Problema 1.- Una masa situada en el origen de coordenadas en un cierto instante explosiona y se divide en tres fragmentos cuyas masas son proporcionales a 1, 2 y 4. La primera sale despedida según la dirección positiva del eje X con $v_1 = 10$ m/s y la segunda según la dirección positiva del eje y con $v_2 = 5$ m/s. ¿En qué dirección y con qué velocidad sale el tercer fragmento?

Asumimos que podemos ignorar la acción de la gravedad (movimiento en el plano).

En el caso de que el proyectil explote, todas las fuerzas implicadas en la explosión serán internas (el sistema antes de la explosión es el proyectil, el sistema después de la explosión son todos los fragmentos).

Por lo tanto, como no hay fuerza externa, la aceleración del centro de masas del sistema se anula

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \cdot \vec{a}_{CM} = 0 \implies \vec{a}_{CM} = 0$$

Por otra parte

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = 0 \implies \vec{p}_{tot} \text{ se conserva}$$

Por definición:

$$\vec{p}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

Antes de la explosión, sólo había una partícula de masa $M = (1+2+4)m_0$ colocada en el origen. Asumimos que la partícula estaba inicialmente en reposo:

$$\vec{p}_{tot}^{\,antes} = 0$$

Después de la explosión tenemos tres fragmentos.

Fragmento	Masa	Velocidad	Momento
1	$m_1 = 1\ m_0$	$\vec{v}_1 = 10\ \vec{i}$ m/s	$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = 10 m_0 \vec{i}$ kg m/s
2	$m_2 = 2\ m_0$	$\vec{v}_2 = 5\ \vec{j}$ m/s	$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = 10 m_0 \vec{j}$ kg m/s
3	$m_3 = 4\ m_0$	$\vec{v}_3 = v_{3x}\vec{i} + v_{3y}\vec{j}$	$\vec{p}_3 = m_3\vec{v}_3 = 4m_0 v_{3x}\vec{i} + 4m_0 v_{3y}\vec{j}$

$$\vec{p}_{tot}^{\,después} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = (10\,m_0 + 4m_0 v_{3x})\,\vec{i} + (10\,m_0 + 4\,m_0\,v_{3y})\,\vec{j}$$

Como el momento total se conserva en este problema.

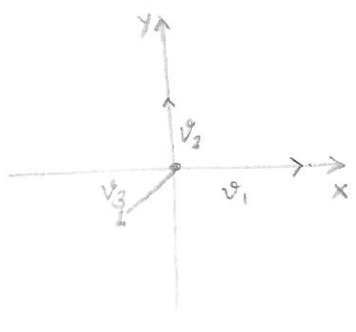
$$\vec{p}_{tot}^{\,antes} = \vec{p}_{tot}^{\,después}$$

$$\begin{cases} 0 = 10\,m_0 + 4\,m_0\,v_{3x} \Rightarrow v_{3x} = -\dfrac{10}{4}\ \text{m/s} = -2.5\ \text{m/s} \\ 0 = 10\,m_0 + 4\,m_0\,v_{3y} \Rightarrow v_{3y} = -\dfrac{10}{4}\ \text{m/s} = -2.5\ \text{m/s} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ El módulo de la velocidad de la partícula 3 vale

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2} = \sqrt{2}\cdot 2.5\ \text{m/s} = 3.53\ \text{m/s}$$

Y el ángulo que forma con el eje x es:



$$\alpha = \text{arc tg}\ \frac{-2.5}{-2.5} = \text{arc tg}\ 1 = 225°$$

Problema 2.-) Un vehículo espacial de 200 kg pasa para $t=0$ por el origen de coordenadas de un sistema de referencia inercial Oxyz con velocidad $\vec{V}_0 = 150\,\vec{i}$ m/s. Tras la detonación de unas cargas explosivas, el vehículo se separa en tres partes A, B, y C de masas 100, 60 y 40 kg respectivamente. Sabiendo que para $t = 2{,}5$ s las posiciones de las partes A y B son respectivamen (555, −180, 240) y (255, 0, −120) donde las coordenadas se expresan en m, determinar la posición de C en ese instante.

Como no hay fuerzas externas, el momento lineal total del sistema se conserva.

$$\vec{p}^{\,inicial}_{total} = M_{vehículo}\,\vec{V}^{inicial} = 200\text{ kg}\ 150\,\vec{i}\text{ m/s} = 3\cdot 10^4\text{ kg m/s}\ \vec{i}$$

$$\vec{p}^{\,final}_{total} = m_A\,\vec{V}_A + m_B\,\vec{V}_B + m_C\,\vec{V}_C$$

Si suponemos que el movimiento de las masas después de la explosión es rectilíneo y uniforme, entonces podemos calcular fácilmente las velocidades:

$$\vec{V}_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y_A}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z_A}{\Delta t}\vec{k}$$

$$= \frac{555}{2{,}5}\vec{i} + \frac{-180}{2{,}5}\vec{j} + \frac{240}{2{,}5}\vec{k}$$

$$= 222\,\vec{i} - 72\,\vec{j} + 96\,\vec{k}\ \text{(m/s)}$$

Procediendo de igual forma para la partícula B

$$\vec{V}_B = 102\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 48\,\vec{k}\ \text{(m/s)}$$

