CINEMÁTICA:
MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL,
DATOS NO EN FUNCIÓN DEL TIEMPO.

Un punto se mueve en el plano XY con una aceleración a constante en el sentido negativo del eje Y. La ecuación de la trayectoria de la partícula es $y = \alpha x - \beta x^2$, donde α y β son constantes positivas. Determinar la velocidad de la partícula en el origen de coordenadas.

Solución: I.T.T. 97, 03

Se trata de un movimiento parabólico. Si ponemos a cero nuestro cronómetro cuando la partícula se encuentra en el origen $(t_0 = x_0 = y_0 = 0)$ las ecuaciones del movimiento serán:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_{0,x}\, t \\ y(t) &= v_{0,y}\, t - \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_{0,x}} \\ y(x) &= \left(\frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}\right) x - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{v_{0,x}^2}\right) x^2 \end{aligned}\right.$$

Comparando con la ecuación de la trayectoria del enunciado tenemos que:

$$\alpha = \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} \quad , \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{v_{0,x}^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_0 = \sqrt{\frac{a}{2\beta}}\left(\hat{i} + \alpha \hat{j}\right) \quad , \quad v_0 = \sqrt{\frac{a(1+\alpha^2)}{2\beta}}}$$

Una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ de modo que en cualquier instante $v_x = 3\text{ms}^{-1}$. Calcule la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración de la partícula en el punto $x_0 = 2/3\text{ m}$.

Solución: I.T.I. 96, 01, 04, I.T.T. 96, 00, 01, 04

El vector de posición de la partícula en su movimiento a lo largo de la parábola será:

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} = x\,\hat{i} + x^2\,\hat{j}$$

Derivando obtendremos el vector velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + 2x\frac{dx}{dt}\hat{j} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt} = 3\text{ m/s}, \quad v_y = 2x v_x$$

En el momento en que la posición sea $x_0 = 2/3\text{ m}$:

$$v_x(x_0) = 3\text{m/s}, \quad v_y(x_0) = 4\text{m/s}$$

El módulo de la velocidad será:

$$\boxed{v(x_0) = \sqrt{v_x^2(x_0) + v_y^2(x_0)} = 5\,\mathrm{m/s}}$$

El ángulo que formará la velocidad con la horizontal será:

$$\mathrm{tg}\left[\theta(x_0)\right] = \frac{v_y(x_0)}{v_x(x_0)} = 4/3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta(x_0) \approx 53^{\circ}8'}$$

Para obtener la aceleración derivamos la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{d(2xv_x)}{dt}\hat{j} = 2v_x\frac{dx}{dt}\hat{j} = 2v_x^2\,\hat{j} = \boxed{18\,\hat{j}\ \mathrm{m/s^2}}$$

Una partícula se mueve en el plano XY con una velocidad $\vec{v} = a\hat{i} + bx\hat{j}$, siendo a y b constantes. En t = 0 la partícula se encuentra en el origen de coordenadas. Hallar: a) la ecuación de la trayectoria y dibujarla, b) el radio de curvatura en función de x.

Solución: I.T.I. 97

Texto solución