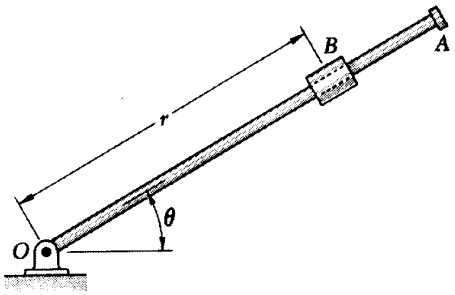
CINEMÁTICA:
MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL,
PROBLEMAS VARIOS.

Un disco de radio R rueda a lo largo de un plano horizontal. Sea P el punto de contacto del disco con el suelo en el instante $t = 0$. Demostrar que en cada instante el vector velocidad del punto P es perpendicular al vector que le une con el punto de contacto con el suelo. Si ρ es la distancia entre esos dos puntos, demostrar que la velocidad del punto P es $\omega\rho$. ¿Qué se deduce de ello?

Solución: I.T.I. 98

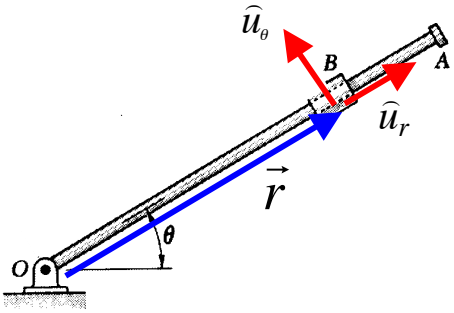
Texto solución

El brazo OA, de 1m de longitud, gira alrededor de O y su movimiento está definido por la relación $\theta = 0.15t^2$, estando expresado θ en radianes y t en segundos. A lo largo del brazo desliza el bloque B, de tal forma que la distancia de O a B es $r = 1 - 0.13t^2$, en donde r se expresa en metros y t en segundos. Calcular la velocidad y aceleración totales del bloque B después de que el brazo OA haya girado 30°.



Solución: I.T.I. 01, 04, I.T.T. 01, 04

Al darnos $r(t)$ y $\theta(t)$ nos están dando la posición de B en coordenadas radiales y transversales (también conocidas como coordenadas polares).



Si denominamos $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$ a los vectores unitarios radial y transversal la posición de B (que es un vector puramente radial) puede expresarse como: $\vec{r} = r\,\hat{u}_r$.

Teniendo en cuenta además que la derivada temporal de un vector $\vec{A}$ sometido a un movimiento de rotación alrededor de un eje con velocidad angular $\vec{\omega}$ es $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$, podemos calcular la velocidad y la aceleración de B derivando sucesivamente su posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\left(\frac{d\hat{u}_r}{dt}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + r\left(\vec{\omega} \times \hat{u}_r\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + \omega\, r\,\hat{u}_\theta$$

En la expresión anterior $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular. El vector velocidad angular será: $\vec{\omega} = \omega\,\hat{n}$ donde $\hat{n}$ es un vector unitario con dirección perpendicular al plano de la figura y, dado que hemos cogido ángulos crecientes en sentido antihorario, la regla de la mano derecha nos indica que tiene sentido hacia fuera. Las componentes radial y transversal de la velocidad resultan ser:

$$v_r(t) = \left(\frac{dr}{dt}\right) = \ldots = -0.26\,t \quad , \quad v_\theta(t) = \omega\, r = \ldots = 0.30\,t\left(1 - 0.13t^2\right)$$

Para la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + \omega\, r\,\hat{u}_\theta\right] =$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)\hat{u}_r + \left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\hat{u}_r}{dt}\right) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right) r\,\hat{u}_\theta + \omega\left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_\theta + \omega\, r\left(\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}\right) =$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)\hat{u}_r + \left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\vec{\omega}\times\hat{u}_r\right) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right) r\,\hat{u}_\theta + \omega\left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_\theta + \omega\, r\left(\vec{\omega}\times\hat{u}_\theta\right) =$$

$$= \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)\hat{u}_r + \left(\frac{dr}{dt}\right)\omega\,\hat{u}_\theta + \left(\frac{d\omega}{dt}\right) r\,\hat{u}_\theta + \omega\left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_\theta - \omega^2\, r\,\hat{u}_r =$$

$$= \left[\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right) - \omega^2\, r\right]\hat{u}_r + \left[2\omega\left(\frac{dr}{dt}\right) + r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\right]\hat{u}_\theta$$

Las componentes radial y transversal de la aceleración serán por lo tanto:

$$a_r(t) = \left[\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right) - \omega^2\, r\right] = \ldots = -0.26 - (0.30\,t)^2\left(1 - 0.13\,t^2\right)$$

$$a_\theta = \left[2\omega\left(\frac{dr}{dt}\right) + \alpha\, r\right] = \ldots = 2(0.30\,t)(-0.26t) + 0.30\left(1 - 0.13t^2\right)$$

donde $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ es la aceleración angular del móvil (y la de la barra).