La velocidad de C es desconocida, así que:

$$\vec{V}_C = v_{cx}\,\vec{i} + v_{cy}\,\vec{j} + v_{cz}\,\vec{k}$$

Como el momento total del sistema se conserva:

$$\vec{p}_{total}^{\,inicial} = \vec{p}_{total}^{\,final}$$

Dividiendo en componentes:

$$m_A \, v_{Ax} + m_B \, v_{Bx} + m_C \, v_{Cx} = M_{vehículo} \, v_x^{inicial}$$

$$\Downarrow$$

$$v_{Cx} = \frac{M_{vehículo} \, v_x^{inicial} - m_A \, v_{Ax} - m_B \, v_{Bx}}{m_C}$$

$$= +42 \ m/s$$

Procediendo de la misma forma para las otras dos componentes:

$$v_{Cy} = +180 \ m/s$$

$$v_{Cz} = -168 \ m/s$$

Por lo tanto:

$$\vec{v}_C = 42\,\vec{i} + 180\,\vec{j} - 168\,\vec{k} \quad (m/s)$$

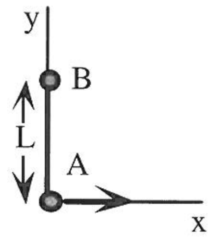
Y la posición de C tras 2,5 s:

$$\vec{x}_C = \vec{v}_C \cdot \Delta t = 105\,\vec{i} + 450\,\vec{j} - 420\,\vec{k} \quad (m)$$

Problema 3: Dos esferas puntuales de masas m y 3m respectivamente, están unidas por una varilla rígida de longitud L y masa despreciable. Las dos masas reposan sobre una superficie lisa horizontal cuando se comunica repentinamente a A una velocidad de $\vec{v}_0 = v\,\vec{i}$. Hallar:

(a) el momento del sistema y su momento angular respecto al centro de masas.

(b) las velocidades de A y B cuando la varilla ha girado un ángulo de 90°



Solución:

Notación: A lo largo del problema denotaremos como cantidades con prima aquellas que están medidas con respecto al centro de masas del sistema. Las cantidades sin prima se refieren a las medidas con respecto al sistema de referencia del laboratorio. El superíndice i se refiere a las cantidades en el instante inicial, mientras que el superíndice f hace referencia a la configuración rotada.

(a) El momento total del sistema en el sistema de referencia del laboratorio lo podemos calcular simplemente a partir de la suma de los momentos individuales de las dos partículas,

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_A^{\,i} + \vec{p}_B^{\,i} = m_A \vec{v}_A^{\,i} + m_B \vec{v}_B^{\,i} = mv\,\vec{i}\,.$$

En el instante inicial, el centro de masas del sistema estará colocado en

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j^{\,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{m_A \vec{r}_A^{\,i} + m_B \vec{r}_B^{\,i}}{m_A + m_B} = \frac{3mL}{4m}\vec{j} = \frac{3L}{4}\vec{j}\,.$$

Con respecto al centro de masas del sistema, las posiciones de las partículas A y B en el instante inicial son

$$\vec{r}_A^{\,\prime i} = \vec{r}_A^{\,i} - \vec{r}_{\text{CM}} = -\frac{3L}{4}\vec{j},$$

$$\vec{r}_B^{\,\prime i} = \vec{r}_B^{\,i} - \vec{r}_{\text{CM}} = \left(L - \frac{3L}{4}\right)\vec{j} = \frac{L}{4}\vec{j}\,.$$

La velocidad inicial del centro de masas es

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j^{\,i}}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{m_A \vec{v}_A^{\,i} + m_B \vec{v}_B^{\,i}}{m_A + m_B} = \frac{mv}{4m}\vec{i} = \frac{v}{4}\vec{i},$$

con lo que las velocidades iniciales de las dos partículas con respecto al centro de masas valen

$$\vec{v}_A^{\,\prime i} = \vec{v}_A^{\,i} - \vec{v}_{\mathrm{CM}} = v\vec{i} - \frac{v}{4}\vec{i} = \frac{3v}{4}\vec{i},$$

$$\vec{v}_B^{\,\prime i} = \vec{v}_B^{\,i} - \vec{v}_{\mathrm{CM}} = -\frac{v}{4}\vec{i}.$$

Podemos calcular el momento angular del sistema con respecto a su centro de masas como

$$\vec{L}_{\mathrm{CM}}^{\prime i} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j^{\,\prime i} \times m_j \vec{v}_j^{\,\prime i} = \vec{r}_A^{\,\prime i} \times m_A \vec{v}_A^{\,\prime i} + \vec{r}_B^{\,\prime i} \times m_B \vec{v}_B^{\,\prime i} = -\frac{9mvL}{16}\left(\vec{j} \times \vec{i}\right) - \frac{3mvL}{16}\left(\vec{j} \times \vec{i}\right) = \frac{3mvL}{4}\vec{k}.$$

(b) Una vez que a la partícula A se le ha suministrado una velocidad $v\,\vec{i}$, y asumiendo que ni la gravedad ni el rozamiento juegan ningún papel (el sistema se mueve en una superficie lisa y horizontal), sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa y, por lo tanto, el momento lineal y angular del sistema se conserva,

$$\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\mathrm{tot}} \text{ es constante},$$
$$\sum \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\mathrm{tot}}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{\mathrm{tot}} \text{ es constante}.$$

Así, basta calcular $\vec{p}_{\mathrm{tot}}$ y $\vec{L}_{\mathrm{tot}}$ en un instante dado. Su valor será el mismo en cualquier instante posterior.

También se conservará la velocidad del centro de masas del sistema,

$$\vec{p}_{\mathrm{tot}} = M\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \text{constante}.$$

Las velocidades de las partículas en el sistema de referencia del laboratorio toman el valor

$$\vec{v}_A^{\,f} = v_{A,x}^f \vec{i} + v_{A,y}^f \vec{j},$$

$$\vec{v}_B^{\,f} = v_{B,x}^f \vec{i} + v_{B,y}^f \vec{j}.$$

Tenemos cuatro incógnitas por conocer (las dos componentes de las velocidades de cada una de las dos partículas). Para resolver el problema necesitamos cuatro ecuaciones.

