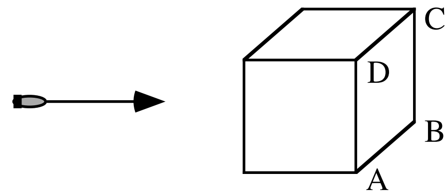
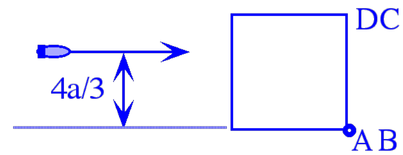
PROBLEMAS



Un cubo sólido de madera de lados de longitud $2a$ y masa M descansa sobre una superficie horizontal. El cubo está restringido a girar alrededor de un eje AB.

a) Determinar el momento de inercia del cubo respecto al eje AB.



Se dispara una bala de masa m con una celeridad v sobre la cara opuesta a ABCD a una altura de $4a/3$.

b) Determina el módulo del momento angular de la bala respecto a un punto del eje AB.

La bala se queda incrustada en el bloque. Si suponemos que m<<M:

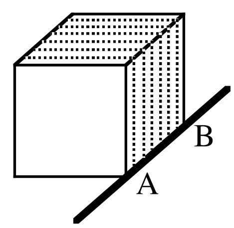
c) Determina la velocidad angular inicial del bloque.

d) Encuentra el mínimo valor de v para que el cubo rote hasta caer sobre la cara ABCD.

En los apartados anteriores, las soluciones tienen que quedar en función de M, m, a, v y g.

e) Si ahora suponemos que $M = 10$ kg, $m = 5$ g y $a = 10$ cm, determina numéricamente las magnitudes de los apartados a) y d).

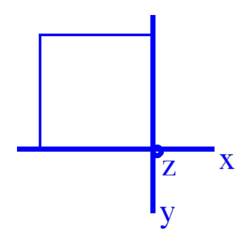
SOLUCION



a) Un cubo se puede considerar una superposición de laminas cuadradas de lado $b = 2a$. Si el momento de inercia de una lámina respecto al eje AB es $dI = dm\, kb^2$, con k una constante a determinar, el momento de inercia del cubo será la suma de los momentos de inercia de las láminas

$$I = \int dI = \int dm\, kb^2 = kb^2 \int dm = Mkb^2,$$

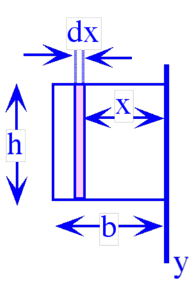
por lo que la expresión del momento de inercia es similar para el cubo y para la lámina, cambiando únicamente la masa.



En teoría se ha visto que, cuando tenemos una lámina plana, el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la misma, I_z, es la suma de los momentos de inercia de la lámina respecto a dos ejes contenidos en el plano de la misma, que sean perpendiculares entre si, I_x e I_y, y que se corten en el punto por donde pasa el eje I_z.

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y.$$

En esta última expresión hemos utilizado el hecho de que, por simetría de un cuadrado, $I_x = I_y$.

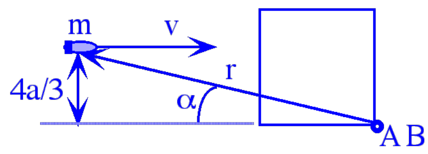


$$I_y = \int_0^b dm\, x^2 = \int_0^b \sigma\, ds\, x^2 = \int_0^b \sigma\, h dx\, x^2 = \sigma h \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \sigma h \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3}\sigma hb\, b^2 = \frac{1}{3} m\, b^2$$

$$I_z = 2I_y = 2\frac{1}{3}mb^2 = \frac{2}{3}mb^2.$$

El momento de inercia del cubo es similar, pero cambiando b por $2a$ y la masa de la placa, m, por la del cubo, M:

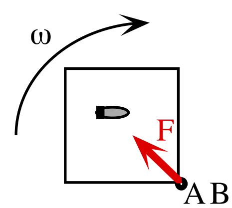
$$\boxed{I_{AB}} = I_z = \frac{2}{3}M\left(2a\right)^2 = \boxed{\frac{8}{3}Ma^2.}$$



b) El momento angular se define como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) \Rightarrow$

$$\left|\vec{L}\right| = m\left|\vec{r}\right|\left|\vec{v}\right| \sin(180^\circ - \alpha) = m\left|\vec{r}\right|\left|\vec{v}\right| \sin\alpha$$

Teniendo en cuenta que $\left|\vec{r}\right| \sin\alpha = \frac{4}{3}a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\vec{L}\right| = \frac{4}{3}ma\left|\vec{v}\right|}$



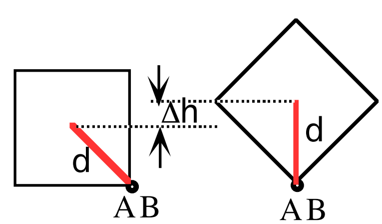
c) Al impactar la bala contra la masa, la fuerza externa que actúa, es en el eje AB. Como esta fuerza pasa por el eje, no origina ningún momento externo, y por lo tanto, el momento angular se conserva (el momento lineal no se conserva, ya que esta fuerza si produce una variación del momento lineal del sistema).
Debemos de tener en cuenta que el momento debido al peso del bloque se cancela con el momento debido a la normal ejercida por el suelo.
El suponer que $m << M$ implica que despreciamos la contribución de la bala (ya incrustada) al momento de inercia del cubo, es decir que el momento de inercia del cubo con la bala dentro es igual al momento del cubo calculado anteriormente.
Una vez que la bala está incrustada en el cubo, el cubo comienza a girar con una velocidad angular ω_0. El módulo del momento angular inicial del cubo es $L = I\omega_0$.

Por la conservación del momento angular

$$\frac{4}{3}ma\left|\vec{v}\right| = \frac{8}{3}Ma^2\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{m\left|\vec{v}\right|}{2Ma}.$$

d) Cuando el cubo rota, el centro de masas, que al ser uniforme está situado en el centro, cambia su altura. El incremento de altura entre la posición inicial y cuando está en al vertical es

$$\Delta h = d - d\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}b - \frac{\sqrt{2}}{2}b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}2a - \frac{1}{2}2a = \sqrt{2}a - a = \left(\sqrt{2} - 1\right)a.$$



Para que el cubo caiga sobre el lado ABCD, la energía cinética de rotación inicial, tiene que ser superior a la energía potencial necesaria para que el centro de masas pase por el punto mas alto,

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 \geq Mg\Delta h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{8}{3}Ma^2\left(\frac{m|\vec{v}|^2}{2Ma}\right)^2 \geq Mg\left(\sqrt{2}-1\right)a \quad \Rightarrow \boxed{|\vec{v}| \geq \sqrt{\frac{3M^2g\left(\sqrt{2}-1\right)a}{m^2}}}$$

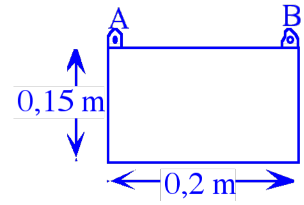
e)

$$\boxed{I_{AB}} = \frac{8}{3}\mathrm{M}\,\mathrm{a}^2 \quad = \quad \frac{8}{3}\,10\,(0.1)^2 \quad = \quad \boxed{0.2667\ \mathrm{kgm}^2}$$

$$\boxed{|\mathbf{v}|} \geq \sqrt{\frac{3\mathrm{M}^2\mathrm{g}(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{a}}{\mathrm{m}^2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{3\ 10^2\ 9.81(\sqrt{2}-1)\ 0.1}{(0.005)^2}} \quad = \quad \boxed{2208\ \mathrm{m/s}}$$

Una placa rectangular de 20 kg de masa está suspendida de los puntos A y B, como indica la figura.

a) Determinar el momento de inercia de la placa respecto un eje perpendicular a la misma que pasa por el punto B. Suponer que la placa es uniforme.

