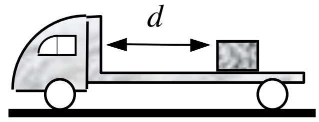
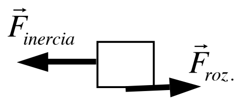
BLOQUES:

Los coeficientes de rozamiento entre la plataforma de un camión y su carga son $\mu_{est.} = 0.4$ y $\mu_{cin.} = 0.3$. Sabiendo que la velocidad del camión es de 72 km/h, determinar la menor distancia en la que puede detenerse sin que deslice la carga. Si la velocidad fuese de 27 m/s y se detiene en 4 s determinar si la carga desliza, y en caso afirmativo, determinar la velocidad con la que impacta en el tope de la parte delantera de la plataforma y si éste se produce antes de que el camión se haya detenido. Datos: $d = 3.3$ m.



Solución: **I.T.I. 00, I.T.T. 04**

Si nos situamos encima del camión, dibujamos las fuerzas que actúan sobre la carga durante el frenado y planteamos la segunda ley de Newton (tomando el sentido positivo del movimiento rectilíneo hacia la izquierda según el sentido de movimiento del camión), para que la carga no deslice es necesario que la fuerza de rozamiento estática anule a la fuerza de inercia:



$$\left.\begin{array}{r} \vec{F}_{inercia} = -m\vec{a}_{camión} \quad \Rightarrow \quad F_{inercia} = m\left|a_{camión}\right| \\ F_{roz.est.} \le F_{roz.est.máx.} = \mu_{est.}N = \mu_{est.}mg \\ F_{inercia} = F_{roz.est.} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left|a_{camión}\right| \le \mu_{est.}g = 3.92 \text{ m/s}^2$$

La distancia que recorre el camión hasta detenerse (velocidad final nula) será:

$$V^2_{\substack{camión\\final}} = V^2_{\substack{camión\\inicial}} + 2a_{camión}\Delta x_{camión} \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{camión} = \frac{V^2_{\substack{camión\\inicial}}}{-2a_{camión}} = \frac{V^2_{\substack{camión\\inicial}}}{2\left|a_{camión}\right|} \ge \frac{V^2_{\substack{camión\\inicial}}}{2\mu_{est.}g} = \boxed{51 \text{ m}}$$

Si la velocidad es de 27 m/s y se detiene en 4 s la aceleración del camión será:

$$\left|a_{camión}\right| = \left|\frac{\Delta V_{camión}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{-27 \text{ m/s}}{4 \text{ s}}\right| = 6.75 \text{ m/s}^2 > 3.92 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad \text{DESLIZA}$$

En este caso la fuerza de inercia supera a la de rozamiento cinemático acelerándose el bloque hacia la izquierda:

$$a_{bloque} = \frac{F_{inercia} - F_{roz.}}{m} = \frac{m\left|a_{camión}\right| - \mu_{cin.}mg}{m} = \left|a_{camión}\right| - \mu_{cin.}g = 2.83 \text{ m/s}^2$$

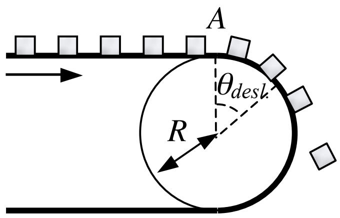
El tiempo que tardará en recorrer la distancia d será:

$$d = \frac{1}{2}a_{bloque}\Delta t^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2d}{a_{bloque}}} = 1.53 \text{ s} < 4 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c}\text{GOLPEA ANTES}\\ \text{DE QUE SE PARE}\\ \text{EL CAMIÓN}\end{array}$$

La velocidad con la que impacta contra la parte delantera será:

$$V^2_{\substack{bloque\\final}} = V^2_{\substack{bloque\\inicial}} + 2a_{bloque}d \quad \Rightarrow \quad V_{\substack{bloque\\final}} = \sqrt{2a_{bloque}d} = \boxed{4.32 \text{ m/s}}$$

Una serie de pequeños paquetes de m = 250 g cada uno se descargan mediante una cinta transportadora que se mueve con velocidad v_{cinta} = 1.22 m/s. Si el coeficiente de rozamiento estático $\mu_{est.}$ entre los paquetes y la cinta es de 0.40, determinar: a) la fuerza que ejerce la cinta sobre un paquete inmediatamente después de que éste haya pasado por el punto A, b) el ángulo $\theta_{desl.}$ a partir del cual los paquetes comienzan a deslizar por la cinta. R = 0.25 m.



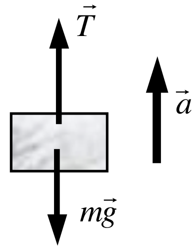
Solución: **I.T.I. 00**

Texto solución

Una caja de 24 Kg está en reposo sobre el suelo y tiene una soga atada a la parte de arriba. La máxima tensión que la soga puede resistir es de 310 N. ¿Cuál es el tiempo mínimo en el que la caja puede ser levantada verticalmente una distancia de 4.6 m tirando de la soga?