Las dos primeras saldrán de la ley de conservación del momento lineal total del sistema. El momento lineal total del sistema rotado es

$$\vec{p}_{\text{tot}}^{\,f} = \vec{p}_A^{\,f} + \vec{p}_B^{\,f} = m_A \vec{v}_A^{\,f} + m_B \vec{v}_B^{\,f} = \left(m v_{A,x}^f + 3m v_{B,x}^f\right)\vec{i} + \left(m v_{A,y}^f + 3m v_{B,y}^f\right)\vec{j}.$$

Como el sistema conserva su momento lineal total,

$$\vec{p}_{\text{tot}}^{\,i} = \vec{p}_{\text{tot}}^{\,f} \Rightarrow \begin{cases} m v_{A,x}^f + 3m v_{B,x}^f = mv \\ m v_{A,y}^f + 3m v_{B,y}^f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{A,x}^f + 3 v_{B,x}^f = v & (1) \\ v_{A,y}^f = -3 v_{B,y}^f & (2) \end{cases}$$

La tercera ecuación saldrá de la ley de conservación del momento angular total del sistema. Cuando el sistema haya rotado 90°, las posiciones de las partículas en el sistema de referencia del centro de masas serán

$$\vec{r}_A^{\,\prime f} = \frac{3L}{4}\vec{i},$$
$$\vec{r}_B^{\,\prime f} = -\frac{L}{4}\vec{i}.$$

Y las correspondientes velocidades con respecto al centro de masas

$$\vec{v}_A^{\,\prime f} = \vec{v}_A^{\,f} - \vec{v}_{\text{CM}} = \left(v_{A,x}^f - v\right)\vec{i} + v_{A,y}^f \vec{j},$$

$$\vec{v}_B^{\,\prime f} = \vec{v}_B^{\,f} - \vec{v}_{\text{CM}} = \left(v_{B,x}^f - v\right)\vec{i} + v_{B,y}^f \vec{j}.$$

Aquí hemos tenido en cuenta que la velocidad del centro de masas se mantiene constante. Por lo tanto, el momento angular final con respecto al sistema del centro de masas

$$\vec{L}_{\text{CM}}^{\,\prime f} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j^{\,\prime f} \times m_j \vec{v}_j^{\,\prime f} = \vec{r}_A^{\,\prime f} \times m_A \vec{v}_A^{\,\prime f} + \vec{r}_B^{\,\prime f} \times m_B \vec{v}_B^{\,\prime f} = \frac{3mLv_{A,y}^f}{4}\vec{k} - \frac{3mLv_{B,y}^f}{4}\vec{k} = \frac{3mL}{4}\left(v_{A,y}^f - v_{B,y}^f\right)\vec{k}.$$

Como el sistema conserva su momento angular total,

$$\vec{L}_{CM}^{\,'i} = \vec{L}_{\mathrm{CM}}^{\,'f} \Rightarrow \frac{3mL}{4}\left(v_{A,y}^{f} - v_{B,y}^{f}\right) = \frac{3mL}{4}v \Rightarrow v_{A,y}^{f} - v_{B,y}^{f} = v. \qquad (3)$$

Por último, la cuarta ecuación vendrá del análisis del movimiento del sistema en torno al centro de masas. Visto desde el centro de masas, el movimiento de las dos esferas es un movimiento circular uniforme. Por lo tanto, después de haber girado 90° la velocidad de la partícula A tendrá únicamente una componente a lo largo de la dirección j.

$$\vec{v}_{A}^{\,'f} = v_{A,y}^{\,'f}\vec{j}.$$

En el sistema de referencia del laboratorio, el movimiento de las esferas será una combinación de dicho movimiento circular uniforme y del movimiento de traslación uniforme del C.M.

$$\vec{v}_{A}^{f} = \vec{v}_{A}^{\,'f} + \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{p}_{\mathrm{tot}}}{4m}\vec{i} + v_{A,y}^{\,'f}\vec{j} = \frac{v}{4}\vec{i} + v_{A,y}^{\,'f}\vec{j}. \qquad (4)$$

De la ecuación (4) deducimos que

$$v_{A,x}^{f} = \frac{v}{4},$$

que sustituido a la ecuación (1), conduce a

$$v_{B,x}^{f} = \frac{v}{4}.$$

Por otra parte, combinando las ecuaciones (2) y (3), podemos hallar que

$$v_{A,y}^{f} = \frac{3v}{4}, \qquad v_{B,y}^{f} = -\frac{v}{4}.$$

Con lo cual, las velocidades de las dos partículas en el sistema de referencia del laboratorio cuando la varilla ha girado 90° valen

$$\vec{v}_{A}^{f} = \frac{v}{4}\vec{i} + \frac{3v}{4}\vec{j},$$

$$\vec{v}_{B}^{f} = \frac{v}{4}\vec{i} - \frac{v}{4}\vec{j}.$$

4) Un sistema de partículas está constituido por tres partículas A, B y C de masas 1, 1.5 y 2 kg con velocidades en m/s de $\vec{v}_A = (0, -10, 5)$ $\vec{v}_B = (8, -6, 4)$ y $\vec{v}_C = (v_x, v_y, 10)$ y situadas en los puntos de coordenadas (1.2, 0, 0); (0, 1.8, 1.5); (1.2, 1.8, 0.6) medidos en m. Determinar el valor de las componentes v_x y v_y de la velocidad de la partícula C para que el momento angular del sistema con respecto al punto O sea paralelo al eje z. ¿Cuánto vale en este caso el momento angular?

El momento angular del sistema será la suma de los momentos angulares de las tres partículas:

$$\vec{L}^{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3$$

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 = 1 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 5 \end{vmatrix} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$= \left(-6\vec{j} - 12\vec{k}\right) \quad (\text{kg m}^2/\text{s})$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = 1.5 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1.8 & 1.5 \\ 8 & -6 & 4 \end{vmatrix} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$= 1.5 \cdot \left(7.2\vec{i} + 12\vec{j} - 14.4\vec{k} + 9\vec{i}\right) \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$= \left(24.3\vec{i} + 18\vec{j} - 21.6\vec{k}\right) \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$\vec{L}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{p}_3 = \vec{r}_3 \times m_3 \vec{v}_3 = 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1.2 & 1.8 & 0.6 \\ v_x & v_y & 10 \end{vmatrix} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$= 2 \cdot (18 - 0.6 v_y)\vec{i} + 2 \cdot (0.6 v_x - 12)\vec{j}$$