En el momento t_a en que $\theta(t_a) = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ rad:

$$\frac{\pi}{6} = 0.15\,t_a^2 \quad \Rightarrow \quad t_a = \sqrt{\frac{10}{9}\pi} \approx 1.868\,\text{s} \quad , \quad r(t_a) = 1 - 0.13\,t_a^2 \approx 0.546\,\text{m}$$

Sustituyendo en las expresiones para la velocidad:

$$\boxed{v_r(t_a) \approx -0.486\,\text{m/s} \quad , \quad v_\theta(t_a) \approx 0.306\,\text{m/s}}$$

Con lo que el módulo de la velocidad será:

$$\boxed{v(t_a) = \sqrt{v_r^2(t_a) + v_\theta^2(t_a)} \approx 0.574\,\mathrm{m/s}}$$

y el ángulo que forma con la dirección radial será:

$$\mathrm{tg}\left[\beta(t_a)\right] = \frac{v_\theta(t_a)}{v_r(t_a)} \approx -0.630 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta(t_a) \approx 147^\circ\, 47'}$$

Sustituyendo en las expresiones para la aceleración:

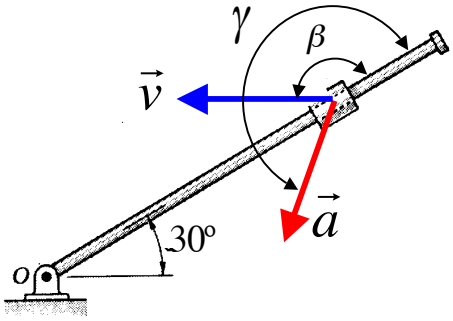
$$\boxed{a_r(t_a) \approx -0.432\,\mathrm{m/s^2} \quad , \quad a_\theta(t_a) \approx -0.381\,\mathrm{m/s^2}}$$

Con lo que el módulo de la aceleración será:

$$\boxed{a(t_a) = \sqrt{a_r^2(t_a) + a_\theta^2(t_a)} \approx 0.575\,\mathrm{m/s^2}}$$

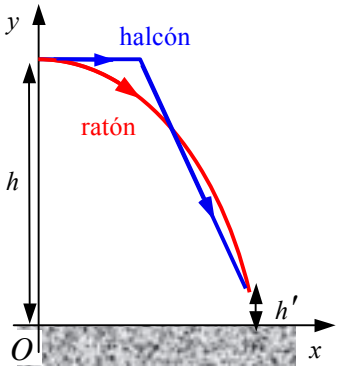
y el ángulo que forma con la dirección radial será:

$$\mathrm{tg}\left[\gamma(t_a)\right] = \frac{a_\theta(t_a)}{a_r(t_a)} \approx 0.882 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma(t_a) \approx 221^\circ 25'}$$



Un halcón está volando horizontalmente a v_0 = 10 m/s en línea recta a h = 200 m sobre el suelo. Un ratón que llevaba en sus garras se suelta de ellas. El halcón continúa su trayectoria a la misma velocidad durante 2s más, antes de precipitarse a recuperar su pieza. Para llevar a cabo la captura se dirige en línea recta hacia abajo con velocidad constante, alcanzando al ratón a h' = 3m sobre el suelo. Suponiendo que no hay resistencia del aire, a) calcular la velocidad del halcón, b) ¿cuál es el ángulo que forma la trayectoria del halcón con la horizontal durante su descenso? ,c) ¿qué tiempo vuela libre el ratón?