Solución: I.T.I. 02, 05, I.T.T. 03

Dibujando el diagrama de fuerzas que actúan sobre la caja y planteando la segunda ley de Newton:



$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad T - mg = ma \quad \Rightarrow \quad T = m(g + a)$$

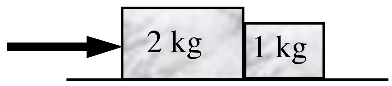
Teniendo en cuenta la resistencia de la cuerda:

$$T \leq T_{máx.} \quad \Rightarrow \quad m(g + a) \leq T_{máx.} \quad \Rightarrow \quad a \leq a_{máx.} = \frac{T_{máx.}}{m} - g$$

Durante el movimiento acelerado hay que levantar la caja una altura h = 4.6 m respecto de su posición inicial y partiendo del reposo, con lo que:

$$h = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \geq \sqrt{\frac{2h}{a_{máx.}}} = \sqrt{\frac{2h}{\left(\frac{T_{máx.}}{m} - g\right)}} = \sqrt{\frac{2m\,h}{T_{máx.} - mg}} = \boxed{1.72 \text{ s}}$$

Con la mano se empujan dos cuerpos sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Las masas de los cuerpos son de 2 kg y 1 kg respectivamente. La mano ejerce una fuerza de 5 N sobre el cuerpo de 2 kg. a) ¿Cuál es la aceleración del sistema?. b) ¿Cuál es la aceleración del cuerpo de 1 kg?. ¿Qué fuerza se ejerce sobre él?. ¿Cuál es el origen de esta fuerza?. c) Indicar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de 2 kg. ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre este cuerpo?



Solución: I.T.I. 92, 98, I.T.T. 96, 99, 02, 05

a) Si consideramos el movimiento horizontal conjunto de los dos bloques (al no haber aceleración vertical, las fuerzas verticales se anulan entre sí) aplicando la segunda ley de Newton tenemos que:

$$\vec{F}_{ext.} = (m_1 + m_2)\vec{a}_{sistema} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{sistema} = \frac{\vec{F}_{ext.}}{m_1 + m_2} = \boxed{\frac{5}{3} \text{ m/s}^2\,\hat{i}}$$

b) Para los dos cuerpos tenemos que:

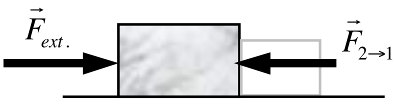
$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_{sistema} = \boxed{\frac{5}{3} \text{ m/s}^2\,\hat{i}}$$

Aplicando la segunda ley de Newton al segundo cuerpo tenemos que:

$$\vec{F}_{1\to 2} = m_2\,\vec{a}_2 = \boxed{\frac{5}{3}\ \mathrm{N}\,\hat{i}}$$

Esta fuerza está originada por el contacto que sobre el segundo cuerpo ejerce el primero.

c) El diagrama de fuerzas sobre el primer cuerpo será:



La fuerza neta sobre el primer cuerpo será:

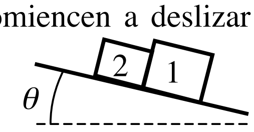
$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{2\to 1} = m_1\,\vec{a}_1 = \boxed{\frac{10}{3}\ \mathrm{N}\,\hat{i}}$$

Sobre un plano inclinado un ángulo θ descansan los bloques 1 y 2 de masas m_1 y m_2 y coeficientes de rozamiento con el plano inclinado μ_1 y μ_2 siendo $\mu_1 > \mu_2$. Hallar: a) El valor mínimo del ángulo θ con el cual se inicia el deslizamiento conjunto de los dos bloques, b) La fuerza de interacción entre los bloques durante el movimiento.

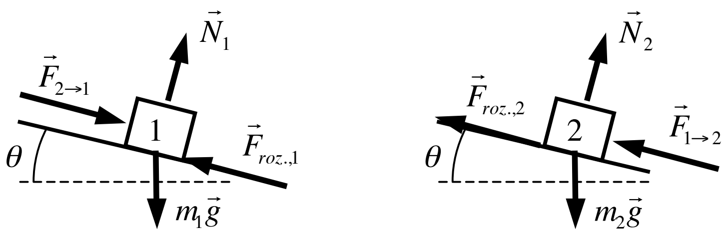
Solución: **I.T.I. 98, I.T.T. 96, 99, 02, 05**

Si tenemos un sólo bloque en un plano inclinado la inclinación máxima $\theta_{\text{máx.}}$ que puede soportar sin deslizar depende del coeficiente de rozamiento y vale: $\mathrm{tg}\,\theta_{máx.} = \mu_{est.}$.

Como nos dicen que $\mu_1 > \mu_2$, si queremos que los dos bloques comiencen a deslizar conjuntamente a partir de cierto ángulo es necesario que el bloque 1 sea el primero en el sentido de descenso de la pendiente, y que el bloque 2 le siga detrás. Si fuera al revés, al ir aumentando la inclinación llegaría un momento en que el bloque 2 empezaría a deslizar (debido a su menor coeficiente de rozamiento) mientras el bloque 1 seguiría estático (debido a su mayor coeficiente de rozamiento) y los dos bloques se separarían.



a) y b) El ángulo mínimo de deslizamiento que nos piden coincide con el ángulo máximo que pueden soportar sin deslizar (una pequeña inclinación más y los bloques deslizan). Dibujando el diagrama de fuerzas para cada bloque cuando todavía no deslizan:



La segunda ley de Newton aplicada a cada cuerpo conduce a:

$$\left.\begin{array}{l} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{roz.,1} + \vec{F}_{2\to 1} = 0 \\ m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{roz.,2} + \vec{F}_{1\to 2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m_1 g\,\mathrm{sen}\theta + F_{2\to 1} - F_{roz.,1} = 0 \\ N_1 - m_1 g\cos\theta = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} m_2 g\,\mathrm{sen}\theta - F_{1\to 2} - F_{roz.,2} = 0 \\ N_2 - m_2 g\cos\theta = 0 \end{array}\right. \end{array}$$

Teniendo en cuenta que por la tercera ley de Newton: $F_{1\to 2} = F_{2\to 1}$, y que si nos encontramos en la situación crítica $\left(\theta = \theta_{crítico}\right)$, a punto de empezar a deslizar, las fuerzas de rozamiento estático habrán alcanzado el valor máximo:

$$F_{roz.,1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g\cos\theta_{crítico} \quad , \quad F_{roz.,2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g\cos\theta_{crítico}$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} F_{1\to 2} + m_1 g\left(\mathrm{sen}\,\theta_{crítico} - \mu_1\cos\theta_{crítico}\right) = 0 \\ -F_{1\to 2} + m_2 g\left(\mathrm{sen}\theta_{crítico} - \mu_2\cos\theta_{crítico}\right) = 0 \end{array}\right\}$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es:

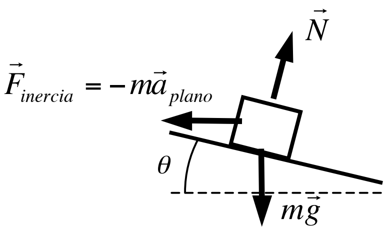
$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{tg}\theta_{crítico} = \dfrac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] F_{1\to 2} = F_{2\to 1} = \left(\mu_1 - \mu_2\right)\left(\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g\cos\theta_{crítico} \end{array}}$$

Un cuerpo de 2 Kg se coloca sobre una superficie pulida que tiene una inclinación de 60°. a) Estudia su movimiento cuando se deja libre. b) Acelerando adecuadamente el plano inclinado puede conseguirse que el cuerpo no deslice por él. Calcula en que condiciones sucede esto. c) Estudia el movimiento del cuerpo cuando la aceleración del plano inclinado es el doble de la aceleración calculada en el apartado anterior. d) Haz una representación gráfica donde se vea el vector aceleración del cuerpo desde el punto de vista de un observador que está en el suelo y desde otro que está en el plano inclinado.

Solución: **I.T.I. 04, I.T.T. 00, 03**

Vamos a analizar un caso general donde llamamos $\vec{a}_{plano}$ a la aceleración horizontal que tiene el plano respecto del suelo, tomando su sentido positivo de movimiento unidimensional hacia la derecha.

Cogiendo un sistema de referencia fijo en el plano inclinado (sistema de referencia no inercial al estar dicha superficie acelerada respecto del suelo) el cuerpo va a realizar un movimiento unidimensional a lo largo del plano. Vamos a tomar como sentido positivo de dicho movimiento unidimensional hacia la derecha y descendente. Dibujando el diagrama de fuerzas (sin olvidarnos de las fuerzas de inercia) y planteando la segunda ley de Newton podemos calcular la aceleración $\vec{a}'$ del cuerpo respecto del plano:



$$\vec{F}_{inercia} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}'$$

Tomando componentes a lo largo del plano:

$$mg\,\text{sen}\,\theta - ma_{plano}\cos\theta = ma' \quad \Rightarrow \quad a'\left(a_{plano}\right) = g\,\text{sen}\,\theta - a_{plano}\cos\theta$$

La aceleración del cuerpo dependerá por lo tanto de la aceleración del plano.

a) Si $a_{plano} = 0$ en este caso tenemos que:

$$a'(0) = g\,\text{sen}\,\theta = \boxed{8.49 \text{ m/s}^2}$$

El cuerpo realiza por lo tanto un movimiento descendente $(a' > 0)$ uniformemente acelerado.

b) Si queremos que el bloque no deslice sobre el plano su aceleración $\vec{a}'$ deberá ser nula, eso se conseguirá cuando el plano se mueva con una aceleración concreta que vamos a llamar $\vec{a}_{plano,crítica}$:

$$a'\left(a_{plano,crítica}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad g\,\text{sen}\,\theta - a_{plano,crítica}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{plano,crítica} = g\,\text{tg}\,\theta = \boxed{16.97 \text{ m/s}^2}$$

Como vemos esto se consigue cuando el plano se mueve aceleradamente hacia la derecha a 16.97 m/s^2.

c) Si la aceleración del plano es el doble de la anterior tenemos que:

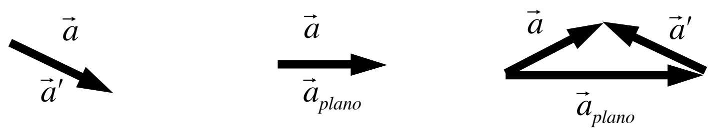
$$a'\left(2a_{plano,crítica}\right) = g\,\mathrm{sen}\,\theta - 2a_{plano,crítica}\cos\theta = -g\,\mathrm{sen}\,\theta = \boxed{-8.49\ \mathrm{m/s^2}}$$

El cuerpo realiza por lo tanto un movimiento ascendente $(a' < 0)$ uniformemente acelerado.