$$+ 2 \cdot (1.2 v_y - 1.8 v_x)\vec{k} \quad (\text{kg m}^2/\text{s})$$

La componente del momento total a lo largo de x, y, z valen respectivamente:

$$L_x^{tot} = 24.3 + 2\cdot(-0.6\, v_y + 18) = 24.3 - 1.2 v_y + 36$$

$$= 60.3 - 1.2\, v_y$$

$$L_y^{tot} = -6 + 18 + 2\cdot(-12 + 0.6\, v_x) = 12 - 24 + 1.2\, v_x$$

$$= -12 + 1.2\, v_x$$

$$L_z^{tot} = -12 - 21.6 + 2(-1.8\, v_x + 1.2\, v_y)$$

$$= -33.6 - 3.6\, v_x + 2.4\, v_y$$

Para que sólo haya componente a lo largo de z:

$$L_x^{tot} = 0 \Rightarrow 60.3 - 1.2\, v_y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{v_y = 50.25 \text{ m/s}}}$$

$$L_y^{tot} = 0 \Rightarrow -12 + 1.2\, v_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{v_x = 10 \text{ m/s}}}$$

Para este valor de v_x y v_y, el momento total a lo largo de z vale.

$$L_z^{tot} = -33.6 - 3.6\,(10) + 2.4\,(50.25) =$$

$$= 51 \quad \text{kg m}^2/\text{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = 51\, \vec{k} \quad \text{kg m}^2/\text{s}}$$

Problema 5.- Desde un granero caen 240 kg de trigo por minuto sobre una cinta transportadora horizontal de masa total 100 kg. La distancia entre la abertura del granero y la cinta es de 2 m, y se supone que el grano al iniciar su caída parte del reposo. La velocidad de arrastre de la cinta es de 0,4 m/s.

(a) ¿Qué fuerza ejerce la cinta sobre el trigo en el lugar del impacto? (suponer que el trigo queda en reposo en la cinta).

Cuando un grano de trigo de masa dm partiendo del reposo cae desde una altura h = 2m e impacta sobre la cinta posee una velocidad

$$\vec{V}_{antes} = -\sqrt{2gh}\,\vec{j}$$

(A lo largo del problema tomaremos un sistema de referencia con el eje X horizontal, sentido positivo hacia la derecha, y un eje vertical Y, sentido positivo hacia arriba)

Después del choque con la cinta se deja arrastrar con una velocidad

$$\vec{V}_{después} = V_{cinta} \cdot \vec{i}$$

El cambio en el momento lineal del grano de trigo vendrá dado por:

$$d\vec{p} = dm\,\vec{V}_{después} - dm\,\vec{V}_{antes} = dm\left(\vec{V}_{después} - \vec{V}_{antes}\right) = dm \cdot \Delta\vec{V}$$

La fuerza que ha realizado la cinta sobre el grano de trigo que cae para cambiar su momento lineal será:

$$\vec{F}_{cinta-trigo} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{dm}{dt}\right)\cdot\Delta\vec{V} = \frac{240\text{ kg}}{60\text{ s}}\left[0,4\,\vec{i} - \left(-\sqrt{2\cdot 9,80\cdot 2}\,\vec{j}\right)\right]\frac{m}{s}$$

$$= 4\cdot\left(0,4\,\vec{i} + 6,26\text{ m/s}\right) = \left(1,6\,\vec{i} + 25,0\,\vec{j}\right)\text{ N}$$

En la ecuación anterior $\left(\frac{dm}{dt}\right)$ es el ritmo al que cae la masa de trigo sobre la cinta y vale

$$\frac{dm}{dt} = \frac{240 \text{ kg}}{60 \text{ s}} = 4 \text{ kg/s}$$

(b) Despreciando rozamientos en la cinta transportadora, calcula la potencia desarrollada por el motor.

La potencia puede calcularse como el producto escalar de la fuerza por la velocidad.

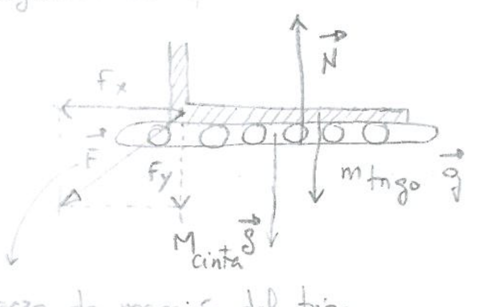
$$\underline{\underline{P}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left(1{,}6\,\vec{i} + 25{,}0\,\vec{j}\right) \cdot \left(0{,}4\,\vec{i}\right) \text{ W} = \underline{\underline{0{,}64 \text{ W}}}$$

(c) Si la longitud de la cinta cubierta por el trigo es de 5 m, ¿cuál es la masa de trigo que hay sobre la cinta? ¿Cuál es el peso aparente de la cinta?

El trigo cae a un ritmo de 4 kg/s, y en un segundo recorre 0,4 m. Luego la cinta transporta 4 kg en 0,4 m. Esto implica que la cinta transporta 10 kg por metro.

Como la cinta tiene 5 m cubiertos de trigo, el peso es de 50 kg

El peso aparente está relacionado con la normal que una báscula situada en el suelo debe ejercer sobre la cinta. Dibujamos el diagrama de fuerzas



fuerza de reacción del trigo sobre la cinta

$$\sum F_y = -M_{cinta}\,g - m_{trigo}\,g - F_y + N = 0$$

$$\underline{\underline{N}} = \left(M_{cinta} + m_{trigo}\right) g + F_y$$

$$= \left[(100 + 50) \cdot 9{,}8 + 25{,}0\right] \text{ N}$$

$$= \underline{\underline{1495 \text{ N}}}$$

(d) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo entre el suelo y las patas de la cinta para que estas no deslicen?