Solución: I.T.I. 92, 98, 01, 04, I.T.T. 95, 01, 04



c) Si tomamos como origen de coordenadas el punto a ras del suelo justo sobre el cual el ratón se suelta del halcón y ponemos en ese momento nuestro cronómetro a cero, las ecuaciones del movimiento para los dos animales serán:

Ratón: Cuando se suelta su velocidad es la misma que llevaba el halcón (v_0), y sometido a la gravedad realizará un movimiento parabólico:

$$t_{0,ratón} = 0\ ,\quad \vec{r}_{0,ratón} = 0\,\hat{i} + h\,\hat{j}\ ,\quad \vec{v}_{0,ratón} = v_0\,\hat{i}\ ,\quad \vec{a}_{ratón} = \vec{g} = -g\,\hat{j}$$

$$\Rightarrow\quad x_{ratón}(t) = v_0 t\ ,\quad y_{ratón}(t) = h - \frac{1}{2}gt^2\ ,\quad v_{x,ratón}(t) = v_0\ ,\quad v_{y,ratón}(t) = -gt$$

Halcón: Cuando se suelta el ratón, el halcón continúa con su movimiento horizontal durante dos segundos más, $\Delta t = 2\,\text{s}$. Cuando inicia su movimiento de descenso se encuentra en una posición a una distancia horizontal del origen: $d = v_0\Delta t = 20\,\text{m}$. Si llamamos v_0' a la velocidad del halcón durante el descenso, y θ el ángulo que forma su trayectoria con la horizontal, para este movimiento tenemos las siguientes condiciones iniciales y ecuaciones:

$$t_{0,halcón} = 2\,\text{s}\ ,\quad \vec{r}_{0,halcón} = d\,\hat{i} + h\,\hat{j}\ ,\quad \vec{v}_{0,halcón} = v_0'\cos\theta\,\hat{i} - v_0'\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j}\ ,\quad \vec{a}_{halcón} = 0$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} x_{halcón}(t) = d + v_0'\cos\theta\left(t - t_{0,halcón}\right)\ ,\quad y_{halcón}(t) = h - v_0'\,\text{sen}\,\theta\left(t - t_{0,halcón}\right)\ , \\ v_{x,halcón}(t) = v_0'\cos\theta\ ,\quad v_{y,halcón}(t) = -v_0'\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

En el momento de encuentro ($t = t_e$) el ratón se encuentra a la altura $y_{halcón}(t_e) = h'$:

$$\Rightarrow\quad h' = y_{ratón}(t_e) = h - \frac{1}{2}gt_e^2\quad\Rightarrow\quad t_e = \sqrt{\frac{2(h-h')}{g}} = \boxed{6.34\,\text{s}}$$

a) y b) En el momento de encuentro las posiciones de los dos animales coinciden:

$$\left.\begin{array}{lll} x_{ratón}(t_e) = x_{halcón}(t_e) & \Rightarrow & v_0\,t_e = d + v_0'\cos\theta\left(t_e - t_{0,halcón}\right) \\ y_{ratón}(t_e) = y_{halcón}(t_e) & \Rightarrow & h' = h - v_0'\,\text{sen}\,\theta\left(t_e - t_{0,halcón}\right) \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{array}{l}\theta = 77^\circ\,34' \\ v_0' = 46.47\,\text{m/s}\end{array}}$$

El empecinado coyote está una vez más tratando de capturar al elusivo correcaminos. El coyote usa un par de patines jet Acme que le proveen una aceleración constante de 15 m/s^2. El coyote parte desde el reposo a 70 m de un acantilado en el instante en el que el correcaminos lo pasa en dirección al acantilado. a) Si el correcaminos se mueve con velocidad constante determine cuál debe ser su rapidez de forma que alcance el acantilado antes que el coyote. b) Si el acantilado está a 100 m sobre la base de un cañón, determine en que lugar aterrizará el coyote en el cañón (suponga que los patines siguen funcionando mientras el coyote está en el aire). c) Determine las componentes de la velocidad del coyote en el momento en que llega al fondo del cañón. (No os preocupéis por el correcaminos, es el bueno de la película y habitualmente se escapa dando un giro brusco en el borde del acantilado).