d) Un observador ligado al suelo (observador inercial) vería para el cuerpo una aceleración $\vec{a}$ mientras que un observador ligado al plano vería una aceleración $\vec{a}'$. La relación entre las dos aceleraciones será:

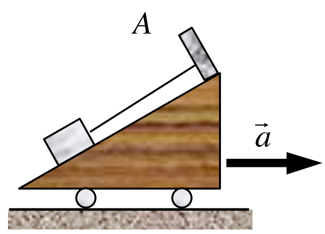
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{plano}$$

Y el diagrama para los tres casos anteriores será:



caso a) caso b) caso c)

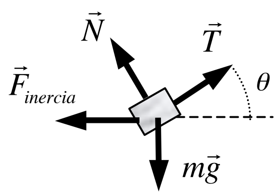
La cuña de la figura se esta moviendo sobre una superficie horizontal con una aceleración de 2 m/s^2. Un bloque de 5 kg reposa sobre la cuña y está atado por una ligera cuerda en *A*. No existe rozamiento entre la cuña y el bloque. a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda? b) ¿Qué fuerza normal ejerce la cuña sobre el bloque? c) Comparar las repuestas con los valores obtenidos si la cuña esta en reposo. d) ¿Para que valor de la aceleración la masa empieza a elevarse?



Solución: I.T.I. 93, I.T.T. 00, 04

Dibujando el diagrama de fuerzas y planteando la segunda ley de Newton:

$$\left.\begin{array}{l} N - mg\cos\theta + F_{inercia}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ T - F_{inercia}\cos\theta - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \end{array}\right\}$$



a) La tensión de la cuerda será:

$$T = F_{inercia}\cos\theta + mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\left(a_{cuña}\cos\theta + g\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = \boxed{33.2\ \mathrm{N}}$$

b) La fuerza normal será:

$$N = mg\cos\theta - F_{inercia}\,\mathrm{sen}\,\theta = m\left(g\cos\theta - a_{cuña}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = \boxed{37.5\ \mathrm{N}}$$

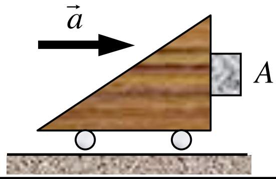
c) Si la cuña está en reposo hacemos su aceleración nula en las expresiones anteriores:

$$T = mg\,\mathrm{sen}\,\theta = \boxed{24.5\ \mathrm{N}} \qquad N = mg\cos\theta = \boxed{42.5\ \mathrm{N}}$$

d) El bloque empezará a elevarse, es decir a perder contacto con la cuña, cuando ésta tenga una cierta aceleración crítica tal que la normal se anule:

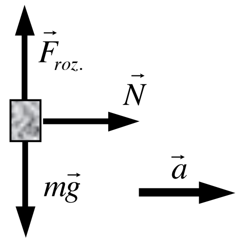
$$N\left(a_{\substack{cuña\\crítica}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{\substack{cuña\\crítica}} = \frac{g}{\mathrm{tg}\,\theta} = \boxed{17.0\ \mathrm{m/s^2}}$$

¿Qué aceleración debe tener el carretón de la figura para que el bloque *A* no caiga, si el coeficiente de rozamiento entre los dos cuerpos es μ?



Solución: I.T.I. 95, 97, 99, 01, I.T.T. 97, 01

Dibujando el diagrama de todas la fuerzas que actúan sobre el bloque, aplicando la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que el rozamiento es estático:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{roz.} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} N = ma \\ \\ F_{roz.} - mg = 0 \end{array}\right\} \\ \\ F_{roz.} \leq F_{roz.\,est.\,máxima} = \mu_{est.}N \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad mg \leq \mu_{est.}ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \geq \frac{g}{\mu_{est.}}}$$

Encima de una tabla de masa m_1, que se encuentra sobre un plano horizontal, hay un bloque de masa m_2. Al bloque se le aplica una fuerza horizontal que crece con el tiempo según la ley $F = ct$ donde c es una constante. Determinar la dependencia de las aceleraciones de los dos cuerpos con el tiempo si el coeficiente de rozamiento entre éstos es igual a μ. Representar dicha dependencia.

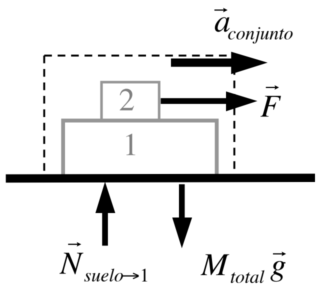
Solución: **I.T.I. 98, 04, I.T.T. 96, 99, 02, 05**

Mientras los dos bloques se muevan conjuntamente su aceleración vendrá dada por:

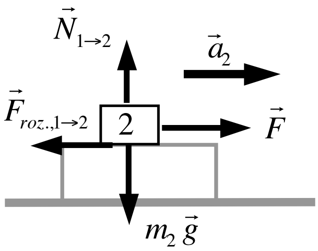
$$\vec{F} + \vec{N}_{suelo\to 1} + M_{total}\,\vec{g} = M_{total}\,\vec{a}_{conjunto}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} N_{suelo\to 1} = M_{total}\,g \\ F = M_{total}\,a_{conjunto} \end{cases}$$