Planteamos la segunda ley de Newton a lo largo del eje x asumiendo la existencia de una fuerza de rozamiento y que el sistema está en reposo.

$$\Sigma F_x = -F_x + F_{roz} = -\left(\frac{dm}{dt}\right) \cdot V_{cinta} + F_{roz} = 0$$

$$\Rightarrow F_{roz} = \frac{dm}{dt} \cdot V_{cinta}$$

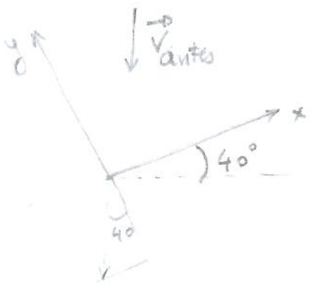
Como el rozamiento es estático:

$$F_{roz} \leq \mu N \Rightarrow \frac{dm}{dt} \cdot V_{cinta} \leq \mu N$$

$$\underline{\underline{\mu}} \geq \left(\frac{dm}{dt}\right) \cdot \frac{V_{cinta}}{N} = \underline{\underline{1{,}07 \cdot 10^{-3}}}$$

(e) Si giramos la cinta 40° para elevar el trigo, responder a las cuestiones (a) y (b)

En este caso nos conviene tomar como eje x uno paralelo a la cinta



$$v_{antes,x} = -|\vec{v}_{antes}| \cdot \text{sen } 40 \quad m/s = -4{,}02 \text{ m/s}$$

$$v_{antes,y} = -|\vec{v}_{antes}| \cdot \cos 40 \quad m/s = -4{,}79 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{después} = 0{,}4\,\vec{i} \quad m/s$$

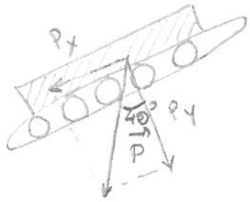
$$\Delta\vec{v} = \vec{V}_{después} - \vec{V}_{antes} = 0{,}4\,\vec{i} - \left(-4{,}02\,\vec{i} - 4{,}79\,\vec{j}\right)$$

$$= 4{,}42\,\vec{i} + 4{,}79\,\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt} \cdot \Delta\vec{v} = 17{,}68\,\vec{i} + 19{,}16\,\vec{j} \text{ N}$$

Esta es la fuerza que se aplica para cambiar el momento del trigo.

Hay que aplicar una fuerza adicional para elevar el trigo.



Esta fuerza es $P_x = mg \cdot \text{sen}\, 40°$

$= 50\, kg \cdot 9{,}81\, m/s \cdot \text{sen}\, 40°$

$= 315{,}28\, N$

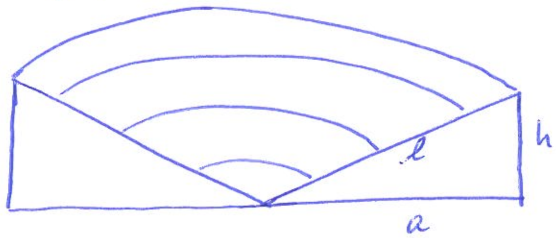
Por lo tanto, la fuerza total a lo largo de x será

$$F_x + P_x = 17{,}68 + 315{,}28\ N = 332{,}96\ N$$

y la potencia

$$P = F_x \cdot v_x = 332{,}96\ N \cdot 0{,}4\ m/s = 133{,}18\ W$$

Problema 6.-1 Calcular la superficie interna y el volumen del cuerpo mostrado en la figura.



(a) Para calcular la superficie aplicamos el primer teorema de Pappus-Guldin:

El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas de la curva cuando se engendra la superficie.

En nuestro problema:

- longitud de la curva generatriz: $l = \sqrt{a^2+h^2}$

- posición de centro de masas de la curva generatriz: su punto medio: $\vec{r}_{CM} = \left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right)$

- distancia recorrida por el centro de masas cuando se engendra la superficie: $\frac{1}{2}(2\pi X_{CM}) = \frac{1}{2}\left(2\pi \frac{a}{2}\right) = \pi a/2$

Por lo tanto:

$$S = \sqrt{a^2+h^2} \cdot \pi \cdot a/2$$

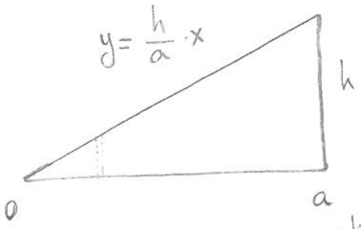
(b) Para el volumen, aplicamos el segundo teorema de Pappus-Guldin:

El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas del área cuando se engendra el cuerpo.

En nuestro problema:

- área generatriz: $\frac{1}{2} a h$

- Ahora tenemos que calcular la componente x del centro de masas del triángulo.



$$x_{CM} = \frac{\int x \, dA}{\int dA} = \frac{\int_0^a dx \int_0^{\frac{h}{a}x} dy \cdot x}{\frac{1}{2} a h} = \frac{\int_0^a dx\, x \cdot \frac{h}{a} x}{\frac{1}{2} a \cdot h}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{h}}{a} \int_0^a x^2 dx}{\frac{1}{2} a \cancel{h}} = \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{1}{2} a^2} = \frac{2}{3} a$$

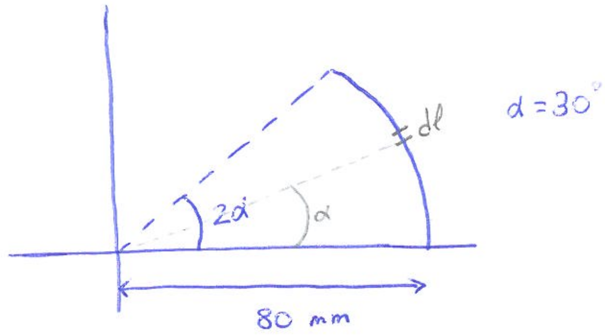
- Distancia recorrida por el centro de masas cuando se engendra el volumen:

$$\frac{1}{2}(2\pi\, x_{CM}) = \frac{4\pi}{2\cdot 3} a = \frac{2\pi}{3} a$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{1}{2} a \cdot h \cdot \frac{2\pi}{3} a = \frac{\pi a^2 h}{3}$$