Solución: I.T.I. 99, 02, 05, I.T.T. 95, 99, 02, 05

a) Si colocamos el origen de coordenadas al pie del acantilado, ponemos a cero el cronómetro en el momento en que se cruzan el coyote y el correcaminos y orientamos el eje X horizontal y el eje Y vertical hacia arriba, tenemos que las ecuaciones de movimiento de nuestros dos personajes serán:

Para el coyote:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = x_0 + \frac{1}{2} a_{patines} t^2 \\ v_x(t) = a_{patines} t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} t_0 = 0 \quad , \quad x_0 = -70 \text{ m} \\ y_0 = 100 \text{ m} \ , \ v_0 = 0 \end{array}\right\}$$

Para el correcaminos:

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = x'_0 + v'_0 \ t \\ v'_x(t) = v'_0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} t'_0 = 0 \quad , \quad x'_0 = -70 \text{ m} \\ y'_0 = 100 \text{ m} \ , \ v'_0 = ? \end{array}\right\}$$

El tiempo de llegada del coyote al borde del acantilado será:

$$x\left(t_{llegada}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 + \frac{1}{2} a_{patines} t^2_{llegada} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{llegada} = \sqrt{-\frac{2x_0}{a_{patines}}}$$

El tiempo de llegada del correcaminos al borde del acantilado será:

$$x'\left(t'_{llegada}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x'_0 + v'_0 \ t'_{llegada} = 0 \quad \Rightarrow \quad t'_{llegada} = -\frac{x'_0}{v'_0}$$

Necesitamos que:

$$t'_{llegada} < t_{llegada} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x'_0}{v'_0}\right)^2 < -\frac{2x_0}{a_{patines}} \quad \Rightarrow \quad v'_0 > \sqrt{-\frac{x'^2_0 a_{patines}}{2x_0}} = \boxed{22.9 \text{ m/s}}$$

b) En el momento en que el coyote llega al acantilado:

$$t_{llegada} = \sqrt{-\frac{2x_0}{a_{patines}}} = 3.055 \text{ s} \quad , \quad v_{llegada} = v_x\left(t_{llegada}\right) = a_{patines} t_{llegada} = 45.83 \text{ m/s}$$

A partir de este momento las ecuaciones de la posición del coyote serán:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_{llegada}\left(t - t_{llegada}\right) + \frac{1}{2} a_{patines}\left(t - t_{llegada}\right)^2 \\ y(t) &= y_0 - \frac{1}{2} g\left(t - t_{llegada}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &t_0 = t_{llegada} \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 100 \text{ m} \\ &v_{0,x} = v_{llegada} \quad , \quad v_{0,y} = 0 \end{aligned}\right\}$$

(Téngase en cuenta que en estas ecuaciones t es el tiempo que marca nuestro cronómetro que fue puesto a cero cuando se cruzaron los dos personajes en la cima del acantilado. El nuevo movimiento del coyote cayendo por el acantilado comienza por lo tanto en $t = t_{llegada}$, de ahí la presencia de $t_{llegada}$ en las ecuaciones. Como en el resto del problema no nos preguntan por ningún tiempo concreto podríamos haber puesto a cero de nuevo el cronómetro cuando el coyote empieza a caer con lo cual nuestras ecuaciones serían:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_{llegada} t + \frac{1}{2} a_{patines} t^2 \\ y(t) &= y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &t_0 = 0 \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 100 \text{ m} \\ &v_{0,x} = v_{llegada} \quad , \quad v_{0,y} = 0 \end{aligned}\right\}$$

de todas formas es instructivo saber manejarse con ecuaciones con tiempos iniciales no nulos y no estar continuamente cambiando el origen de tiempos sino tomarlo fijo desde el inicio, igual que fijamos desde el inicio el sistema de coordenadas)

En el instante t_{suelo} en que llega al suelo:

$$y\left(t_{suelo}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 - \frac{1}{2} g\left(t_{suelo} - t_{llegada}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{suelo} - t_{llegada} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

En ese instante:

$$x\left(t_{suelo}\right) = v_{llegada}\left(t_{suelo} - t_{llegada}\right) + \frac{1}{2} a_{patines}\left(t_{suelo} - t_{llegada}\right)^2 = \boxed{360 \text{ m}}$$

c) Para la velocidad las ecuaciones serían:

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= v_{llegada} + a_{patines}\left(t - t_{llegada}\right) \\ v_y(t) &= -g\left(t - t_{llegada}\right) \end{aligned}\right\}$$

En el instante t_{suelo} en que llega al suelo:

$$v_x\left(t_{suelo}\right) = v_{llegada} + a_{patines}\left(t_{suelo} - t_{llegada}\right) = \boxed{113.6\ \text{m/s}}$$

$$v_y(t) = -g\left(t_{suelo} - t_{llegada}\right) = \boxed{-44.3\ \text{m/s}}$$