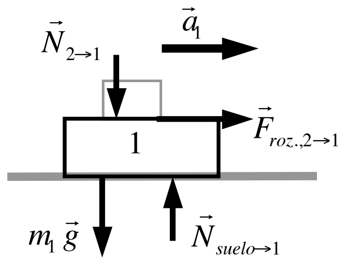
$$\Rightarrow \quad a_{conjunto} = \frac{F}{M_{total}} = \frac{F}{m_1 + m_2} = \boxed{\frac{c\,t}{m_1 + m_2}}$$



Analizando las fuerzas que se ejercen sobre cada bloque:



$$\Rightarrow \quad N_{1\to 2} = m_2 g$$



$$\Rightarrow \quad F_{roz.,2\to 1} = m_1 a_1$$

Teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento es estática, que tiene un valor máximo y que según la tercera ley de Newton $N_{2\to 1} = N_{1\to 2}$:

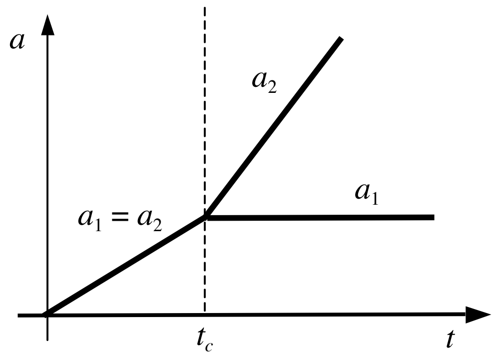
$$F_{roz.,2\to 1} = m_1 a_1 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) c\,t \le \mu N_{2\to 1} = \mu N_{1\to 2} = \mu\, m_2 g$$

$$\Rightarrow \quad t \le t_c = \left(\frac{m_1 + m_2}{c\,m_1}\right) \mu\, m_2 g$$

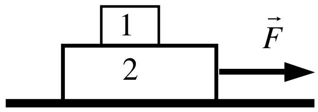
Tenemos por lo tanto que el movimiento conjunto de los dos bloques sólo será posible para un tiempo inferior a cierto tiempo crítico t_c. Para tiempos mayores los dos cuerpos se moverán independientemente. Utilizando de nuevo el diagrama de fuerzas para los dos bloques y teniendo en cuenta que ahora las fuerzas de rozamiento son dinámicas:

$$\left.\begin{array}{c} F - F_{roz.,1\to 2} = m_2 a_2 \\ F_{roz.,2\to 1} = m_1 a_1 \\ F_{roz.,1\to 2} = F_{roz.,2\to 1} = \mu N_{1\to 2} = \mu m_2 g \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} a_1 = \mu \left(\dfrac{m_2}{m_1}\right) g \\ a_2 = \dfrac{c\,t - \mu m_2 g}{m_2} \end{array}}$$

La gráfica de las aceleraciones será la siguiente:



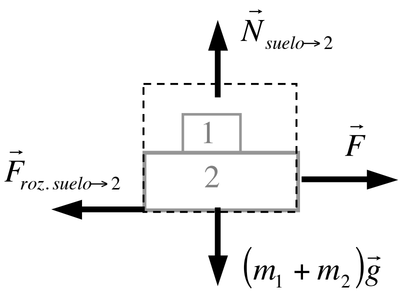
Sobre un cuerpo de masa m_2 se encuentra otro de masa m_1, como se indica en la figura. Si sobre m_2 actuamos con una fuerza F y el coeficiente de rozamiento entre las superficies es μ, calcular:



a) La condición que tiene que cumplir F para que no exista movimiento.
b) La condición para que el cuerpo de masa m_1 no deslice por el de masa m_2 y todo el sistema se mueva con movimiento uniformemente acelerado, calculando esta aceleración.
c) La condición para que el cuerpo de masa m_1 deslice sobre el de masa m_2, calculando las aceleraciones de ambos.

Solución: **I.T.I. 94, 99, I.T.T. 95, 00, 03, I.I. 94**

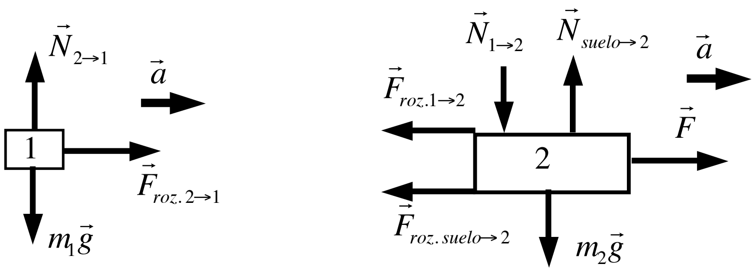
a) Considerando el conjunto de los dos cuerpos el diagrama de fuerzas sería:



Para que no haya movimiento horizontal $F = F_{roz.\,suelo\to 2}$ y teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento es estática y que tiene un valor máximo:

$$F = F_{roz.\,suelo\to 2} \le F_{roz.\,suelo\to 2,m\acute{a}x.} = \mu N_{suelo\to 2} = \mu(m_1 + m_2)g \quad \Rightarrow \quad \boxed{F \le \mu(m_1 + m_2)g}$$

b) Si dibujamos el diagrama de fuerzas para cada cuerpo:



Aplicando la segunda ley de Newton se ve que las fuerzas verticales que actúan sobre los cuerpos se tienen que equilibrar ya que no hay aceleraciones verticales. Teniendo en cuenta que por la tercera ley de Newton hay pares de fuerzas que son iguales y de sentido contrario $\left(\vec{F}_{roz.\,2\to 1} = -\vec{F}_{roz.1\to 2} \quad \Rightarrow \quad F_{roz.\,2\to 1} = F_{roz.1\to 2} \quad \ldots\right)$ y que el rozamiento del suelo con el bloque 2 es cinemático, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} F_{roz.2\to 1} &= m_1 a \\ F - F_{roz.2\to 1} - F_{roz.\,suelo\to 2} &= m_2 a \\ F_{roz.\,suelo\to 2} = \mu N_{suelo\to 2} &= \mu\left(m_1 + m_2\right)g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} - \mu g \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento de 2 sobre 1 es estática:

$$F_{roz.2\to 1} \le F_{roz.2\to 1,máx.} \quad \Rightarrow \quad m_1 a \le \mu N_{2\to 1} = \mu m_1 g \quad \Rightarrow \quad a \le \mu g \quad (2)$$

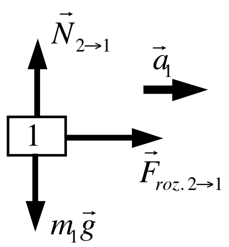
Sustituyendo la ecuación (2) en (1):

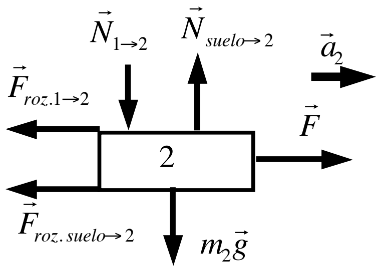
$$F \le 2\mu\left(m_1 + m_2\right)g$$

Si tenemos en cuenta el apartado anterior se deduce que para que los dos cuerpos se muevan conjuntamente:

$$\boxed{\mu\left(m_1 + m_2\right)g \le F \le 2\mu\left(m_1 + m_2\right)g}$$

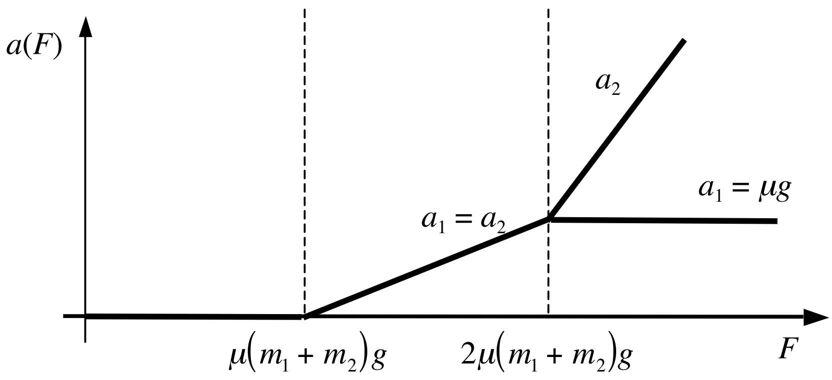
c) Si $F \ge 2\mu\left(m_1 + m_2\right)g$ los dos cuerpos se moverán por separado con aceleraciones diferentes, deslizando el cuerpo 1 sobre el 2 (en este caso la fuerza de rozamiento de 2 sobre 1 es cinemática):





$$\left.\begin{aligned} F_{roz.2\to 1} &= m_1 a_1 \\ F - F_{roz.2\to 1} - F_{roz.\,suelo\to 2} &= m_2 a_2 \\ F_{roz.2\to 1} = \mu N_{2\to 1} &= \mu m_1 g \\ F_{roz.\,suelo\to 2} = \mu N_{suelo\to 2} &= \mu\left(m_1 + m_2\right)g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} a_1 = \mu g \\ a_2 = \dfrac{F}{m_2} - \mu\left(\dfrac{2m_1 + m_2}{m_2}\right)g \end{cases}}$$

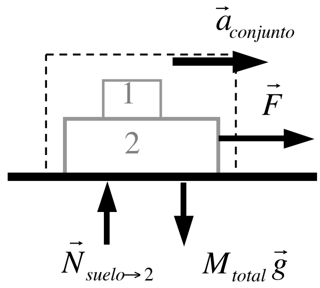
Se puede comprobar por sustitución que las dos aceleraciones coinciden y valen $a_1 = a_2 = \mu g$ cuando F toma el valor límite calculado en el apartado b): $F = 2\mu\left(m_1 + m_2\right)g$. La gráfica de las aceleraciones de los dos cuerpos con la fuerza F será:


$a(F)$
a_2
$a_1 = \mu g$
$a_1 = a_2$
$\mu(m_1 + m_2)g$
$2\mu(m_1 + m_2)g$
F

Un bloque de 3 kg de masa descansa sobre otro de 5 kg de masa situado sobre una superficie horizontal lisa. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre ambos bloques son 0.2 y 0.1 respectivamente. a) ¿Cuál es la máxima fuerza que puede aplicarse al bloque de 5 kg para que el sistema deslice manteniéndose ambos bloques juntos? b) ¿Cuál es la aceleración del bloque de 3 kg si la fuerza es mayor que la fuerza máxima? c) ¿Cuál es la máxima fuerza que puede aplicarse al bloque de 3 kg para que el sistema deslice manteniéndose ambos bloques juntos? d) ¿Cuál es la aceleración del bloque de 5 kg si la fuerza es mayor que la máxima?