Problema 7.1 Determinar el centro de gravedad del alambre de la figura:



Dividimos el arco en pequeños elementos de longitud dl

cada uno de esos elementos tiene por coordenadas

$$x = R \cdot \cos\alpha$$

$$y = R \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Y si medimos el ángulo en radianes. $dl = R \cdot d\alpha$

Por lo tanto las coordenadas del centro de masas se calculan como:

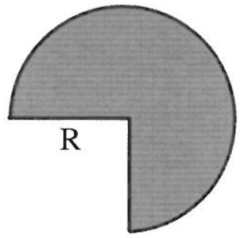
$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\int x\, dl}{\int dl} = \frac{\int_0^{\pi/3} (R \cdot \cos\alpha)\, R\, d\alpha}{\int_0^{\pi/3} R\, d\alpha} = \frac{\cancel{R^2}\int_0^{\pi/3} \cos\alpha\, d\alpha}{\cancel{R}\int_0^{\pi/3} d\alpha}$$

$$= \frac{R \cdot (+\operatorname{sen}\alpha)_0^{\pi/3}}{\pi/3} = \frac{3R \operatorname{sen} \pi/3}{\pi} = \boxed{66{,}2 \text{ mm}}$$

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\int y\, dl}{\int dl} = \frac{\int_0^{\pi/3} (R \operatorname{sen}\alpha)\, R\, d\alpha}{\int_0^{\pi/3} R\, d\alpha} = \frac{R^2 \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{R \int_0^{\pi/3} d\alpha}$$

$$= \frac{R \cdot (-\cos\alpha)_0^{\pi/3}}{\pi/3} = \frac{3R\left[1 - \cos \pi/3\right]}{\pi} = \frac{1{,}5R}{\pi} = \boxed{38{,}2 \text{ mm}}$$

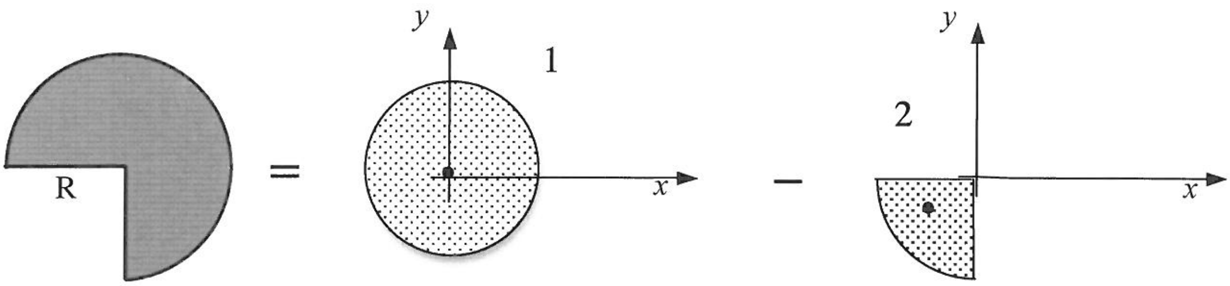
Problema 8: Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura.



Nota: para calcular el centro de masas de la porción que falta, aplicar el Teorema de Pappus-Gulding.

Solución:

Para calcular la posición del centro de masas de la placa, vamos a dividirla en dos partes, cuyos centros de masa podemos conocer o calcular:



Por simetría, las posición del centro de masas del círculo 1 está situado en el origen,

$$\vec{r}_1 = (0,0)$$

Podemos calcular el *valor absoluto* de las coordenadas del centro de masas del cuarto de círculo, 2 en la figura, a partir del Teorema de Pappus-Gulding. En efecto, rotando el cuarto de círculo alrededor del eje x se generaría una semiesfera de volumen

$$V_{\text{semiesfera}} = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Por el segundo Teorema de Pappus-Gulding, sabemos que

$$V_{\text{semiesfera}} = A_{\text{cuarto de círculo}} \times \left(\text{Recorrido del c.m. del cuarto de círculo}\right),$$

y, por lo tanto

$$\frac{2}{3}\pi\, R^3 = \frac{1}{4}\pi\, R^2 \times 2\pi\, y_{\mathrm{CM}} \quad \Rightarrow \quad y_{\mathrm{CM}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Por simetría, $x_{CM} = y_{CM} = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Evidentemente, si tomamos como origen el centro del círculo, las coordenadas del centro de masas del cuarto de círculo habrá que tomarlas con signo negativo

$$\vec{r}_2 = \left(-\frac{4R}{3\pi}, -\frac{4R}{3\pi}\right).$$

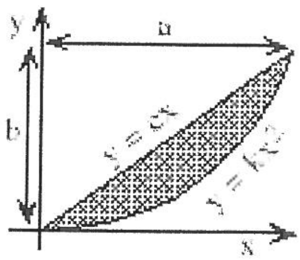
Las coordenadas del centro de masas de toda la pieza vendrán dadas por

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{\dfrac{4R}{3\pi} \times \dfrac{\pi R^2}{4}}{\pi\, R^2 - \dfrac{\pi\, R^2}{4}} = \frac{4R}{9\pi}.$$

De igual manera se calcularía la coordenada y del centro de masas

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{4R}{9\pi}.$$

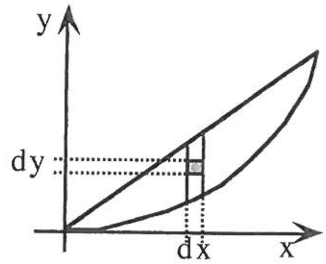
1) Determinar el centro de gravedad de las placa de la figura.