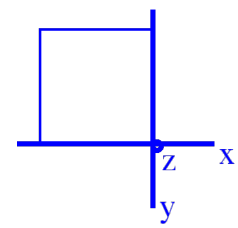


Si se rompe el pasador A:

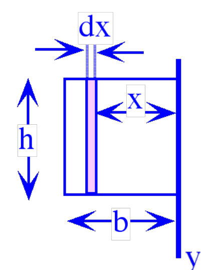
b) ¿Cuál será la aceleración angular de la placa en el instante inicial?
c) ¿Cuál será la velocidad angular de la misma cuando pase por la posición de equilibrio?

SOLUCION

a) En teoría se ha visto que cuando tenemos una lámina plana, el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la misma, I_z, es la suma de los momentos de inercia de la lámina respecto a dos ejes contenidos en el plano de la misma, que sean perpendiculares entre si, I_x e I_y, y que se corten en el punto por donde pasa el eje I_z.



$$I_z = I_x + I_y.$$



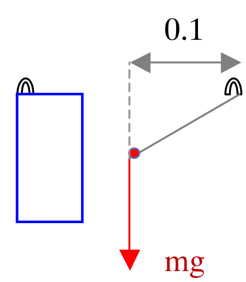
$$I_y = \int_0^b dm\, x^2 = \int_0^b \sigma\, ds\, x^2 = \int_0^b \sigma\, h dx\, x^2 = \sigma h \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \sigma h \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3}\sigma h b\, b^2 = \frac{1}{3} m\, b^2$$

Por analogía, el momento de inercia respecto al eje *x*, será: $I_z = \frac{1}{3} m\, h^2$

El momento de inercia respecto al eje *z* será:

$$I_z = \frac{1}{3} m\, b^2 + \frac{1}{3} m\, h^2 = \frac{1}{3} m\,(b^2 + h^2) = \frac{1}{3} 20\,(0.2^2 + 0.15^2) = 0.4167 \text{ kg m}^2$$

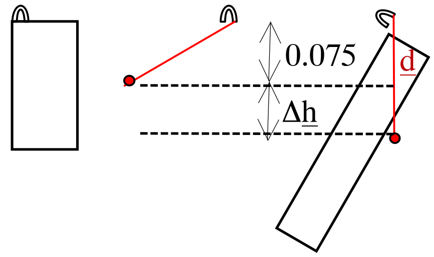
b) Para calcular la aceleración angular aplicamos $\sum \vec{M} = I\vec{\alpha}$, todo respecto al punto B. La única fuerza que origina momento respecto del punto B es el peso aplicado en el centro de masas. Como la placa es homogénea el centro de masas coincide con el centro de la misma. Teniendo esto en cuenta, la segunda ley de Newton para las rotaciones se transforma en



$$0.1 mg = 0.4167\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{20 \times 9.81 \times 0.1}{0.4167} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 47.09 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

El momento del peso apunta hacia fuera del plano del papel (dirección positiva), por lo que la aceleración angular es positiva. La placa rotará en sentido antihorario.

c) Cuando la placa rota, el centro de masas, que al ser uniforme está situado en el centro, cambia su altura. La variación de altura entre la posición inicial y cuando el centro de masas está en la posición más baja (justo en la vertical con el punto B) es



$$\boxed{\Delta h} = d - 0.075 = 0.5 \times \sqrt{0.2^2 + 0.15^2} - 0.075 \boxed{= 0.05 \text{ m}}$$

La energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de rotación:

$$mg\Delta h = 1/2\ I\ \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega =} \sqrt{\frac{2mg\Delta h}{I}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 20 \bullet 9.81 \bullet 0.05}{0.467}} \boxed{= 6.86 \text{ rad/s}}$$