Solución: **I.T.I. 97, 01, I.T.T. 97, 01, 04**

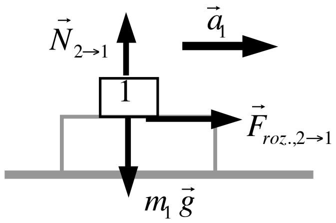
d) Si consideramos el conjunto de los dos bloques su aceleración vendrá dada por:



$$\vec{F} + \vec{N}_{suelo\to 2} + M_{total}\,\vec{g} = M_{total}\,\vec{a}_{conjunto}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{suelo\to 2} = M_{total}\,g \\ F = M_{total}\,a_{conjunto} \end{cases} \Rightarrow \quad a_{conjunto} = \frac{F}{M_{total}} = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Si analizamos el diagrama de fuerzas del cuerpo 1:



$$\vec{F}_{roz.,2\to 1} + \vec{N}_{2\to 1} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{2\to 1} = m_1 g \\ F_{roz.,2\to 1} = m_1 a_1 \end{cases} \Rightarrow \quad a_1 = \frac{F_{roz.,2\to 1}}{m_1}$$

Los dos resultados hacen referencia a la misma aceleración, ya que los bloques se mueven conjuntamente:

$$\frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{F_{roz.,2\to 1}}{m_1} \quad \Rightarrow \quad F = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) F_{roz.,2\to 1}$$

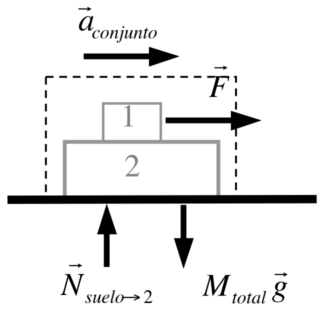
La <u>fuerza de rozamiento</u> entre los dos bloques es <u>estática</u>, aunque los dos bloques se encuentren en movimiento acelerado <u>su movimiento relativo es nulo</u>. Esta fuerza de rozamiento puede crecer hasta cierto valor límite, lo cual nos limita el valor de F:

$$F_{roz.,2\to 1} \le F_{roz.máx.,2\to 1} = \mu_{est.} N_{2\to 1} = \mu_{est.} m_1 g \quad \Rightarrow \quad F \le \mu_{est.}(m_1 + m_2)\,g = \boxed{15.68\,\mathrm{N}}$$

e) Si la fuerza F sobrepasase el valor anterior, la fuerza de rozamiento entre los dos bloques sería dinámica, y volviendo al análisis que hacíamos para el cuerpo 1:

$$a_1 = \frac{F_{roz.,2\to1}}{m_1} = \frac{\mu_{din.}N_{2\to1}}{m_1} = \mu_{din.}g = \boxed{0.98\,\mathrm{m/s^2}}$$

f) Si consideramos el conjunto de los dos bloques su aceleración vendrá dada por:

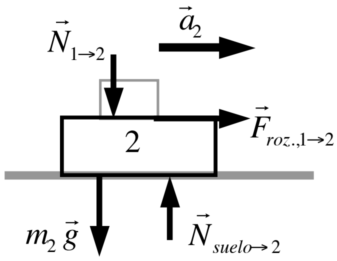


$$\vec{F} + \vec{N}_{suelo\to2} + M_{total}\,\vec{g} = M_{total}\,\vec{a}_{conjunto}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{suelo\to2} = M_{total}\,g \\ F = M_{total}\,a_{conjunto} \quad \Rightarrow \quad a_{conjunto} = \dfrac{F}{M_{total}} = \dfrac{F}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

La aceleración del conjunto no depende por lo tanto de si la fuerza F está ejercida sobre el cuerpo 2 o sobre el cuerpo 1.

Si analizamos el diagrama de fuerzas del cuerpo 2:



$$\vec{F}_{roz.,1\to2} + \vec{N}_{1\to2} + \vec{N}_{suelo\to2} + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{suelo\to2} - N_{1\to2} - m_2 g = 0 \\ F_{roz.,1\to2} = m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \dfrac{F_{roz.,1\to2}}{m_2} \end{cases}$$

Los dos resultados hacen referencia a la misma aceleración, ya que los bloques se mueven conjuntamente:

$$\frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{F_{roz.,1\to2}}{m_2} \quad \Rightarrow \quad F = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) F_{roz.,1\to2}$$

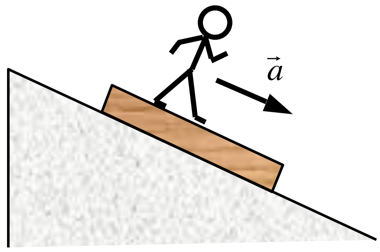
Igual que en el apartado a), la fuerza de rozamiento entre los dos bloques es estática. Esta fuerza de rozamiento puede crecer hasta cierto valor límite, lo cual nos limita el valor de F. Teniendo en cuenta que según la tercera ley de Newton $\vec{N}_{1\to2}$ y $\vec{N}_{2\to1}$ tienen sentido contrario pero el mismo módulo:

$$F_{roz.,1\to2} \le F_{roz.máx.,1\to2} = \mu_{est.}N_{1\to2} = \mu_{est.}m_1 g \quad \Rightarrow \quad F \le \mu_{est.}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) m_1 g = \boxed{9.41\mathrm{N}}$$

g) Si la fuerza F sobrepasase el valor anterior, la fuerza de rozamiento entre los dos bloques sería dinámica, y volviendo al análisis que hacíamos para el cuerpo 2:

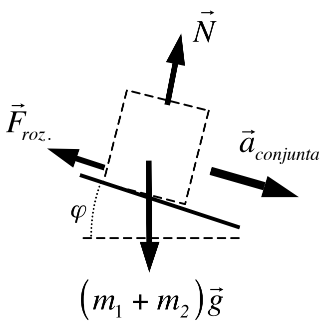
$$a_2 = \frac{F_{roz.,1\to2}}{m_2} = \frac{\mu_{din.}N_{1\to2}}{m_2} = \mu_{din.}\left(\frac{m_1}{m_2}\right) g = \boxed{0.588\,\mathrm{m/s^2}}$$

Por la pendiente de una montaña nevada que forma un ángulo φ = 30º con la horizontal se desliza un hombre sobre su trineo. Si el coeficiente de rozamiento entre el trineo y la nieve es μ = 0.4, a) determinar el movimiento del hombre sobre el trineo para que éste último deslice con movimiento uniforme, b) ¿cómo varían los resultados del apartado anterior si el ángulo de la pendiente es 15º?. La masa del hombre es m_1 = 80 kg y la del trineo m_2 = 40 kg.



Solución: **I.T.I. 94, 04, I.T.T. 95, 00, 04, I.I. 94**

a) Si el hombre se encuentra quieto respecto al trineo todo el sistema (trineo y hombre) se moverán con una aceleración conjunta $\vec{a}_{conjunta}$. Tomando como sentido positivo el descendente:

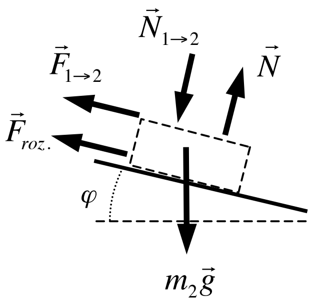


$$\vec{F}_{roz.} + \vec{N} + (m_1 + m_2)\vec{g} = (m_1 + m_2)\vec{a}_{conjunta}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} N - (m_1 + m_2) g\cos\varphi = 0 \quad , \quad F_{roz.} = \mu N \\ (m_1 + m_2) g\,\mathrm{sen}\,\varphi - F_{roz.} = (m_1 + m_2) a_{conjunta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_{conjunta} = (\mathrm{sen}\,\varphi - \mu\cos\varphi) g = 1.51 \text{ m/s}^2$$

Para que el trineo se mueva con velocidad constante el hombre deberá moverse con un movimiento acelerado descendente con aceleración $\vec{a}_1$ de forma que comunique al trineo una fuerza ascendente $\vec{F}_{1\to 2}$ que anule al resto de las fuerzas, que son justamente la que proporcionaban al trineo la aceleración conjunta calculada anteriormente, es decir:



$$\vec{F}_{1\to 2} + \vec{N}_{1\to 2} + \vec{F}_{roz.} + \vec{N} + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{1\to 2} = -\left(\vec{N}_{1\to 2} + \vec{F}_{roz.} + \vec{N} + m_2\vec{g}\right) = -\left(m_2\vec{a}_{conjunta}\right)$$

En el caso del hombre teniendo en cuenta que por la tercera ley de Newton la fuerza de reacción que ejercerá el trineo sobre él será: $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2} = m_2\vec{a}_{conjunta}$, y que el resto de las fuerzas que actúan sobre él son las que actuaban antes y le proporcionaban la aceleración conjunta calculada anteriormente:

$$\left(\vec{F}_{2\to 1}\right) + \left(\text{otras fuerzas}\right) = m_1\vec{a}_1 \quad \Rightarrow \quad \left(m_2\vec{a}_{conjunta}\right) + \left(m_1\vec{a}_{conjunta}\right) = m_1\vec{a}_1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\vec{a}_{conjunta} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)a_{conjunta} = \boxed{2.26 \text{ m/s}}$$

b) En este caso al ser $\mathrm{tg}\varphi < \mu$ si el sistema parte del reposo y el hombre no se mueve el sistema tampoco se moverá. Si nos dan un empujón inicial de forma de poner el sistema en movimiento descendente y hacemos el cálculo de la aceleración conjunta del sistema, como se hizo en el apartado anterior, nos sale negativa. El movimiento es descendente decelerado y acabaría por pararse. En este caso para que el trineo, una vez en movimiento, descienda con movimiento descendente uniforme el hombre deberá comunicarle una fuerza descendente $\vec{F}_{1\to 2}$ moviéndose él hacia arriba con una aceleración $\vec{a}_1$. Razonando de la misma forma que en el apartado anterior llegamos a la misma ecuación:

$$\ldots \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\vec{a}_{conjunta} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)a_{conjunta} = \boxed{-1.88 \text{ m/s}}$$

El valor negativo es debido a que en este caso la aceleración $\vec{a}_1$ del hombre es ascendente, al igual que la aceleración conjunta.