SOLUCION

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea

$x_{CM} = \dfrac{\int x\, da}{\int da}$ y teniendo en cuenta que $da = dx\, dy$, donde este diferencial de área se integra en el área sombreada delimitada por una recta y una parábola de coeficientes $c = b/a$ y $k = b/a^2$ respectivamente, llegamos a la ecuación de partida:



$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a x\,dx \int_{kx^2}^{cx} dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a x\,dx \big[y\big]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx \big[y\big]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a x\,dx\,(cx - kx^2)}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

donde primero hemos integrado dy entre la parábola (kx^2) y la recta (cx) y posteriormente integraremos la variable x entre o y a.

$$= \frac{\int_0^a (cx^2 - kx^3)\,dx}{\int_0^a (cx - kx^2)\,dx} = \frac{\left[c\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[k\dfrac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[c\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{c\dfrac{a^3}{3} - k\dfrac{a^4}{4}}{c\dfrac{a^2}{2} - k\dfrac{a^3}{3}} = \frac{\dfrac{b}{a}\dfrac{a^3}{3} - \dfrac{b}{a^2}\dfrac{a^4}{4}}{\dfrac{b}{a}\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{b}{a^2}\dfrac{a^3}{3}} =$$

$$= \frac{ba^2\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)}{ba\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right)} = \frac{\dfrac{1}{12}ba^2}{\dfrac{1}{6}ba} = \boxed{\frac{1}{2}a}$$

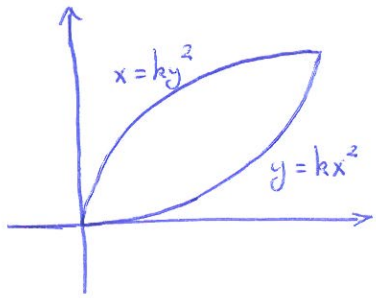
Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} y\,dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a dx \left[\dfrac{y^2}{2}\right]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx\big[y\big]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a dx\, \dfrac{(c^2x^2 - k^2x^4)}{2}}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

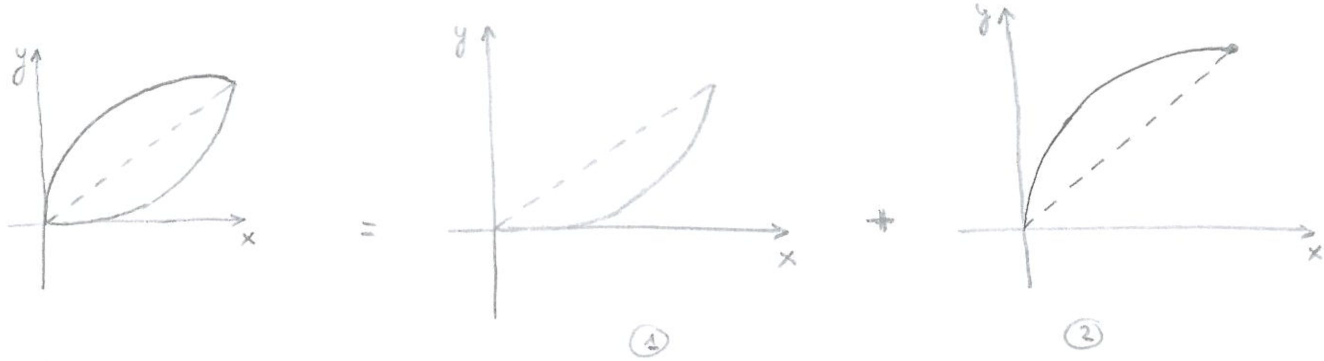
$$= \frac{\left[\frac{c^2}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[\frac{k^2}{2}\frac{x^5}{5}\right]_0^a}{\left[c\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{\frac{c^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{k^2}{2}\frac{a^5}{5}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{b^2/a^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{b^2/a4}{2}\frac{a^5}{5}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} =$$

$$= \frac{b^2 a\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{30}b^2 a}{\frac{1}{6}ba} = \frac{6}{15}\,b = 0.4\,b$$

Problema 8.-1 Determinar el centro de gravedad de las placas de la figura:



Dividimos el área de la figura en dos:



Y así podemos aplicar los resultados del caso anterior

$\vec{r}_1 = (0.5\,a, \quad 0.4\,b)$

$\vec{r}_2 = (0.4\,a, \quad 0.5\,b)$

(El papel que juega la x en el primer caso lo juega la y en el segundo y viceversa)

El área de las figuras 1 y 2 también se calculó en el apartado anterior: $A = \frac{1}{6}ba$, y es el mismo en las dos figuras.

Luego, el centro de masas de la figura compuesta

$$x_{CM} = \frac{x^1_{CM} \cdot A + x^2_{CM}\, A}{A + A} = \frac{(0.5\,a + 0.4\,b)A}{2\,A} =$$

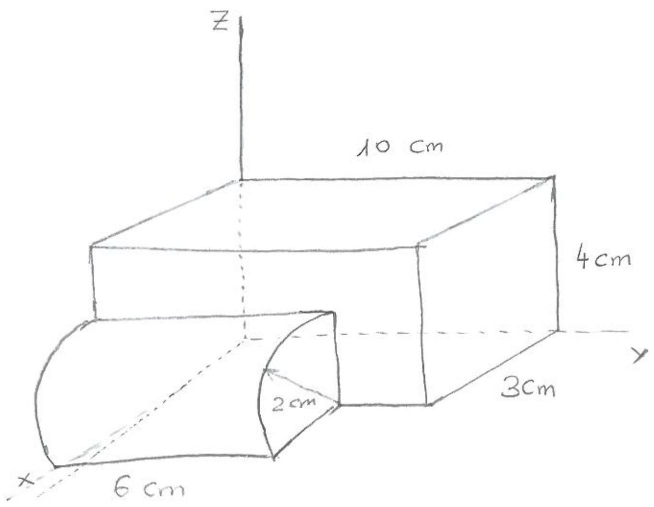
$$= \frac{0.5 \cdot 60 + 0.4 \cdot 60}{2} = \underline{27\ cm}$$

$a = b = 60\ cm$

Y de manera análoga para la y:

$\underline{y_{CM} = 27\ cm}$

Problema 9.-| Determinar los centros de gravedad de los cuerpos de la figura:



Podemos considerar este cuerpo como la suma de dos.

