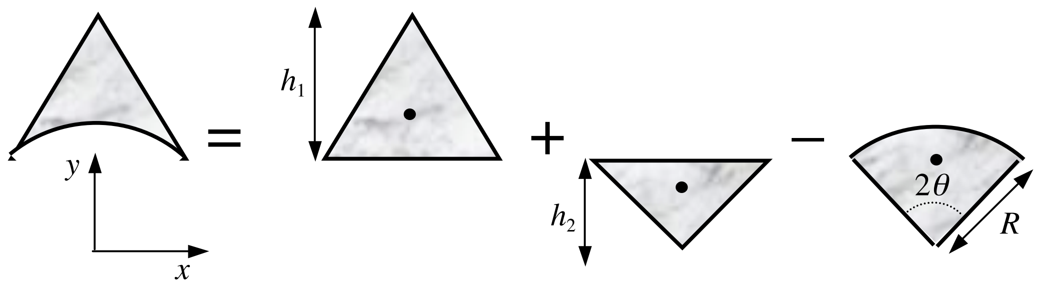
$$\Rightarrow \quad y_{C.M.} = \frac{\int y_{banda}\, dA}{\int dA} = \boxed{\frac{6}{15}b}$$

Determinar el centro de gravedad de la placa de la figura.



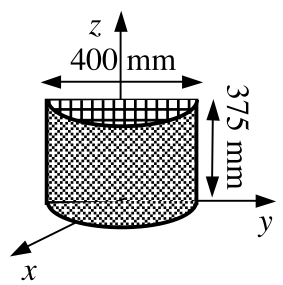
Solución: **I.T.I. 02, I.T.T. 99, 02**

Descomponemos nuestra pieza en tres piezas más sencillas, una de las cuales contribuye negativamente:



$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{1}{2}(2R\,\mathrm{sen}\,\theta)h_1 \quad , \quad \vec{r}_1 = \left(0, h_2 + \dfrac{1}{3}h_1\right) \\[2ex] A_2 = \dfrac{1}{2}(2R\,\mathrm{sen}\,\theta)h_2 \quad , \quad \vec{r}_2 = \left(0, \dfrac{2}{3}h_2\right) \\[2ex] A_3 = \theta R^2 \quad , \quad \vec{r}_3 = \left(0, \dfrac{2R\,\mathrm{sen}\,\theta}{3\theta}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{r}_{C.M.} = \frac{A_1\vec{r}_1 + A_2\vec{r}_2 - A_3\vec{r}_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \boxed{(0, 350)\ \text{mm}}$$

Determinar el centro de masas de una papelera de base semicircular construida con una placa homogénea.

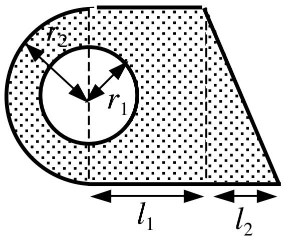


Solución: **I.T.I. 02, I.T.T. 99, 02**

Descomponemos nuestra papelera en tres piezas más sencillas: una superficie lateral plana, una superficie lateral cilíndrica y un fondo semicircular.

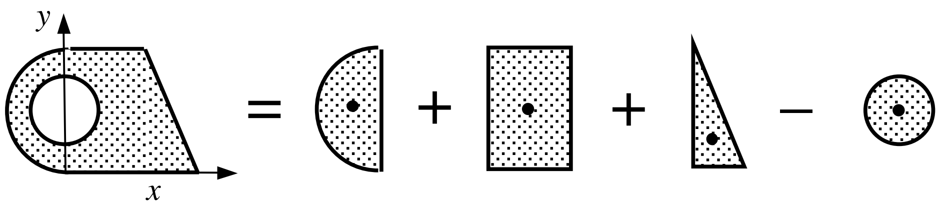
$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = 2RH \quad , & \vec{r}_1 = \left(0, 0, \frac{H}{2}\right) \\ A_2 = \pi RH \quad , & \vec{r}_2 = \left(\frac{2R}{\pi}, 0, \frac{H}{2}\right) \\ A_3 = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad , & \vec{r}_3 = \left(\frac{4R}{3\pi}, 0, 0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{r}_{C.M.} = \frac{A_1\vec{r}_1 + A_2\vec{r}_2 + A_3\vec{r}_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \boxed{(79, 161)\ \text{mm}}$$

Determinar el centro de masas de la placa homogénea representada en la figura.



Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

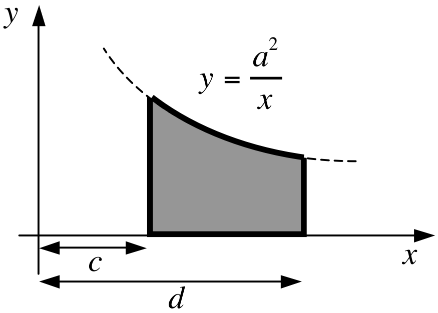
Consideramos la placa como la contribución de cuatro piezas sencillas: un semidisco, un rectángulo, un triángulo y un agujero circular. Cada pieza vendrá representada por la posición de su centro de masas y el problema es equivalente al cálculo del c.m. de un sistema de cuatro partículas (una de ellas, el agujero circular, contribuyendo negativamente):



$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = \frac{1}{2}\pi R_2^2 = 0.565\ \text{m}^2 \quad , & \vec{r}_1 = \left(-\frac{4R_2}{3\pi}, R_2\right) = (-25.5, 60)\ \text{cm} \\ A_2 = 2R_2 l_1 = 0.960\ \text{m}^2 \quad , & \vec{r}_2 = \left(\frac{l_1}{2}, R_2\right) = (40, 60)\ \text{cm} \\ A_3 = R_2 l_2 = 0.360\ \text{m}^2 \quad , & \vec{r}_3 = \left(l_1 + \frac{l_2}{3}, \frac{2}{3}R_2\right) = (100, 40)\ \text{cm} \\ A_4 = \pi R_1^2 = 0.503\ \text{m}^2 \quad , & \vec{r}_4 = (0, R_2) = (0, 60)\ \text{cm} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{C.M.} = \frac{A_1\vec{r}_1 + A_2\vec{r}_2 + A_3\vec{r}_3 - A_4\vec{r}_4}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4} = \boxed{(43.4, 54.8)\ \text{cm}}$$

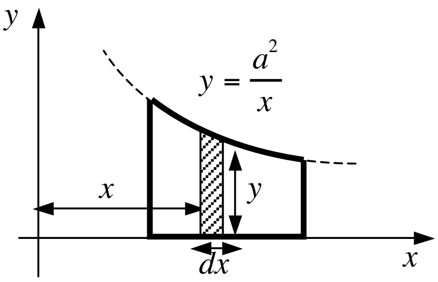
Calcular la posición del centro de masas de la siguiente placa suponiendo que su masa está uniformemente distribuida por toda ella:



Solución: **I.T.I. 03, I.T.T. 03**

Para calcular la coordenada x del C.M. será conveniente dividir la placa en diferenciales de área cuyos puntos posean una coordenada x la misma para todos ellos. Vamos por lo tanto a dividir la placa en bandas verticales de espesor dx.

El área de cada banda será:



$$dA = y\,dx = \frac{a^2}{x}dx$$

El área de toda la placa será por lo tanto:

$$A = \int dA = \int_c^d \frac{a^2}{x}dx = a^2 \ln(x)\Big|_c^d = a^2 \ln\left(\frac{d}{c}\right)$$

La coordenada x del C.M. será:

$$\int x\,dA = \int_c^d a^2\,dx = a^2(d-c) \quad \Rightarrow \quad x_{C.M.} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \boxed{\frac{d-c}{\ln(d/c)}}$$

Para calcular la coordenada y del C.M. sería conveniente dividir la placa en diferenciales de área cuyos puntos poseyeran una coordenada y la misma para todos ellos, es decir en bandas horizontales de espesor dy, sin embargo podemos aprovechar los mismos diferenciales de área del cálculo anterior. Si asimilamos cada banda vertical a un segmento vertical homogéneo de longitud y, y sabiendo que la posición que representa en cierta forma a dicho segmento es la posición de su centro de masas que se encuentra a mitad de altura, podemos tomar dicha posición como la posición representativa de la banda:

$$\boxed{\begin{gathered}\int y_{banda}\,dA = \int\left(\frac{1}{2}y\right)dA = \int_c^d \frac{1}{2}\frac{a^4}{x^2}dx = \frac{a^4}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_c^d = \frac{a^4}{2}\left(\frac{d-c}{c\,d}\right) \\ \Rightarrow \quad y_{C.M.} = \frac{\int y_{banda}\,dA}{\int dA} = \boxed{\left(\frac{a^2}{2c\,d}\right)\frac{d-c}{\ln(d/c)}}\end{gathered}}$$