- El primero es un paralelepípedo de lados 10, 4 y 3 cm.

Su volumen es.

$$V_1 = 4 \cdot 10 \cdot 3 = 120 \ cm^3$$

Y, por simetría, su centro de gravedad está localizado en su centro geométrico.

$$\bar{X}_1 = 1{,}5 \ cm$$

$$\bar{y}_1 = 5 \ cm$$

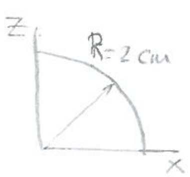
$$\bar{z}_1 = 2 \ cm$$

- El segundo es la sección de cilindro de radio 2 cm y altura 6 cm.

Su volumen es.

$$V_2 = \frac{1}{4} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{4} 6\pi \cdot 4 = 6\pi \ cm^3$$

Para calcular su centro de gravedad (coordenadas x, z) tomamos una vista lateral. Por un problema anterior, ya conocemos el centro de masas de esta figura:



$$\bar{X}_2 = \bar{z}_2 = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} = \frac{8}{3\pi} \ cm$$

Para calcular la posición del centro de gravedad final, desplazamos el origen.

$$\bar{x}_2 = 3 + \frac{8}{3\pi} \quad (cm)$$

$$\bar{z}_2 = \frac{8}{3\pi} \; (cm)$$

Por simetría:

$$\bar{y}_2 = 3 \text{ cm}$$

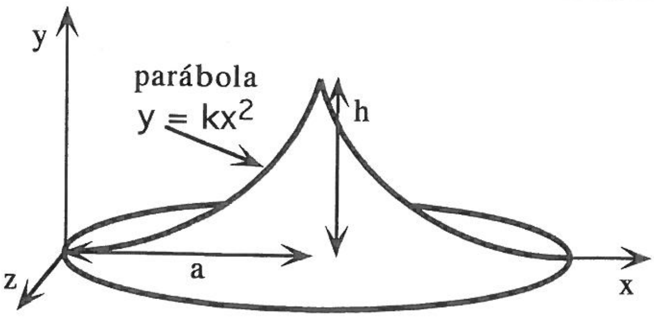
Finalmente, aplicamos las fórmulas del centro de masas para el caso de un cuerpo compuesto de dos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i V_i \bar{x}_i}{\sum V_i} = \frac{(120 \cdot 1{,}5) + 6\pi\left(3 + \frac{8}{3\pi}\right)}{120 + 6\pi} = 1{,}82 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_i V_i \bar{y}_i}{\sum V_i} = \frac{(120 \cdot 5) + 6\pi \cdot 3}{120 + 6\pi} = 4{,}73 \text{ cm}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_i V_i \bar{z}_i}{\sum V_i} = \frac{(120 \cdot 2) + 6\pi \cdot \frac{8}{3\pi}}{120 + 6\pi} = 1{,}90 \text{ cm}$$

1) Determina la posición del centro de masas del cuerpo homogéneo de la figura.



SOLUCION:

Como el cuerpo tiene un eje de simetría paralelo al eje y en la posición (a,y,0), el centro de masas estará a lo largo de dicho eje por lo que tendrá unas coordenadas: $x_{cm} = a$, $z_{cm} = 0$

Solo nos queda conocer la altura a la que se encuentra. Para ello, descomponemos el cuerpo en la suma de discos de radio r y volumen $dV = \pi r^2 dy$, cuyo centro de masas estará en el centro del disco situado a una altura y.

El radio de estos discos depende de la altura y: $r = a - x = a - \sqrt{(y/k)}$

Por definición, $y_{cm} =$

$$\frac{\int y dv}{\int dv} = \frac{\int_0^h y\pi r^2 dy}{\int_0^h \pi r^2 dy} = \frac{\int_0^h y\pi(a - \sqrt{y/k})^2 dy}{\int_0^h \pi(a - \sqrt{y/k})^2 dy} = \frac{\int_0^h \pi(ya^2 + y^2/k - 2ya\sqrt{y/k})dy}{\int_0^h \pi(a^2 + y/k - 2a\sqrt{y/k})dy} =$$

$$= \frac{\pi\left(a^2\left[(1/2)y^2\right]_0^h + (1/k)\left[(1/3)y^3\right]_0^h - (2a/\sqrt{k})\left[(2/5)y^{5/2}\right]_0^h\right)}{\pi\left(a^2[y]_0^h + (1/k)\left[(1/2)y^2\right]_0^h - (2a/\sqrt{k})\left[(2/3)y^{3/2}\right]_0^h\right)} =$$

$$= \frac{\pi\left(a^2(1/2)h^2 + (1/k)(1/3)h^3 - (2a/\sqrt{k})(2/5)y^{5/2}\right)}{\pi\left(a^2h + (1/k)(1/2)h^2 - (2a/\sqrt{k})(2/3)h^{3/2}\right)} =$$

Y teniendo en cuenta que en el vértice de la cuerpo se cumple $h = ka^2 \Rightarrow k = h/a^2$

$$= \frac{\pi\left(a^2(1/2)h^2 + (a^2/h)(1/3)h^3 - (2aa/\sqrt{h})(2/5)h^{5/2}\right)}{\pi\left(a^2h + (a^2/h)(1/2)h^2 - (2aa/\sqrt{h})(2/3)h^{3/2}\right)} = \frac{\pi\left((1/2)a^2h^2 + (1/3)a^2h^2 - (4/5)a^2h^2\right)}{\pi\left(a^2h + (1/2)a^2h - (4/3)a^2h\right)} =$$

$$= \frac{\pi a^2h^2\,((1/2) + (1/3) - (4/5))}{\pi a^2h\,(1 + (1/2) - (4/3))} = \frac{\pi a^2h^2\,((1/2) + (1/3) - (4/5))}{\pi a^2h\,(1 + (1/2) - (4/3))} = \frac{\pi a^2h^2\,(1/30)}{\pi a^2h\,(1/6)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{cm} = \frac{1}{5}h}$$